РУКОВОДСТВО ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ
ПО КУРСУ **«ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**
ПО ТЕМЕ **«МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОМЕРНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ»**

## 1 Описание малых многомерных колебаний линейными методами линейной алгебры

Малые колебания — движение системы вблизи положения устойчивого равновесия $q = q_0$, которое для системы с одной степенью свободы определяется условиями $\left.\frac{\partial U}{\partial q}\right|_{q=q_0} = 0, \left.\frac{\partial^2 U}{\partial q^2}\right|_{q=q_0} = k > 0$ (движение вблизи "дна" одномерной потенциальной ямы)

$$T = \sum_{n=1}^{N} \frac{m_n \dot{q}^2{}_n}{2} \text{ - кинетическая энергия;} \quad (1)$$

$$U = \sum_{n=1}^{N} \frac{\kappa x^2{}_n}{2} \text{ - потенциальная энергия;} \quad (2)$$

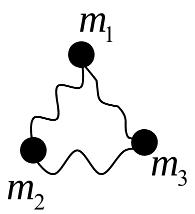


Рис.1

$T = \frac{m\dot{q}^2}{2}$; $U = \frac{\kappa x^2}{2}$;

$x = q - q^{(0)}$ - отклонение от положения устойчивого равновесия: (3)

$$L = \frac{m\dot{q}^2}{2} - \frac{\kappa x^2}{2}. \quad (4)$$

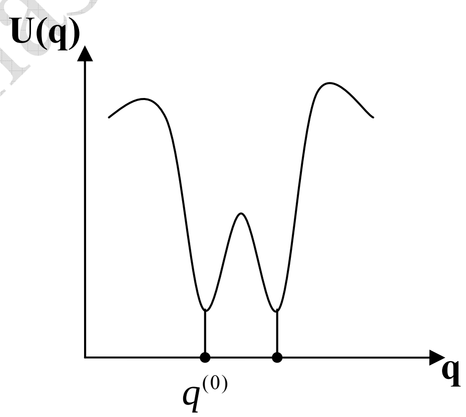


Рис.2

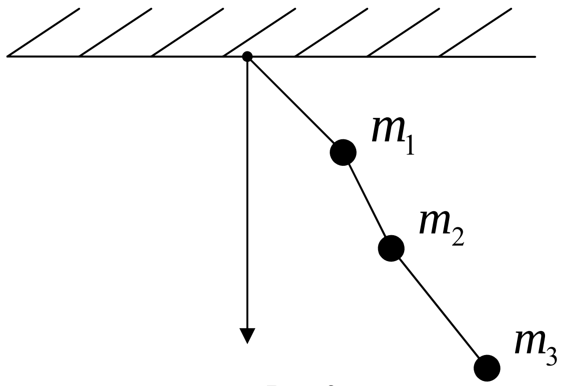


Рис.3

Пусть система имеет r- степеней свободы:

$\dot{q}_\alpha$, $q_\alpha$ , $\alpha = 1,2..r$

Пусть положение устойчивого равновесия механической системы определяет совокупность $\left\{q_\alpha{}^{(0)}\right\}$.

Отклонение - $\left\{x_\alpha = q_\alpha - q_\alpha{}^{(0)}\right\}$, тогда в общем случае:

$$T = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{1}{2} \dot{x}_\alpha\, m_{\alpha,\beta}\, \dot{x}_\beta ; \qquad (5)$$

$$U = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{1}{2} x_\alpha\, \kappa_{\alpha,\beta}\, x_\beta ; \qquad (6)$$

$\left( \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} = \sum_{\alpha=1}^{r} \sum_{\beta=1}^{r} \right)$

Рассматривается только при следующих условиях:

1) $m_{\alpha,\beta}$, $\kappa_{\alpha,\beta}$ - действительные величины;

2) $m_{\alpha,\beta} = m_{\beta,\alpha}$; $\kappa_{\alpha,\beta} = \kappa_{\beta,\alpha}$ - условия симметрии системы;

$L = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \left[ \frac{1}{2} \dot{x}_\alpha\, m_{\alpha,\beta}\, \dot{x}_\beta - \frac{1}{2} x_\alpha\, \kappa_{\alpha,\beta}\, x_\beta \right]$ – через матричные элементы, (7)

$$H = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \left[ \frac{1}{2} \pi_\alpha m'_{\alpha,\beta} - \frac{1}{2} x_\alpha\, \kappa_{\alpha,\beta}\, x_\beta \right] = H(x_\alpha, \pi_\alpha) . \qquad (8)$$

Введем многомерный вектор в виде столбца, каждая компонента которого зависит от времени:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix}; \ \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{pmatrix}; \left(\vec{y}\,\vec{x}\right) = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{pmatrix} = y_1 x_1 + y_2 x_2 + .. + y_r x_r ; \qquad (9)$$

$L = \frac{1}{2} \dot{\vec{x}}\, \hat{m}\, \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2} \vec{x}\, \kappa\, \vec{x}$ - через определения матриц. (10)

$(\hat{m}^T = \hat{m};\ \hat{\kappa}^T = \hat{\kappa})$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\gamma}\right) - \frac{\partial L}{\partial x_\gamma} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0$$ матричный вид ($\gamma = 1,2..r$); (11)

$$\pi_\gamma = \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_\gamma}\right) = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_\gamma} \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \left[\frac{1}{2} \dot{x}_\alpha\, m_{\alpha,\beta}\, \dot{x}_\beta - \frac{1}{2} x_\alpha\, \kappa_{\alpha,\beta}\, x_\beta\right] = \sum_{\alpha,\beta=1}^{r} \frac{1}{2}\left[\delta_{\alpha,\gamma} m_{\alpha,\beta}\, \dot{x}_\beta - \dot{x}_\alpha\, m_{\alpha,\beta} \delta_{\gamma,\beta}\right] =$$

$= \sum_{\beta=1}^{r}\left(\frac{1}{2} m_{\gamma,\beta}\, \dot{x}_\beta\right) + \sum_{\alpha=1}^{r}\left(\frac{1}{2} \dot{x}_\alpha\, m_{\alpha,\gamma}\right) =$ (учитывая свойство симметрии матрицы $m$ и то, что $\sum\limits_{\alpha}$ и $\sum\limits_{\beta}$ одинаковы) $= \sum_{\alpha=1}^{r}\left(\frac{1}{2} m_{\alpha,\gamma}\, \dot{x}_\alpha\right)$ (12)

$$\Rightarrow \vec{\pi} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \hat{m}\, \dot{\vec{x}}; \quad (13)$$

$$\frac{d}{dt}\vec{\pi} - \frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = 0, \quad (14)$$

(14) - уравнение колебаний многомерных систем в векторной форме.

Переход к Гамильтонов форме:

1) $H = \sum\limits_{\alpha} \pi_\alpha\, \dot{x}_\alpha - L$; (15)

2) Для того, чтобы определить $\dot{\vec{x}}$ через $\vec{\pi}$, умножим уравнение (12) слева на $\hat{m}^{-1}$, получим:

$$\dot{\vec{x}} = \hat{m}^{-1}\, \vec{\pi}; \quad (16)$$

3) $L = \frac{1}{2} \vec{\pi}\, \hat{m}^{-1}\, \hat{m}\, \hat{m}^{-1}\, \vec{\pi} - \frac{1}{2} \vec{x}\, \kappa\, \vec{x}$, (17)

$$\frac{m\dot{x}}{2} = (\dot{x} = \frac{p}{m}) = \frac{p^2}{2m}; \quad (18)$$

4) Если воспользоваться уравнением (13) и уравнением (14), то уравнение движения колебаний многомерных систем в линейном приближении будет следующим:

$$\hat{m}\, \ddot{\vec{x}} + \hat{\kappa}\, \vec{x} = 0, \quad (19)$$

где $\frac{\partial L}{\partial \vec{x}} = -\hat{\kappa}\, \vec{x}$, а $\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = \hat{m}\, \dot{\vec{x}}$.

## 2 Решение уравнений колебаний в многомерных системах

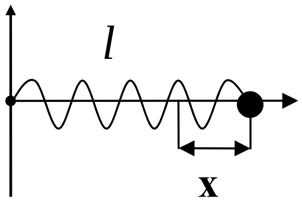



Рис.4

$$\hat{m}\ddot{\vec{x}}+\hat{\kappa}\vec{x}=0 \qquad (20)$$

- одномерный случай

$x(t)=Ae^{i\omega t}\Rightarrow$ Используя метод комплексных переменных

$\Rightarrow \mathrm{Re}(x(t))=\mathrm{Re}(Ae^{i\omega t})$ : (21)

$$\vec{x}(t)=\vec{A}e^{i\omega t}, \qquad (22)$$

где $\omega$ - сложная функция, характеризующая частоту всей системы.
Подставим (22) в (20):

$$(-\hat{m}\omega^2+\hat{\kappa})\vec{A}e^{i\omega t}=0 \Rightarrow \qquad (23)$$

$$(\hat{\kappa}-\lambda\hat{m})\vec{A}=0, \text{ где } \lambda=\omega^2 \qquad (24)$$

Определим решение системы линейных однородных алгебраических уравнений (24):

Система (24) имеет решение в том случае (и только),

если $(\hat{\kappa}-\lambda\hat{m})=0$ - полином: (25)

$$\lambda^r+a_1\lambda^{r-1}+..+a_{r-1}\lambda+a_r=0. \qquad (26)$$

(25) и (26) являются характеристическими уравнениями для определенной неизвестной величины $\lambda$.

Корни характеристического уравнения определяют собственные частоты колебаний многомерных систем, т. е. для того, чтобы определить собственные частоты колебаний многомерных систем нужно установить корни характеристического уравнения.

Каждой собственной частоте колебаний многомерных систем соответствует частное решение ДУ колебаний многомерных систем.

**Пример**

Два шарика массой *m* движутся по гладкой горизонтальной прямой на пружинах жесткостью *k* и длины *l*, к ним приклеплены математические маятники также длины *l* и массы *m*. Получить уравнение Лагранжа, а также вычислить собственные частоты колебаний.

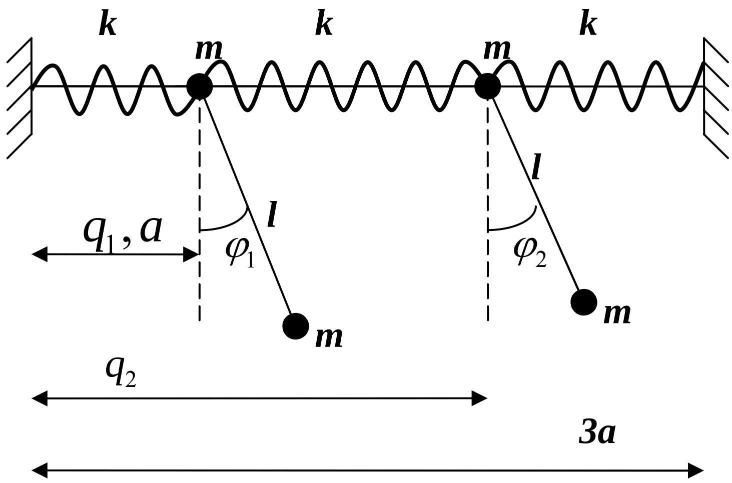
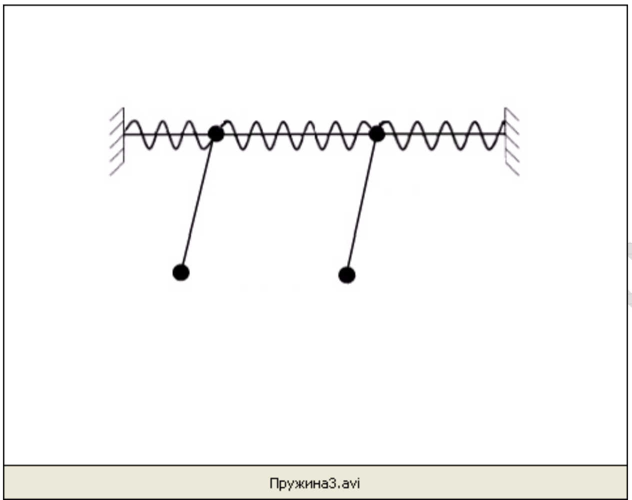
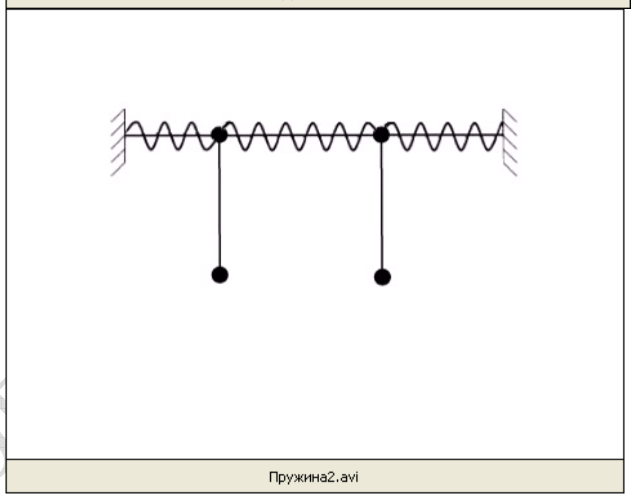



Рис.5




Система имеет четыре степени свободы ($s = 4$):

В качестве координат используем углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$ и координаты $q_1$ и $q_2$:

$$\vec{x} = (\varphi_1, \varphi_2, q_1, q_2);$$

$$x_1 = q_1; \qquad x_2 = q_2; \quad x_3 = q_1; \qquad x_4 = q_2;$$

$$x_1 = q_1; \qquad x_2 = q_1 + l\sin\varphi_1; \qquad x_3 = q_2;$$

$$y_1 = 0; \qquad y_2 = l\cos\varphi_1; \qquad y_3 = 0;$$

$$\dot{x}_1 = \dot{q}_1; \qquad \dot{x}_2 = \dot{q}_1 + l\cos\varphi_1\,\dot{\varphi}_1; \qquad \dot{x}_3 = \dot{q}_2;$$

$$\dot{y}_2 = -l\sin\varphi_1\,\dot{\varphi}_1;$$

$$x_4 = q_2 + l\sin\varphi_2; \qquad \dot{x}_4 = \dot{q}_2 + l\sin\varphi_2\,\dot{\varphi}_2;$$

$$y_4 = l\cos\varphi_2; \qquad \dot{y}_4 = -l\sin\varphi_2\,\dot{\varphi}_2.$$

Общий вид уравнение Лагранжа второго рода с 4-мя степенями свободы:

$$\boldsymbol{L=T-U=\tfrac{1}{2}(\dot{x}_1^2 m_{11} + \dot{x}_2^2 m_{22} + \dot{x}_3^2 m_{33} + \dot{x}_4^2 m_{44} + 2m_{12}\dot{x}_1\dot{x}_2 + 2m_{13}\dot{x}_1\dot{x}_3 + 2m_{23}\dot{x}_2\dot{x}_3 + 2m_{41}\dot{x}_1\dot{x}_4 + 2m_{42}\dot{x}_2\dot{x}_4 + 2m_{43}\dot{x}_4\dot{x}_3) - \tfrac{1}{2}(x_1^2 k_{11} + x_2^2 k_{22} + x_3^2 k_{33} + x_4^2 k_{44} + 2k_{12}\, x_1\, x_2 + 2k_{13}\, x_1\, x_3 + 2k_{23}\, x_2\, x_3 + 2k_{41}\, x_4\, x_1 + 2k_{43}\, x_4\, x_3 + 2k_{42}\, x_4\, x_2).}$$

Вычислим уравнение Лагранжа второго рода с 4-мя степенями свободы для данного случая.

Потенциальная сила системы равна:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + U_5;$$

$$U_1 = \frac{k(q_1 - a)^2}{2}; \quad U_2 = \frac{k(q_2 - q_1)^2}{2}; \quad U_3 = \frac{k(3a - q_2)^2}{2};$$

$$U_4 = -mgy_1 = -mgl\cos\varphi_1; \quad U_5 = -mgy_2 = -mgl\cos\varphi_2;$$

$$U = \frac{k}{2}(q_1 - a)^2 + \frac{k}{2}(q_2 - q_1)^2 + \frac{k}{2}(3a - q_2)^2 - mgl(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2) =$$

$$= \frac{k}{2}(q_1^2 - 2q_1 a + a^2 + q_1^2 + 2q_1 q_2 + q_1^2 + 9a^2 - 6aq_2 + q_2^2) - mgl + mgl(\frac{\varphi_1^2}{2}) + mgl(\frac{\varphi_2^2}{2}) =$$

$$= \frac{1}{2}(2q_1^2 k + 2q_2^2 k + 2kq_1 q_2 + 10a^2 k - 4mgl + mgl\varphi_1^2 + mgl\varphi_2^2).$$

Кинетическая сила системы имеет вид:

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2 + \dot{x}_4^2 + \dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2 + \dot{y}_3^2 + \dot{y}_4^2) \Rightarrow$$

$$T = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + l^2\cos^2\varphi_2\,\dot{\varphi}_2 + l^2\dot{\varphi}_1^2\,\sin 2\varphi_1 + l^2\dot{\varphi}_2^2\,\sin 2\varphi_2) =$$

$$= \frac{1}{2}(2m\dot{q}_1^2 + 2m\dot{q}_2^2 + l^2 m\dot{\varphi}_1^2 + l^2 m\dot{\varphi}_2^2 + 2ml\,\dot{q}_1\,\dot{\varphi}_1 - \frac{2ml\,\dot{q}_1\,\dot{\varphi}_1^2}{2} + 2ml\,\dot{q}_2\,\dot{\varphi}_2 + \frac{2ml\,\dot{q}_2\,\dot{\varphi}_2^2}{2}).$$

В результате получаем искомое уравнение Лагранжа:

$$L = T - U = \frac{1}{2}(2m\dot{q}_1^2 + 2m\dot{q}_2^2 + l^2 m\dot{\varphi}_1^2 + l^2 m\dot{\varphi}_2^2 + 2ml\,\dot{q}_1\,\dot{\varphi}_1 - \frac{2ml\,\dot{q}_1\,\dot{\varphi}_1^2}{2} + 2ml\,\dot{q}_2\,\dot{\varphi}_2 + \frac{2ml\,\dot{q}_2\,\dot{\varphi}_2^2}{2}) -$$

$$-\frac{1}{2}(2q_1^2 k + 2q_2^2 k + 2kq_1 q_2 + 10a^2 k - 4mgl + mgl\varphi_1^2 + mgl\varphi_2^2).$$

Для вычисления собственных частот запишем явный вид матриц k и m:

$$m = \begin{pmatrix} 2m & 0 & 2lm & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 2lm \\ 2lm & 0 & l^2m & 0 \\ 0 & 2lm & 0 & l^2m \end{pmatrix} \;;\; k = \begin{pmatrix} 2k & 2k & 0 & 0 \\ 2k & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mgl \end{pmatrix};$$

Используя условие $(k - \lambda m) = 0$ найдем собственные частоты колебаний:

$$\begin{pmatrix} 2k & 2k & 0 & 0 \\ 2k & 2k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mgl & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mgl \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 2m & 0 & 2lm & 0 \\ 0 & 2m & 0 & 2lm \\ 2lm & 0 & l^2m & 0 \\ 0 & 2lm & 0 & l^2m \end{pmatrix} = 0;$$

==>

$$\begin{pmatrix} 2k - 2\lambda m & 2k & -2\lambda m & 0 \\ 2k & 2k - 2\lambda m & 0 & -2\lambda m \\ -2\lambda m & 0 & -\lambda l^2 m + mgl & 0 \\ 0 & -2\lambda m & 0 & -\lambda l^2 m + mgl \end{pmatrix};$$

=>

$$4\lambda(2\lambda lm^2 - \lambda lm^2 + m^2gl)(\lambda^2(2lm^2 - l^2m^2) - 2kmgl + \lambda m(2kl^2 + mgl)) = 0.$$

В итоге собственные частоты равны:

$\lambda = 0;$

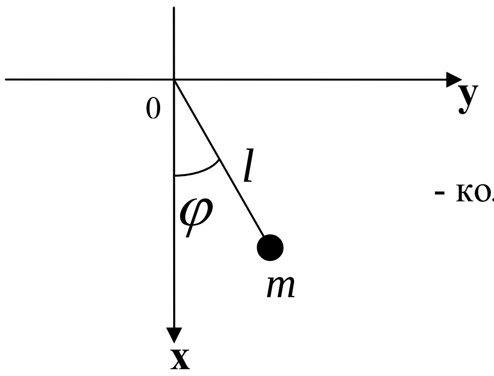
$$\lambda = \frac{m^2gl}{-2lm^2 + l^2m^2};$$

$$\lambda = \frac{-2kl^2m - m^2gl - \sqrt{4k^2l^4m^2 + 16gkl^2m^3 - 4gk^2l^3m^3 + m^3gl^2}}{2(2lm^2 - l^2m^2)};$$

$$\lambda = \frac{-2kl^2m - m^2gl + \sqrt{4k^2l^4m^2 + 16gkl^2m^3 - 4gk^2l^3m^3 + m^3gl^2}}{2(2lm^2 - l^2m^2)};$$

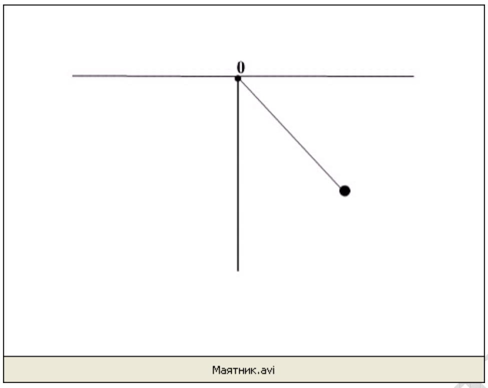
## 3 Колебания многомерных систем в линейном приближении

Пример:




- колебания математического маятника

Рис.6




$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi = L(\varphi, \dot{\varphi});$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\pi_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}};$$

$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} = \pi_\varphi$; $\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi$ - момент количества движения (не сохраняющиеся величина).

$\vec{F} = -\vec{\nabla} U(r)$; $U = -mgx$ ; $F = mg = -\frac{\partial U}{\partial x}$.

Уравнение движения:

$$ml^2 \ddot{\varphi} + mgl\sin\varphi = 0; \quad (27)$$

$$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0; \quad (28)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l}; \quad (29)$$

$$\pi_\varphi = ml^2 \dot{\varphi} \text{ - Лагранжев формализм,} \quad (30)$$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{\pi_\varphi}{ml^2}.$$

Гамильтонов формализм:

$$H = \pi_\varphi \dot{\varphi} - L = \frac{\pi_\varphi^2}{ml^2} - \left(\frac{m}{2} l^2 \frac{\pi_\varphi^2}{m^2 l^4} + mgl\cos\varphi\right) = \frac{\pi_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi. \qquad (31)$$

(31) - функция Гамильтона для математического маятника.

$$H(\varphi, \pi_\varphi) = \frac{\pi_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi, \qquad (32)$$

где $\frac{\pi_\varphi^2}{2ml^2}$ -кинетическая энергия вращательного движения,

$-mgl\cos\varphi$ - потенциальная энергия.

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \pi_\varphi} = \frac{\pi_\varphi}{ml^2}; \qquad (33)$$

$$\dot{\pi}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi. \qquad (34)$$

(34)- уравнение движения математического маятника в канонической форме.

$$ml^2 \ddot{\varphi} = -mgl\sin\varphi \;\; \Rightarrow \ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0; \qquad (35)$$

Лагранжев и Гамильтонов формализмы – это эквивалентные формы.

$$\frac{d\pi_\varphi}{dt} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0 \Rightarrow \frac{d\pi_\varphi}{dt} = -mgl\sin\varphi, \qquad (36)$$

т.е. $\frac{d\pi_\varphi}{dt} \neq 0$ - не является сохраняющейся величиной.

Если нужно проверить является ли величина сохраняющейся, то необходимо использовать уравнение:

$\frac{d\pi_\varphi}{dt} = \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial t} + \{\pi_\varphi, H\}$, где $\{\pi_\varphi, H\}$ - скобка Пуассона.

Будет ли $\{\pi_\varphi, H\}$=0:

$$\{\pi_\varphi, H\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial \pi_\varphi}{\partial \pi_\varphi} \\ \frac{\partial H}{\partial \varphi} & \frac{\partial H}{\partial \pi_\varphi} \end{pmatrix} = (-1) mgl\sin\varphi, \qquad (37)$$

$$\Rightarrow \{\pi_\varphi, H\} = (-1) mgl\sin\varphi \neq 0 \qquad (38)$$

- обобщенный импульс не является сохраняющейся величиной.

$\ddot{\varphi} + \omega^2 \varphi = 0$, - линейное ДУ II-ого порядка; (39)

$\ddot{\varphi} + \omega^2 \sin\varphi = 0$, - нелинейное ДУ II-ого порядка; (40)

$$\sin\varphi = \varphi + \frac{1}{3!}\varphi^3 - \frac{1}{5!}\varphi^5 + \ldots \qquad (41)$$

Переход от нелинейного ДУ к линейному может осуществиться, если ограничиться первым порядком разложения функции $\sin\varphi$ по малой величине угла $\varphi$. В результате получится линейное ДУ.

Нужно свойство линейности перенести на определение функции Лагранжа и функции Гамильтона:

$$\cos\varphi \approx 1-\frac{1}{2}\varphi^2+\dots, \tag{42}$$

$$L=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2+mgl(1-\frac{1}{2}\varphi^2)=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2-\frac{mgl}{2}\varphi^2+mgl, \tag{43}$$

($mgl=const$ - не влияет на уравнение движения $\Rightarrow L'=L+const$)

Функция Лагранжа определяется с точностью до const:

$$L=\frac{m}{2}l^2\dot{\varphi}^2-\frac{mgl}{2}\varphi^2, \tag{44}$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}\ ;\ \frac{\partial L}{\partial\varphi}=-mgl\varphi, \tag{45}$$

$$ml^2\ddot{\varphi}+mgl\sin\varphi=0 \quad /ml^2 \Rightarrow \tag{46}$$

$$\ddot{\varphi}+\omega^2\sin\varphi=0; \tag{47}$$

$\cos\varphi \approx -\frac{1}{2}\varphi^2$ - в функции Гамильтона. (48)

$$H(\varphi,\pi_\varphi)=\frac{\pi_\varphi^2}{2ml^2}-mgl\cos\varphi \Rightarrow H(\varphi,\pi_\varphi)=\frac{\pi_\varphi^2}{2ml^2}-\frac{mgl}{2}\varphi^2. \tag{49}$$

(49) - функция Гамильтона в линейном приближении.

$$E=\frac{\pi_\varphi^2}{2ml^2}-mgl\cos\varphi=T+U, \tag{50}$$

где $U=-mgl\cos\varphi$.

В линейном приближении:

$$E=\frac{\pi_\varphi^2}{2ml^2}+\frac{mgl}{2}\varphi^2=T+U', \tag{51}$$

где $U'=\frac{mgl}{2}\varphi^2$.

Положение устойчивого равновесия при $\varphi=0$.

При $\varphi=\pi$ положения устойчивого равновесия не будет.

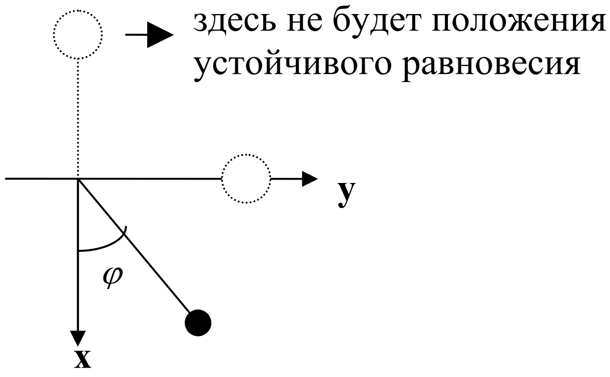



Рис.7

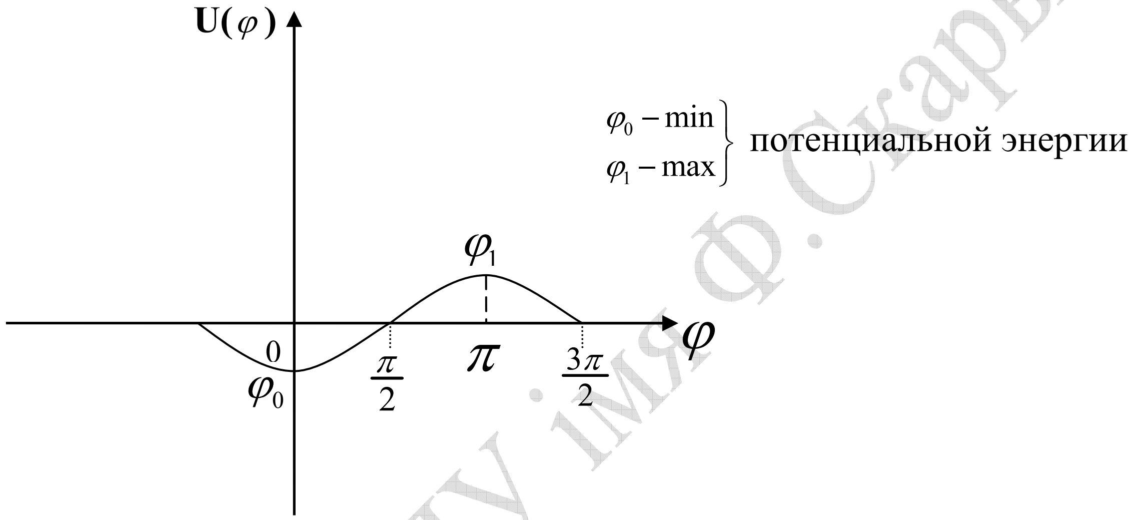



Рис.8

Для того, чтобы определить положения устойчивого равновесия, необходимо определить то обобщенное значение координат, где потенциальная энергия минимальна.

Для $\frac{\partial H(\varphi)}{\partial \varphi}=0$ найдем экстремум:

$$\sin\varphi = 0\,;\ \varphi = 0, \pi, 2\pi ... n\pi\ .$$

Положение устойчивого равновесия определяется минимумом потенциальной энергии относительно обобщенных координат. Это и будет положение устойчивого равновесия.

## 4 Лагранжев формализм колебаний многомерных систем

$L = T - U$;

$q_\alpha = x_\alpha + q_\alpha^{(0)}$ ($\alpha$=1,2..r). (52)

Рассмотрим в линейном приближении:

Пусть $\alpha$ принимает только одно значение:

$$q = x + q^{(0)}; \quad (53)$$

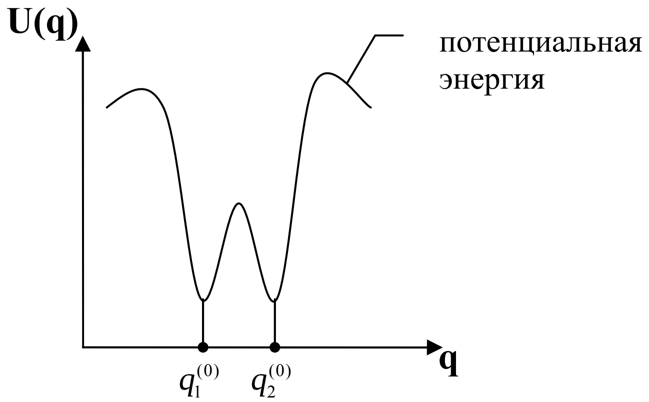


Рис.9

$$U(q) = U(x + q^{(0)}), \quad (54)$$

где $x$ – малая величина.

Разложим $U(x+q^{(0)})$ относительно $x$:

$$U(q) = U(x + q^{(0)}) = U(q^{(0)}) + x\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_{q=q^{(0)}} + \frac{1}{2!}x^2\left.\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right|_{q=q^{(0)}} + \ldots, \quad (55)$$

где $U(q^{(0)})$ и члены 2-ого и выше порядков не учитываются, так как это линейное приближение.

Потенциальная энергия физической системы в линейном приближении будет следующей:

$$U(q) = \frac{\kappa x^2}{2}, \quad (56)$$

где $x = q - q^{(0)}$.

В линейном приближении:

$L = T - U = \dfrac{m\dot{x}^2}{2} - \dfrac{\kappa x^2}{2}$ - функция Лагранжа осцилляторного типа; (57)

$$H = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{\kappa x^2}{2}, \quad (58)$$

где $x$ – отклонение от положения устойчивого равновесия.

## 5 Нормальные колебания

1) $\hat{m}\ddot{\vec{x}}+\hat{\kappa}\vec{x}=0$ – уравнение движения (59)

$$\vec{x}=\begin{pmatrix} x_1=q_1-q_1^{(0)} \\ x_2=q_2-q_2^{(0)} \\ .... \\ x_r=q_r-q_r^{(0)} \end{pmatrix}; \quad (60)$$

2) Решение уравнения в общем виде:

$$\vec{x}(t)=\sum_a d^{(a)}\vec{B}_a e^{i(\omega_\alpha t+\alpha_a)}, \quad (61)$$

где $\alpha_a$ - начальная фаза, задающиеся начальными условиями;

$$\Rightarrow \vec{x}(t)=\sum_a d^{(a)}\vec{x}_a(t). \quad (62)$$

В итоге уравнение (59) имеет следующий вид:

$$(-\hat{m}\omega_\alpha^2+\hat{\kappa})B_a e^{i(\omega_\alpha t+\alpha_a)}=0, \quad (63)$$

где $(-\hat{m}\omega_\alpha^2+\hat{\kappa})$ (64)

- характеристическое уравнение, находящее собственные частоты $\omega_\alpha$.

Если $\vec{B}_a e^{i(\omega_\alpha t+\alpha_a)}=\vec{x}_a(t)$ подставить в уравнение (59), то вместо одного ДУ получится система линейных однородных алгебраических уравнений.

Система имеет смысл только, если определитель $\left|-\hat{m}\omega_\alpha^2+\hat{\kappa}\right|=0$.

Этот определитель и есть характеристическое уравнение, с помощью которого находятся собственные частоты $\omega_\alpha$

$$\vec{B}_a=\begin{pmatrix} b_a^{(1)} \\ b_a^{(2)} \\ ... \\ b_a^{(r)} \end{pmatrix} \quad (65)$$

(65) - многомерный вектор, состоящий из постоянных, но неизвестных величин $b_a^{(i)}$

$d^{(a)}$-вектор из констант, определяется из начальных условий:

$\vec{x}(t=0)=\vec{c}_1=\alpha_a$;

$\dot{\vec{x}}(t=0)=\vec{c}_2=d_a$;

$$\vec{B}_b\hat{m}\omega_\alpha^2\vec{B}_a=\hat{\kappa}\vec{B}_a\vec{B}_b. \quad (66)$$

Так как $\hat{m}$ и $\hat{\kappa}$ - симметричные матрицы, то:

$\omega_\alpha^2\vec{B}_b\hat{m}\vec{B}_a=\vec{B}_a\hat{\kappa}\vec{B}_b$;

$$\times\vec{B}_a \left| \omega_b^2 \hat{m}\vec{B}_b = \hat{\kappa}\vec{B}_b \Rightarrow \omega_b^2 \vec{B}_a \hat{m}\vec{B}_b = \vec{B}_a \hat{\kappa}\vec{B}_b \right.;$$

$$(\omega_b^2 - \omega_\alpha^2)\vec{B}_a \hat{m}\vec{B}_b = \vec{B}_a \hat{\kappa}\vec{B}_b = 0: \qquad (67)$$

1) Если $\omega_b \neq \omega_\alpha \Rightarrow \vec{B}_a \hat{m}\vec{B}_b = 0$ - условие ортогональности; (68)

2) Если $\omega_b = \omega_\alpha \Rightarrow \vec{B}_a \hat{m}\vec{B}_b = N = 1$- условие ортонормированности. (69)

3) $\vec{B}_a \hat{m}\vec{B}_b = \delta_{ab}$; (70)

4) $(\hat{\kappa} - \hat{m}\omega_\alpha^2)\vec{B}_a = 0$. (71)

С помощью уравнений (70) и (71) определяются все элементы.

В итоге находится однозначное решение колебаний в многомерной системе:

$$\vec{x}(t) = \sum_a \vec{B}_a Q^{(a)}(t), \qquad (72)$$

где $Q^{(a)}(t) = d^{(a)} e^{i(\omega_a t + \alpha_a)}$ - нормальные координаты.

$$\hat{m}\sum_a \vec{B}_a \ddot{Q}^{(a)}(t) + \hat{\kappa}\sum_a \vec{B}_a Q^{(a)}(t) = 0;$$

$$\sum_a (\hat{m}\ddot{Q}^{(a)} + \hat{\kappa}Q^{(a)})\vec{B}_a = 0 \left| \times \vec{B}_b \right.;$$

$$\hat{m}\ddot{Q}^{(a)} + \hat{\kappa}Q^{(a)} = 0;$$

5)

$$\vec{B}_b(\hat{\kappa} - \hat{m}\omega_\alpha^2)\vec{B}_a = 0;$$

$$\vec{B}_b \hat{\kappa}\vec{B}_a = \omega_a^2 \vec{B}_b \hat{m}\vec{B}_a = \omega_a^2 \delta_{ab};$$

$\vec{B}_b \hat{\kappa}\vec{B}_a = \omega_a^2 \delta_{ab}$ - свертка с симметричной матрицей $\hat{\kappa}$. (73)

Представим уравнение (59) с помощью нормальных координат:

$$\ddot{\vec{x}} = \sum_a \vec{B}_a \ddot{Q}^{(a)}; \qquad (74)$$

$$\hat{m}\sum_a \vec{B}_a \ddot{Q}^{(a)} + \hat{\kappa}\sum_a \vec{B}_a Q^{(a)} = 0;$$

$$\sum_a (\hat{m}\ddot{Q}^{(a)} + \hat{\kappa}Q^{(a)})\vec{B}_a = 0 \left| \times \vec{B}_b \right.;$$

$$\sum_a (\vec{B}_b \hat{m}\vec{B}_a \ddot{Q}^{(a)} + \vec{B}_b \hat{\kappa}\vec{B}_a Q^{(a)}) = 0; \qquad (75)$$

6)

$$\sum_a (\delta_{ab}\ddot{Q}^{(a)} + \omega_a^2 \delta_{ab} Q^{(a)}) = 0;$$

$$\sum_a \delta_{ab}\ddot{Q}^{(a)} = \ddot{Q}^{(b)}; \ \sum_a \delta_{ab} Q^{(a)} = Q^{(b)};$$

7)

$$\ddot{Q}^{(b)}+\omega_a^2 Q^{(b)}=0\,. \qquad (76)$$

## 6 Определение функции Лагранжа и энергии с помощью нормальных координат

$$L=\frac{1}{2}\dot{\vec{x}}\,\hat{m}\,\dot{\vec{x}}-\frac{1}{2}\vec{x}\,\kappa\,\vec{x}=\frac{1}{2}\sum_b\Big(\vec{B}_b\,\dot{Q}^{(b)}\,\hat{m}\sum_a\vec{B}_a\,\dot{Q}^{(a)}-\sum_b\vec{B}_b\,Q^{(b)}\,\hat{\kappa}\sum_a\vec{B}_a\,Q^{(a)}\Big)=$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{a,b}\big(\delta_{ab}\,\dot{Q}^{(b)}\,\dot{Q}^{(a)}-\delta_{ab}\omega_a^2 Q^{(b)}Q^{(a)}\big)=\frac{1}{2}\sum_a\big((\dot{Q}^{(a)})^2-\omega_a^2(Q^{(a)})^2\big)\Rightarrow$$

$$L=\sum_a L_a\,, \qquad (77)$$

где $L_a=\frac{1}{2}((\dot{Q}^{(a)})^2-\omega_a^2(Q^{(a)})^2)$. (78)

(78) - каноническое представление функции Лагранжа через нормальные координаты.

9) $H=\sum\limits_a H_a$, (79)

где $H_a=\frac{1}{2}((\dot{Q}^{(a)})^2+\omega_a^2(Q^{(a)})^2)$. (80)

(80)- каноническое представление функции Гамильтона через нормальные координаты.

Моды колебаний – это колебания, характеризующие определенные собственные частоты многомерных колебаний, т. е. полная энергия многомерных колебаний равна сумме энергий моды колебаний.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_b}\right)-\frac{\partial L}{\partial Q_b}=0\,, \qquad (81)$$

Рассмотрим координаты, связанные определенными собственными частотами как обобщенные координаты:

$$\frac{\partial L}{\partial Q^{(b)}}=\sum_a\frac{\partial L_a}{\partial Q^{(b)}}=\sum_a\frac{1}{2}(-2\omega_a^2\delta_{ab}Q^{(a)})=-\omega_b^2 Q^{(b)}\,; \qquad (82)$$

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}^{(b)}}=\dot{Q}^{(b)}\,;$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{Q}_b}\right)-\frac{\partial L}{\partial Q_b}=0\Rightarrow\frac{d}{dt}Q^{(b)}+\omega_b^2 Q^{(b)}=0\,. \qquad (83)$$

Для описания многомерной системы, если спектральная частота известна, можно ограничиться рассмотрением только одной моды колебаний.

**Пример**

Определить собственные частоты малых колебаний двойного плоского маятника (рис. 10). Также проинтегрировать уравнение движения и определить нормальные координаты при условии, что длины и массы математических маятников одинаковы (рис. 11).

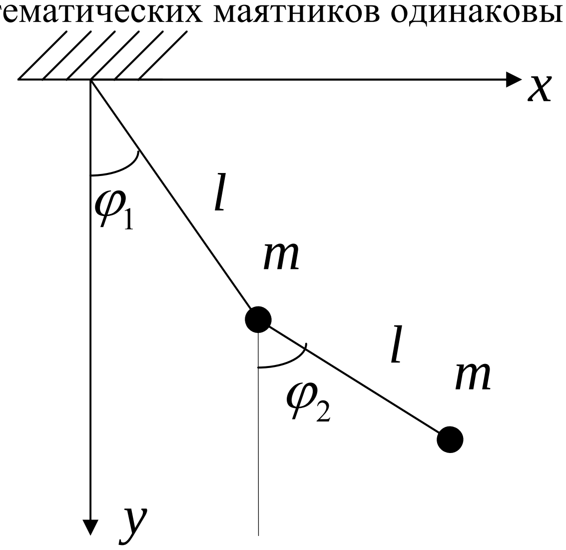



Рис.10

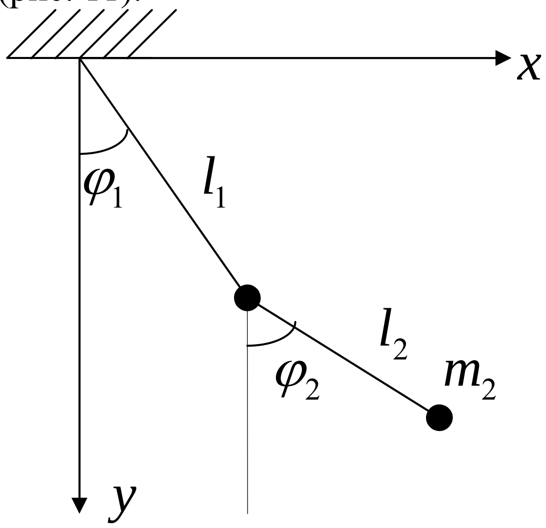
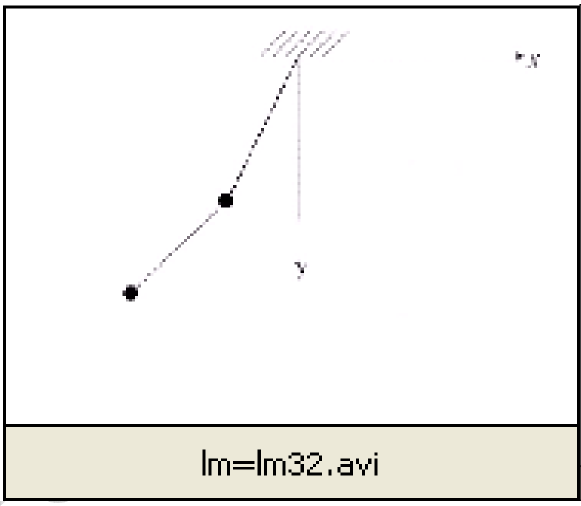
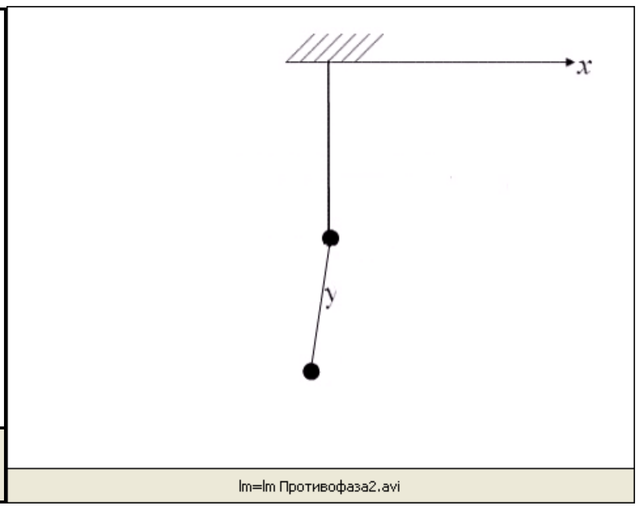
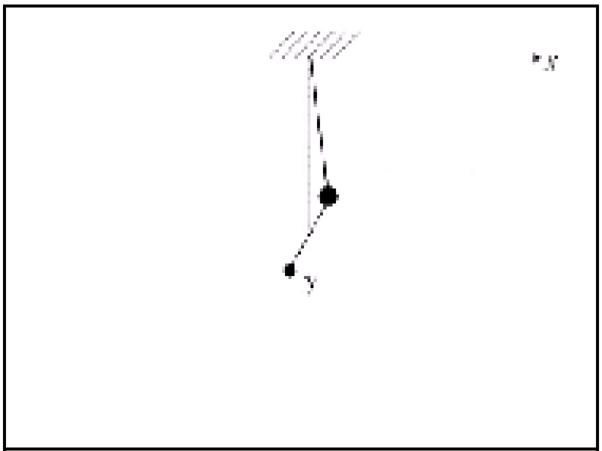



Рис.11





l1m1-l2m22.avi

**Решение.**

Система имеет две степени свободы, так как ее положение определяется двумя углами $\varphi_1$ и $\varphi_2$.

Найдем функцию Лагранжа двойного плоского маятника.

В качестве координат берем углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$, которые нити образуют с вертикалью.

Тогда для точки $m_1$ имеем:

$$T_1 = \frac{1}{2} m_1 l_1^2 \dot{\varphi}_1^2, \; U = -m_1 g l_1 \cos\varphi_1 .$$

Чтобы найти кинетическую энергию второй точки, выражаем её декартовой координаты $x_2$ и $y_2$ (начало координат в точке подвеса, ось $y$ - по вертикали вниз) через углы $\varphi_1$ и $\varphi_2$:

$$x_2 = l_1 \sin\varphi_1 + l_2 \sin\varphi_2 \; ; \; y_2 = l_1 \cos\varphi_1 + l_2 \cos\varphi_2 ;$$

$$T_2 = \frac{m_2}{2}(\dot{x}_2^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m_2}{2}\left[ l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + 2 l_1 l_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)\dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \right].$$

В результате функция Лагранжа имеет вид:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\varphi}_1 \dot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + (m_1 + m_2) g l_1 \cos\varphi_1 + m_2 g l_2 \cos\varphi_2 .$$

Для малых колебаний $(|\varphi_1| \ll 1, |\varphi_2| \ll 1)$ можно ограничиться членами степени не выше второй по $\varphi_1$ и $\varphi_2$:

$$L = \frac{m_1 + m_2}{2} l_1^2 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{m_2}{2} l_2^2 \dot{\varphi}_2^2 - (m_1 + m_2) g l_1 \frac{\varphi_1^2}{2} - m_2 g l_2 \frac{\varphi_2^2}{2} .$$

Уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_1} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_1} = 0, \frac{d}{dt}\left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}_2} \right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi_2} = 0$$

принимают вид:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)l_1\ddot{\varphi}_1+m_2l_2\ddot{\varphi}_2+(m_1+m_2)g\varphi_1=0;\\ l_1\ddot{\varphi}_1+l_2\ddot{\varphi}_2+g\varphi_2=0.\end{cases}$$

Подставляя в эту систему $\varphi_1=A_1e^{i\omega t},\varphi_2=A_2e^{i\omega t}$, получим:

$$\begin{cases}(m_1+m_2)(g-l_1\omega^2)A_1-\omega^2m_2l_2A_2=0;\\ -l_1\omega^2A_1+(g-l_2\omega^2)A_2=0.\end{cases}$$

Для того, чтобы существовало ненулевое решение, определитель этой системы должен равняться нулю. Полученное таким образом уравнение называется характеристическим и имеет вид:

$$m_1l_1l_2\omega^4-g(l_1+l_2)(m_1+m_2)\omega^2+g^2(m_1+m_2)=0\,.$$

Решения этого уравнения определяют частоты собственных колебаний:

$$\omega^2=\frac{g(l_1+l_2)(m_1+m_2)}{2l_1l_2m_1}\left[1\pm\sqrt{1-\frac{4l_1l_2m_1}{(l_1+l_2)^2(m_1+m_2)}}\right];$$

При $m_1\to\infty$: $\omega_1^2\cong\dfrac{g}{l_1},\omega_2^2\cong\dfrac{g}{l_2}$;

При $m_2\to\infty$: $\omega_1^2\cong\dfrac{g}{l_1+l_2},\omega_2^2\cong g\dfrac{(l_1+l_2)m_1}{l_1l_2m_2}\gg\omega_1^2$.

В случае $m_1=m_2=m$ и $l_1=l_2=l$ функция Лагранжа двойного математического маятника имеет вид:

$$L=ml^2(\dot{\varphi}_1^2+\frac{\dot{\varphi}_2^2}{2}+\cos(\varphi_1-\varphi_2)\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)+(mgl(2\cos\varphi_1+\cos\varphi_2)\,.$$

Считая колебания малыми, полагаем:

$$\cos\varphi_1\approx1-\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}\ ;\ \cos\varphi_2\approx1-\frac{\dot{\varphi}_2^2}{2};\ \cos(\varphi_1-\varphi_2)\approx1,$$

При этом:

$L=ml^2(\dot{\varphi}_1^2+\dfrac{\dot{\varphi}_2^2}{2}+\dot{\varphi}_1\dot{\varphi}_2)-mgl(\varphi_1^2+\dfrac{\varphi_2^2}{2})$, а уравнения Лагранжа:

$$\left.\begin{aligned}2\ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2+\frac{2g}{l}\varphi_1&=0;\\ \ddot{\varphi}_1+\ddot{\varphi}_2+\frac{g}{l}\varphi_2&=0.\end{aligned}\right\}\qquad(1)$$

Ищем частные решения системы (1) в виде:

$$\varphi_1=A_1e^{i\omega t},\varphi_2=A_2e^{i\omega t}\,.$$

Подставляя $\varphi_1$ и $\varphi_2$ в (1), получаем систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned}(\frac{2g}{l}-2\omega^2)A_1-\omega^2A_2&=0;\\ -\omega^2A_1+(\frac{g}{l}-\omega^2)A_2&=0.\end{aligned}\right\}$$

Характеристическое уравнение этой системы:

$$\begin{vmatrix} (\dfrac{2g}{l} - 2\omega^2 & -\omega^2 \\ -\omega^2 & \dfrac{g}{l} - \omega^2 \end{vmatrix} = 0 ,$$

Отсюда находим, что

$$\omega_{1,2}^2 = (2 \pm \sqrt{2})\frac{g}{l} .$$

Частным решением системы (1), соответствующим частоте $\omega_1$ является:

$$\varphi_1(\omega_1) = \Delta_{11}^{(1)} C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)} = C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)};$$

$$\varphi_2(\omega_1) = \Delta_{12}^{(1)} C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)} = -\sqrt{2} C_1 e^{i(\omega_1 t + \delta_1)}.$$

Вторым частным решением системы (1) будет:

$$\varphi_1(\omega_2) = \Delta_{21}^{(2)} C_2 e^{i(\omega_2 t + \varphi^{(2)})} = C_2 e^{i(\omega_2 t + \delta_2)};$$

$$\varphi_2(\omega_2) = \Delta_{22}^{(2)} C_1 e^{i(\omega_2 t + \varphi^{(2)})} = \sqrt{2} C_2 e^{i(\omega_2 t + \delta_2)}.$$

Общее решение системы (1) записывается в виде:

$$\varphi_1 = \mathrm{Re}\left[\varphi_1(\omega_1) + \varphi_1(\omega_2)\right] = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) + C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) ; \qquad (2)$$

$$\varphi_2 = \mathrm{Re}\left[\varphi_2(\omega_1) + \varphi_2(\omega_2)\right] = -\sqrt{2}(C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) - C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2)) . \qquad (3)$$

Из (2) и (3) видно, что

$$\theta_1 = \frac{1}{2}(\varphi_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2) = C_1 \cos(\omega_1 t + \delta_1) ;$$

$$\theta_2 = \frac{1}{2}(\varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\varphi_2) = C_2 \cos(\omega_2 t + \delta_2) -$$

являются нормальными координатами.