**РУКОВОДСТВО ДЛЯ ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАНЯТИЙ**

**ПО КУРСУ «ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**

**ПО ТЕМЕ**

# «ГАМИЛЬТОНОВ ФОРМАЛИЗМ»

# 1 УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА

При изучении общих вопросов механики кроме функции Лагранжа и обобщенных координат и скоростей удобно использовать функцию Гамильтона и обобщенные координаты и импульсы.

Получая функцию Гамильтона и уравнение Гамильтона используем принцип наименьшего действия:

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L\left(\dot{q}_\alpha, q_\alpha\right) dt.$$

$$\delta S = 0, \ , \quad \delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\pi_\alpha \dot{q}_\alpha - H\left(\pi_\alpha, q_\alpha\right)\right] dt,$$

$$\delta H = \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} \cdot \delta \pi_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \cdot \delta q_\alpha,$$

$$\delta S = \delta \int_{t_1}^{t_2} \left[\pi_\alpha \dot{q}_\alpha - H\left(\pi_\alpha, q_\alpha\right)\right] dt = \int_{t_1}^{t_2} \left[\delta \pi_\alpha \cdot \dot{q}_\alpha + \pi_\alpha \cdot \delta q_\alpha - \frac{\partial H}{\partial q_\alpha} \delta q_\alpha\right] dt =$$

$$= \left( \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\pi_\alpha \delta q_\alpha\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \dot{\pi}_\alpha \delta q_\alpha dt + \int_{t}^{t_2} \pi_\alpha \frac{d}{dt} \delta q_\alpha dt \right).$$

$$\sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} \pi_\alpha \delta \frac{dq_2}{dt} dt = \sum_\alpha \int_{t_1}^{t_2} \pi_\alpha \frac{d}{dt} \delta q_\alpha dt = -\sum \int_{t_2}^{t_1} \dot{\pi}_\alpha \delta q_\alpha dt =$$

$$= -\sum_{\alpha=1}^{r} \int_{t_2}^{t_1} \left[\delta \pi_\alpha \left(\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}\right) - \left(\dot{\pi}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) \delta q_\alpha\right] dt = 0.$$

$$\left[\delta \pi_\alpha \left(\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}\right) - \left(\dot{\pi}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial q_\alpha}\right) \delta q_\alpha\right] = 0,$$

$$\dot{q}_\alpha - \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} = 0,$$

$$\dot{\pi}_\alpha + \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} = 0,$$

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}, \qquad \dot{\pi}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

- уравнения Гамильтона.

Получим уравнение Гамильтона частицы, движущейся в центрально-симметричном поле, используя в качестве обобщенных координат полярные. Функции Гамильтона и Лагранжа имеют вид:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r} + r^2\dot{\varphi}^2\right) - u\left(r\right),$$

$$H = \frac{\pi_r^2}{2m} + \frac{\pi_\varphi^2}{2mr^2} + u\left(r\right).$$

Тогда уравнения движения в форме Гамильтона:

$$\dot{r} = \frac{\partial H}{\partial \pi_r} = \frac{\pi_r}{m},$$

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial \pi_\varphi} = \frac{\pi_\varphi}{mr^2},$$

$$\dot{\pi}_r = -\frac{\partial H}{\partial r} = \left(\frac{\pi_\varphi^2}{2m}\cdot\frac{2}{r^3}\right) - \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\pi_\varphi^2}{mr^3} - \frac{\partial u}{\partial r},$$

$$\dot{\pi}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = 0,$$

где $\dfrac{\pi_\varphi^2}{mr^3}$ - центробежная сила,

$\dfrac{\partial u}{\partial r}$ -радиальная сила.

Т.к. уравнения Гамильтона формально просты и симметричны, кроме того являются инвариантными относительно любых преобразований, то данные уравнения системы называются каноническими уравнениями.

Уравнения Гамильтона обладают следующим свойством: они сохраняют свой вид при таких преобразованиях переменных, которые уже не являются точечными. В этом заключается одно из существенных отличий уравнений Гамильтона от уравнения Лагранжа 2 рода. Уравнения Лагранжа сохраняют свой вид (ковариантны) при точечных преобразованиях переменных, тогда как уравнения Гамильтона допускают значительно более широкий класс преобразований – канонические преобразования.

# 2 СКОБКИ ПУАССОНА

*Определение:*

Если механическая система имеет r степеней свободы, в ней определяются обобщенные координаты $q_\alpha$ и импульсы $\pi_\alpha$ ,т.е. канонические переменные, то для изучения свойств механической системы можно ввести физические величины, которые будут зависеть от $q_\alpha$ и $\pi_\alpha$ :

$$F\left(q_\alpha,\pi_\alpha\right),\ G\left(q_\alpha,\pi_\alpha\right)$$

и для этих физических величин определяются скобки Пуассона:

$$\left\{F\left(q_\alpha,\pi_\alpha\right),G\left(q_\alpha,\pi_\alpha\right)\right\}=\sum_{\alpha=1}^{r}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\\ \dfrac{\partial G}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial G}{\partial \pi_\alpha}\end{vmatrix}=\sum_{\alpha=1}^{r}\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial G}{\partial \pi_\alpha}-\frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\right) \qquad (1)$$

Получим скобки Пуассона для декартовых компонент момента импульса $\vec{M}$ .

$$M_i=\left[\vec{r},\vec{p}\right]_i=e_{ijk}r_j p_k,$$

$$M_x=yp_z-zp_y=M_x(x,y,z,p_x,p_y,p_z),$$

$$M_y=zp_x-xp_z.$$

$$\left\{M_x,M_y\right\}=\sum_{\alpha=1}^{3}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial M_x}{\partial x_\alpha} & \dfrac{\partial M_x}{\partial p_\alpha}\\ \dfrac{\partial M_y}{\partial x_\alpha} & \dfrac{\partial M_y}{\partial p_\alpha}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial M_x}{\partial x} & \dfrac{\partial M_x}{\partial p_y}\\ \dfrac{\partial M_y}{\partial x} & \dfrac{\partial M_y}{\partial p_x}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial M_x}{\partial y} & \dfrac{\partial M_x}{\partial p_y}\\ \dfrac{\partial M_y}{\partial y} & \dfrac{\partial M_y}{\partial p_y}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial M_x}{\partial z} & \dfrac{\partial M_x}{\partial p_z}\\ \dfrac{\partial M_y}{\partial z} & \dfrac{\partial M_y}{\partial p_z}\end{vmatrix}=xp_y-yp_x,$$

$$\left\{M_x,M_y\right\}=M_z.$$

## 2.1 Свойства скобок Пуассона

Основные свойства скобок Пуассона следуют из определения (1).

1. Если функции в скобках поменять местами, то изменится знак скобки Пуассона:

$$\left\{F,G\right\}=-\left\{G,F\right\},$$

2. Скобки Пуассона от двух тождественных функций обращаются в ноль:

$$\left\{G,G\right\}=0,$$

**3.** Скобки Пуассона от константы и некоторой функции дают ноль:

$$\{F,C\} = -\{C,G\} = 0 \text{ , где } C = const,$$

**4.** Константа при функции в скобках Пуассона выносится за знак скобки:

$$\{CF,G\} = C\{F,G\},$$

**5.** Распределительное свойство: если одна из функций представляет собой сумму из двух функций, то скобка Пуассона превращается в сумму из двух скобок Пуассона:

$$\{F_1 + F_2, G\} = \{F_1, G\} + \{F_2, G\},$$

**6.** $\{F_1 \cdot F_2, G\} = F_1\{F_2, G\} + F_2\{F_1, G\},$

**7.** Частную производную по времени определяют:

$$\frac{d}{dt}\{F,G\} = \{\dot{F},G\} + \{F,\dot{G}\},$$

$$\frac{d}{dt}\sum\left(\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial G}{\partial \pi_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial \dot{\pi}_\alpha}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_\alpha}\right) =$$

$$= \sum\left(\frac{\partial \dot{F}}{\partial q_\alpha}\cdot\frac{\partial G}{\partial \pi_\alpha} + \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\cdot\frac{\partial \dot{G}}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial \dot{F}}{\partial \pi_\alpha}\cdot\frac{\partial G}{\partial q_\alpha} - \frac{\partial F}{\partial \pi_\alpha}\cdot\frac{\partial \dot{G}}{\partial q_\alpha}\right),$$

**8.** Тождество Якоби:

$$\{F,\{G,H\}\} + \{G,\{H,F\}\} + \{H,\{F,G\}\} \equiv 0. \qquad (2)$$

### 2.2 Фундаментальные скобки Пуассона. Теорема Пуассона

Если в качестве функций $F$ и $G$ выбрать обобщенные координаты и обобщенные импульсы, то получим фундаментальные скобки Пуассона:

$\beta, \gamma = 1, 2 \ldots r.$

**1.** $\{q_\beta, q_\gamma\} = 0,$

$$\{q_\beta, q_\gamma\} = \sum_{\alpha=1}^{r}\begin{vmatrix} \dfrac{\partial q_\beta}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial q_\beta}{\partial \pi_\alpha} \\ \dfrac{\partial q_\gamma}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial q_\gamma}{\partial \pi_\alpha} \end{vmatrix} = 0, \text{ где } \frac{\partial q_\beta}{\partial q_\alpha} = \delta_{\beta\alpha}, \frac{\partial q_\gamma}{\partial q_\alpha} = \delta_{\gamma\alpha}.$$

**2.** $\{\pi_\beta, \pi_\gamma\} = 0.$

$$\mathbf{3.}\qquad \left\{q_\beta,\pi_\gamma\right\}=\sum_{\alpha=1}^{r}\begin{vmatrix}\dfrac{\partial q_\beta}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial q_\beta}{\partial \pi_\alpha}\\ \dfrac{\partial \pi_\gamma}{\partial q_\alpha} & \dfrac{\partial \pi_\gamma}{\partial \pi_\alpha}\end{vmatrix}=\sum_{\alpha=1}^{r}\delta_{\beta\alpha}\delta_{\gamma\alpha}=\delta_{\beta\gamma}.$$

Если обобщенные координаты и обобщенные импульсы удовлетворяют соотношениям, с помощью которых определяются фундаментальные скобки, то такие переменные называются *каноническими* относительно друг друга.

Теорема Пуассона:

Если функции $F,G$ являются интегралами движения тождества Якоби (2) и $\{H,F\}=0$, то составленная скобка Пуассона является интегралом движения:

$$\{F,G\}=const.$$

Доказательство:

Докажем $\{F,G\}=const$. Пусть функции $F,G$ не зависят от времени явно.

$F(p,q)$ и $G(p,q)$ это значит, что $\{H,F\}=0,\ \{H,G\}=0$. Используем (2). Пусть $h=H$, т.к. $F,G$ интегралы движения, то первая и последняя скобки дают ноль с учетом свойств скобок Пуассона:

$$\{H,\{F,G\}\}=0.$$

Согласно $\{H,F\}=0$, то $\{F,G\}=const.$

Из теоремы Пуассона не всегда можно получить интегралы движения, число интегралов движения ограничено $u=2\overline{r}-1$.

# 3 КАНОНИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Канонические уравнения — это система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Поэтому начальные данные для нее задаются только на неизвестные функции.

Перейдем к новым каноническим переменным, но т.о., чтобы форма уравнений движений не изменилась, т.е.

$$q_\alpha, \pi_\alpha \to Q_\alpha, \rho_\alpha.$$

Точечные преобразования:

$$Q_\alpha = Q_\alpha\left(q_\alpha, \pi_\alpha\right).$$

В Гамильтоновом формализме допускается более широкий класс преобразований, это связано равноправием независимых величин $q, \pi$, данные преобразования включают $2s'$ независимых переменных.

$$\rho_\alpha = \rho_\alpha\left(q_\alpha, \pi_\alpha\right),$$

$$\left\{q_\alpha, \pi_\alpha\right\} = \delta_{\alpha\beta},$$

$$\left\{q_\alpha, q_\beta\right\} = \left\{\pi_\alpha, \pi_\beta\right\} = 0.$$

Получим условия, которым должны удовлетворять преобразование, чтобы уравнение движения в новых переменных имело вид:

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial N}{\partial \rho_\alpha},$$

$$\dot{\rho}_\alpha = -\frac{\partial N}{\partial Q_\alpha},$$ где $N\left(Q_\alpha, \rho_\alpha, t\right)$ - новая функция Гамильтона.

Воспользуемся принципом наименьшего действия для новых и старых переменных:

$$\delta S = 0,$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left[\sum_{\alpha=1}^{r} \dot{Q}_\alpha \rho_\alpha - N\left(Q_\alpha, \rho_\alpha, t\right)\right] dt = 0,$$

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \delta\left[\sum_{\alpha=1}^{r} \dot{q}_\alpha \pi_\alpha - H\left(q_\alpha, \pi_\alpha, t\right)\right] dt = 0.$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta\left[\sum_{\alpha=1}^{r} \dot{q}_\alpha \pi_\alpha - H\left(q_\alpha, \pi_\alpha, t\right)\right] dt - \int_{t_1}^{t_2} \delta\left[\sum_{\alpha=1}^{r} \dot{Q}_\alpha \rho_\alpha - N\left(Q_\alpha, \rho_\alpha, t\right)\right] dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\delta F\left(q_\alpha, Q_\alpha, \pi_\alpha, \rho_\alpha\right) dt}{dt},$$

где F- произвольная функция.

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\delta F\left(q_\alpha,Q_\alpha,\pi_\alpha,\rho_\alpha\right)dt=\delta F\left(q_\alpha,Q_\alpha,\pi_\alpha,\rho_\alpha\right)\Big|_{t=t_\alpha}-\delta F\left(q_\alpha,Q_\alpha,\pi_\alpha,\rho_\alpha\right)\Big|_{t=t_1}=$$

$$=\sum_{\alpha=1}^{r}\left[\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\ldots\right]\Big|_{t_2}-\sum_{\alpha=1}^{r}\left[\frac{\partial F}{\partial q_\alpha}\delta q_\alpha+\ldots\right]\Big|_{t_1}=0,$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot q_\alpha\pi_\alpha-H\left(q_\alpha,\pi_\alpha,t\right)\right]-\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot Q_\alpha\rho_\alpha-N\left(Q_\alpha,\rho_\alpha,t\right)\right]=\frac{dF\left(q_\alpha,Q_\alpha,\pi_\alpha,\rho_\alpha\right)dt}{dt}.$$

Всякое каноническое преобразование характеризуется производящей функцией:

$F_1\left(q_\alpha,Q_\alpha,t\right)$

$F_2\left(q_\alpha,\rho_\alpha,t\right)$

$F_3\left(\pi_\alpha,Q_\alpha,t\right)$ Производящие функции

$F_4\left(\pi_\alpha,\rho_\alpha,t\right)$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot q_\alpha\pi_\alpha-H\left(q_\alpha,\pi_\alpha,t\right)\right]-\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot Q_\alpha\rho_\alpha-N\left(Q_\alpha,\rho_\alpha,t\right)\right]=$$

$$=\frac{dF_1}{dt}+\sum_{\alpha=1}^{r}\left[\frac{\partial F_1}{\partial q_\alpha}\cdot\dot q_\alpha+\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha}\cdot\dot Q_\alpha\right].$$

В результате получили связь между старыми и новыми переменными, а также получили выражение для новой функции Гамильтона:

$$\pi_\alpha=\frac{\partial F_1\left(q_\alpha,Q_\alpha,t\right)}{\partial q_\alpha},\ \rho_\alpha=-\frac{\partial F_1}{\partial Q_\alpha},\ N-H=\frac{\partial F_1}{\partial t}$$

$F\left(q_\alpha,Q_\alpha,t\right)$- эта функция называется *производящей функцией* канонического преобразования. Задавая различные производящие функции, можно получать различные канонические преобразования.

Для того чтобы перейти к другим производящим функциям воспользуемся преобразованиями Лежандра.

Для $F_2\left(q_\alpha,\rho_\alpha,t\right)=F_1\left(q_\alpha,\rho_\alpha,t\right)\pm\sum\rho_\alpha Q_\alpha$,

$$\frac{\partial F_2}{\partial Q_\alpha}=0,\ \frac{\partial F_1\left(q,Q,t\right)}{\partial Q_\alpha}=-\rho_\alpha,$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot{q}_\alpha\pi_\alpha - H\right]-\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot{Q}_\alpha\rho_\alpha - N\right]=\frac{d}{dt}\left[F_\alpha\left(q,\rho t\right)-\sum_\alpha \rho_\alpha Q_\alpha\right]=$$

$$=\frac{\partial F_2}{\partial t}+\sum_\alpha\left[\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}\dot{q}_\alpha+\frac{\partial F_2}{\partial \rho_\alpha}\dot{\rho}_\alpha-\dot{\rho}_\alpha Q_\alpha-\rho_\alpha\dot{Q}_\alpha\right].$$

Тогда формулы устанавливают связь между переменными и имеют вид:

$$N-H=\frac{\partial F_2}{\partial t},\ \pi_\alpha=\frac{\partial F_2}{\partial q_\alpha}\ ,\ Q=\frac{\partial F_2}{\partial \rho_\alpha}.$$

Для $F_3\left(\pi,Q,t\right)=F_1\left(\pi,Q,t\right)\pm\sum q_\alpha\pi_\alpha,$

$$\frac{\partial F_n}{\partial q}=0,\ \ \frac{\partial F_1}{\partial q}=\pi_\alpha,$$

$$F_1=F_3\left(\pi,Q,t\right)+\sum_\alpha \pi_\alpha q_\alpha,$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot{q}_\alpha\pi_\alpha - H\right]-\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot{Q}_\alpha\rho_\alpha - N\right]=\frac{d}{dt}\left[F_3\left(\pi,Q,t\right)+\sum_\alpha \pi_\alpha q_\alpha\right]=$$

$$=\frac{\partial F_3}{\partial t}+\sum_\alpha\left[\frac{\partial F_3}{\partial \pi_\alpha}\dot{\pi}_\alpha+\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha}\dot{Q}_\alpha+\dot{\pi}_\alpha q_\alpha+\pi_\alpha\dot{q}_\alpha\right].$$

$$N-H=\frac{\partial F_3}{\partial t},\ \rho_\alpha=-\frac{\partial F_3}{\partial Q_\alpha},\ q_\alpha=-\frac{\partial F_3}{\partial \pi_\alpha}.$$

Для $F_4\left(\pi,\rho,t\right)=F_1\left(q,Q,t\right)\pm\sum_\alpha \pi_\alpha q_\alpha\pm\rho_\alpha Q_\alpha,$

$$\frac{\partial F_4}{\partial q}=0,\qquad \frac{\partial F_1}{\partial q}=\pi,$$

$$\frac{\partial F_4}{\partial Q}=0,\qquad \frac{\partial F}{\partial Q}=-\rho_\alpha,$$

$$F_1=F_4\left(\pi,\rho,t\right)-\sum_\alpha \rho_\alpha Q_\alpha+\sum_\alpha \pi_\alpha q_\alpha,$$

$$\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot{q}_\alpha\pi_\alpha - H\right]-\left[\sum_{\alpha=1}^{r}\dot{Q}_\alpha\rho_\alpha - N\right]=\frac{d}{dt}\left[F_4\left(\pi,\rho,t\right)+\sum_\alpha \pi_\alpha q_\alpha-\sum\rho_\alpha Q_\alpha\right]=$$

$$=\frac{\partial F_4}{\partial t}+\sum_\alpha\left[\frac{\partial F_4}{\partial \pi_\alpha}\dot{\pi}_\alpha+\frac{\partial F_4}{\partial \rho_\alpha}\dot{\rho}_\alpha+\dot{\pi}_\alpha q_\alpha+\dot{q}_\alpha\pi_\alpha-\dot{\rho}_\alpha Q_\alpha-\rho_\alpha\dot{Q}_\alpha\right].$$

$$N-H=\frac{\partial F_4}{\partial t}\ ,\ q_\alpha=-\frac{\partial F_4}{\partial \pi_\alpha}\ ,\ Q_\alpha=\frac{\partial F_4}{\partial \rho_\alpha}\ ,\ \dot{q}_\alpha=\frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}\ ,\ \dot{\pi}_\alpha=-\frac{\partial H}{\partial q_\alpha}.$$

Пример:

$$F_1 = \sum_\beta q_\beta Q_\beta\,,\ \pi_\alpha = Q_\alpha\ ,\ \rho_\alpha = -q_\alpha\ ,$$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \rho_\alpha} = \dot{\pi}_\alpha\,,$$

$$\dot{\rho}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial Q_\alpha} = -\dot{q}_\alpha\,.$$

# 4 УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА-ЯКОБИ

Теория канонических преобразований используется для получения еще одного метода интегрирования уравнений механики.

Идею Гамильтона, заключающую в установлении родства между общим решением канонической системы дифференциальных уравнений и решением двух уравнений в частных производных первого порядка, начал развивать Якоби, т.е. создал метод интегрирования канонической системы уравнений, показав, что если известно решение (именно, полный интеграл) одного уравнения в частных производных первого порядка, то общее решение канонической системы находится дифференцированием полного интеграла по обобщенным координатам и по каноническим постоянным. Так возник метод интегрирования канонических уравнений, позволяющий найти общее решение в удобной форме при одном лишь условии: уравнение в частных производных должно допускать разделение переменных.

Уравнение Гамильтона-Якоби – уравнение движения механической системы, в котором основную роль играет функция действия.

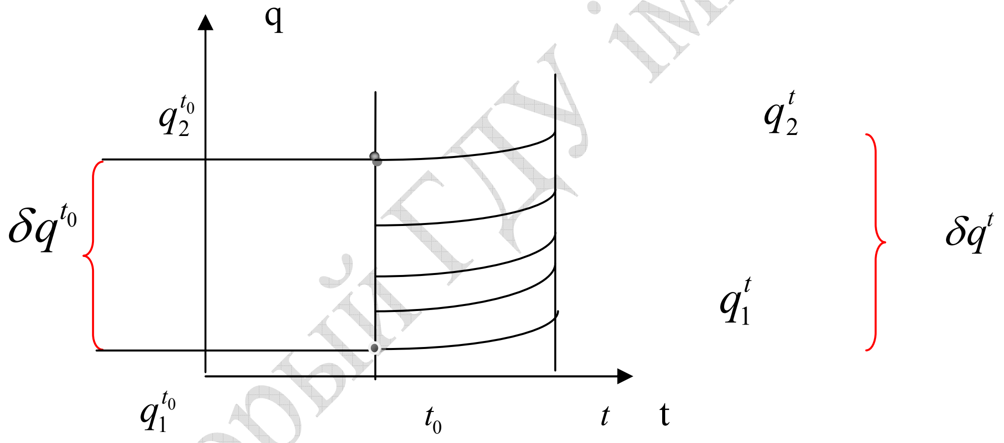


Рисунок 1.

Функция действия:

$$S = \int_{t_0}^{t} L(q^{t'}, \dot{q}^{t'})dt' = S(q^{t_0}, t_0; q^t, t).$$

**1)** $\dfrac{ds}{dt} = L\left(q^t, \dot{q}^t\right).$

**2)** $\dfrac{ds}{dt} = \dfrac{\partial S}{\partial t} + \sum\limits_{\alpha=1}^{r} \dfrac{\partial S}{\partial q_\alpha^t} \cdot \dfrac{dq_\alpha^t}{\partial t}.$

**3)** $$\delta S = \int_{t_0}^{t} \delta L dt' = \int_{t_0}^{t} \sum_{\alpha} \left[ \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{t'}} \cdot \delta q_\alpha^{t'} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha^{t'}} \cdot \frac{d}{dt} \delta q_\alpha^{t'} \right] dt, \qquad (3)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha^{t'}}\cdot\frac{d}{dt'}\right)=\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha^{t'}}\cdot\delta q_\alpha^{t'}+\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha^{t'}}\right)\delta q_\alpha^{t'},$$

Тогда формула (3) принимает вид:

$$\int_{t_0}^{t}\sum_\alpha\left[\left(\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{t'}}-\frac{d}{dt'}\cdot\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha^{t}}\right)\delta q_\alpha^{t'}+\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha^{t'}}\cdot\frac{d}{dt}\right)\right]dt'.$$

Здесь граничные условия $\neq 0$, но при этом считаем, что все траектории движения механической системы действительные и они отличаются друг от друга заданием начальных условий $\Rightarrow$

$$\delta S=\int_{t_0}^{t}\sum_\alpha\frac{d}{dt'}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q_\alpha^{t'}}\cdot\delta q_\alpha^{t'}\right)dt'=\sum_\alpha\int_{t_0}^{t}\frac{d}{dt'}\left(\pi_\alpha^{t'}\cdot\delta q_\alpha^{t'}\right)dt'=\sum_\alpha\left(\pi_\alpha^{t}\delta q_\alpha^{t}-\pi_\alpha^{t_0}\delta q_\alpha^{t_0}\right).$$

С другой стороны:

**4)** $\delta S=\sum_\alpha\left[\left(\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^{t_0}}\delta q_\alpha^{t_0}+\frac{\partial S}{\partial q_\alpha^{t}}\delta q_\alpha^{t}\right)\right]$

Вывод: из сравнения отношений 4) и 3)

$$\frac{\delta S}{\partial q_\alpha^{t}}=\pi_\alpha^{t},\ \frac{\delta S}{\partial q_\alpha^{t_0}}=-\pi_\alpha^{t}.$$

Пример.

Рассмотрим однородный диск, вращающий вокруг своей оси.

$L=\frac{I}{2}\dot\varphi^2$, где $I$ - момент инерции, $\dot\varphi$ - угловая скорость.

$$\pi_\varphi=\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi}=I\dot\varphi,\quad \pi_\varphi^{t}=\pi_\varphi^{t_0}.$$

$$S=\frac{I}{2}\int_{t_0}^{t}\left(\frac{d\varphi^{t'}}{dt'}\right)^2dt'.$$

$\frac{d\varphi^t}{dt'}=\frac{\pi_\varphi}{I}$, $\varphi^t=\frac{\pi_\varphi}{I}\left(t-t_0\right)+\varphi^{t_0}$ - решение.

$$\varphi^t-\varphi^{t_0}=\frac{\pi_\varphi}{I}\left(t-t_0\right).$$

$$S=\frac{I}{2}\int_{t_0}^{t}\dot\varphi^{t'}\cdot\varphi^{t'}dt'=\frac{I\pi_\varphi^{t_0}}{2I}\int_{t_0}^{t}\frac{d\varphi^{t'}}{dt'}dt'=\frac{I\pi_\varphi^{t_0}}{2I}\left(\varphi^t-\varphi^{t_0}\right)=\frac{I}{2}\frac{\left(\varphi^t-\varphi^{t_0}\right)^2}{t-t_0},$$

$$\frac{\pi_\varphi^{t_0}}{2I}=\frac{\left(\varphi^t-\varphi^{t_0}\right)^2}{t-t_0}.$$

Функция действия будет иметь вид:

$$S\left(\varphi^{t_0}, t_0; \varphi^{t}, t\right) = \frac{I}{2}\frac{\left(\varphi^{t} - \varphi^{t_0}\right)^2}{t - t_0},$$

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi^{t}} = I\,\frac{\varphi^{t} - \varphi^{t_0}}{t - t_0} = \pi^{t}_{\varphi}\ ,\ \frac{\partial S}{\partial \varphi^{t_0}} = -I\,\frac{\varphi^{t} - \varphi^{t_0}}{t - t_0} = \pi^{t_0}_{\varphi}\ .$$

**5)** Чтобы получить уравнение движения из 1) и 2) $\Rightarrow$, что $\dfrac{\partial S}{\partial t} = L$ и

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum_{\alpha} \pi^{t}_{\alpha} \cdot \dot{q}^{t}_{\alpha}\ .$$

$$H\left(q^{t}_{\alpha}, \pi^{t}_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha} \pi^{t}_{\alpha} \cdot q^{t}_{\alpha} - L \Rightarrow$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H\left(q^{t}_{\alpha}, \pi^{t}_{\alpha}\right).$$

$\dfrac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_{\alpha}, \dfrac{\partial S}{\partial q_{\alpha}}\right) = 0$ - Уравнение Гамильтона-Якоби.

Процедура перехода от Лагранжева формализма к формализму Гамильтона, в рамках которого, определяется уравнения Гамильтона-Якоби, если $L(q_{\alpha}, q_{\alpha}, t)$- функция Лагранжа, то для того, чтобы перейти к Гамильтонову формализму, нужно,

**1)** определить обобщенный импульс $\pi_{\alpha} = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\alpha}}$,

**2)** из 1) выразить $\dot{q}_{\alpha}$ через $\pi_{\alpha}$,

**3)** с помощью преобразований Лежандра перейти

$$H\left(\pi_{\alpha}, q_{\alpha}\right) = \sum_{\alpha} \pi_{\alpha} \cdot \dot{q}_{\alpha} - L\left(\dot{q}_{\alpha}, q_{\alpha}\right)$$

Т.е. от независимых переменных $\dot{q}_{\alpha}, q_{\alpha}$ перейти к независимым переменным $\pi_{\alpha}, q_{\alpha}$. С помощью $\pi_{\alpha}, q_{\alpha}$ определить функцию Гамильтона.

**4)** для получения уравнения Гамильтона-Якоби необходимо в функции Гамильтона обобщенный импульс заменить на частную производную $\pi_{\alpha} = \dfrac{\partial S}{\partial q_{\alpha}}$ и прибавить частную производную от функции действия.

В случае, когда рассматривается движение частицы в потенциальном поле, т.е. когда потенциальная энергия зависит только от координат, функцию действия можно представить:

$$S = -\left(Et\right) + W\left(q_{\alpha}\right).$$

Т.е. в функции действия можно осуществить разделение переменных:

$-E + H\left( q_\alpha, \frac{\partial W(q_\alpha)}{\partial q_\alpha} \right) = 0$ - уравнение Гамильтона-Якоби, для механически стационарной системы.

Функцию действия с точки зрения канонических преобразований можно рассмотреть как производящую функцию

$$\rho_\alpha, Q_\alpha \to \pi_\alpha, q_\alpha,$$

$$\dot{Q}_\alpha = \frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \rho_\alpha} \qquad \dot{\rho}_\alpha = -\frac{\partial \mathrm{N}}{\partial \rho_\alpha},$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$q_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha} \qquad \dot{\pi}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

$$\mathrm{N} - H = \frac{\partial F}{\partial t}.$$

В качестве производящей функции можно выбирать функцию действия и с помощью этой функции определить канонические преобразования, что упрощает решение о движении механической системы.

На ряду с уравнениями Лагранжа и каноническими уравнениями, которые являются обычными дифференциальными уравнениями, уравнение Гамильтона-Якоби является основой общего метода интегрирования уравнений движения.

# 5 ТЕОРЕМА ЛИУВИЛЛЯ

Для наглядного геометрического изображения решений канонических уравнений:

$$\dot{q}_\alpha = \frac{\partial H}{\partial \pi_\alpha}, \qquad \dot{\pi}_\alpha = -\frac{\partial H}{\partial q_\alpha},$$

где $H = H\left(q_\alpha, \pi_\alpha, t\right)$ - функция Гамильтона,

вводится понятие *фазового пространства.* Фазовое пространство — это абстрактное пространство $2s$ измерений, на координатных осях которого откладываются обобщенные координаты и обобщенные импульсы. Система координат в фазовом пространстве считается декартовой системой координат. Решение канонических уравнений дает 2s функций $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$. В каждый момент времени эти функции определяют в фазовом пространстве одну точку. Эта точка называется *изображающей точкой* и полностью определяет состояние механической системы. С течением времени значения функций $q_\alpha(t), p_\alpha(t)$ изменяются и изображающая точка перемещается, но фазовому пространству, описывая кривую, которая называется *фазовой траекторией.* Движение механической системы с любым конечным числом степеней свободы всегда изображается в фазовом пространстве как траектория изображающей точки. От размерности механической системы зависит только размерность фазового пространства.

Теорема:

Совокупность точек пространства, характеризующих состояние механической системы, образует объем, который является инвариантом при движении механической системы, т.е. плотность точек не меняется (идеальная жидкость).

$$q_\alpha^t, q_\alpha^{t_0}, \pi_\alpha^t, \pi_\alpha^{t_0},$$

$$x_\alpha^t, x_\alpha^{t_0}, \qquad \alpha = 1, 2, ..., 2r.$$

Объем точек фазового пространства:

$$\tilde{A}^{(t_0)} = \int dx_1^{t_0} dx_2^{t_0} ... dx_{2r}^{t_0},$$

$$\tilde{A}^{(t)} = \int dx_1^t dx_2^t ... dx_{2r}^t,$$

$$\tilde{A}^{(t_0)} = \tilde{A}^{(t)}.$$

$$\tilde{A}^{(t)} = \int dx_{1}^{t}, \ldots$$

$$dx_{2r}^{t} = \int \left| \frac{\partial x_{\alpha}^{t}}{\partial x_{\beta}^{t_0}} \right| dx_{1}^{t_0} \ldots d_{2r}^{t_0}.$$

Доказательство:

Докажем теорему на примере. Рассмотрим механическую систему с 1 степенью свободы.

$\dfrac{\partial x_{\alpha}^{t}}{\partial x_{\beta}^{t_0}}$ - определитель перехода (Якобиан) от переменных $x_{\alpha}^{t_0}$ к $x_{\alpha}^{t}$ для случая одномерной системы.

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial x_1^t}{\partial x_1^{t_0}} & \dfrac{\partial x_2^t}{\partial x_1^{t_0}} \\ \dfrac{\partial x_2^t}{\partial x_1^{t_0}} & \dfrac{\partial x_2^t}{\partial x_2^{t_0}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{\partial \dot{x}_1^{t_0}}{\partial x_1^{t_0}} \Delta t & \dfrac{\partial \dot{x}_1^{t_0}}{\partial x_1^{t_0}} \Delta t \\ \dfrac{\partial \dot{x}_2^{t_0}}{\partial x_1^{t_0}} \Delta t & 1 + \dfrac{\partial \dot{x}_2^{t_0}}{\partial x_2^{t_0}} \Delta t \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Пусть $t = t_0 + \Delta t$ тогда $x_1^t = x_1^{t_0 + \Delta t} = x_1^{t_0} x_1^{\Delta t} = x_1^{t_0} = \dfrac{\partial x_1^t}{\partial x} \Big|_{t=t_0} \Delta t.$

$$x_{\alpha}^{t} = x_{\alpha}^{t_0 + \Delta t} = x_{\alpha}^{t_0} + \dot{x}_{\alpha} \Big|_{t=t_0} \Delta t,$$

$$\frac{\partial x_1^t}{\partial x_2^{t_0}} = \frac{\partial \dot{x}_1^{t_0}}{\partial x_1^{t_0}} \Delta t,$$

Т.к. при разложении обобщенных координатах по времени t мы ограничились первым порядком $\Delta t$ ,то и при вычислении определителя мы должны ограничиться первым порядком. Тогда формула (3) имеет вид:

$$1 + \left( \frac{\partial \dot{x}_1^{t_0}}{\partial x_1^{t_0}} \Delta t + \frac{\partial \dot{x}_2^{t_0}}{\partial x_2^{t_0}} \Delta t \right) = 1.$$

Теорема Лиувилля применяется для обоснования функции распределения в статистической физике.

# 6 ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

## 6.1 Уравнения Гамильтона

*Задача 1.*
Получить уравнение Гамильтона для математического маятника.

*Решение:*

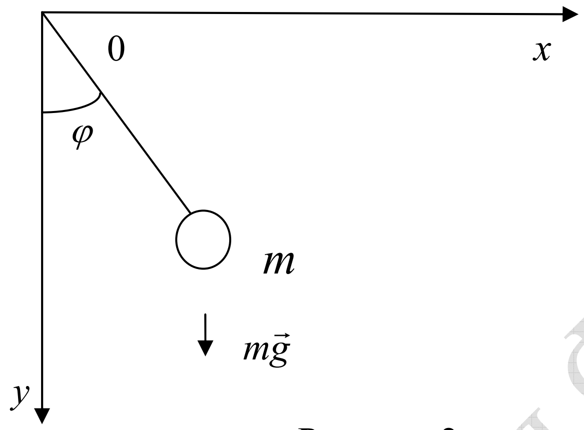


Рисунок 2.

$\varphi(t)$ - обобщенная координата

$$x = l \cdot \sin\varphi, \qquad \dot{x} = l \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi},$$
$$y = l \cdot \cos\varphi, \qquad \dot{y} = -l \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi},$$

$$L = T - U = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - \left(-mgy\right),$$

Функция Лагранжа:

$$L = \frac{m}{2} l^2 \dot{\varphi}^2 + mg \cdot l \cdot \cos\varphi,$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = ml^2 \dot{\varphi} \qquad \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2},$$

Функция Гамильтона:

$$H\left(p_\varphi, \varphi\right) = p_\varphi \cdot \dot{\varphi} - L = \frac{p_\varphi}{ml^2} - \frac{ml^2}{2} \cdot \frac{p_\varphi^2}{m^2 l^4} - mgl \cdot \cos\varphi =$$

$$= \frac{p_\varphi^2}{2ml^2} - mgl\cos\varphi = T + U.$$

Канонические уравнения:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{ml^2}, \qquad \dot{p}_\varphi = -\frac{\partial H}{\partial \varphi} = -mgl\sin\varphi.$$

*Задача 2.*

Получить уравнения Гамильтона для системы: обруч радиусом $R$ вращающий вокруг вертикального диаметра по заданному закону. По обручу без трения скользит бусинка массы $m$.

*Решение:*

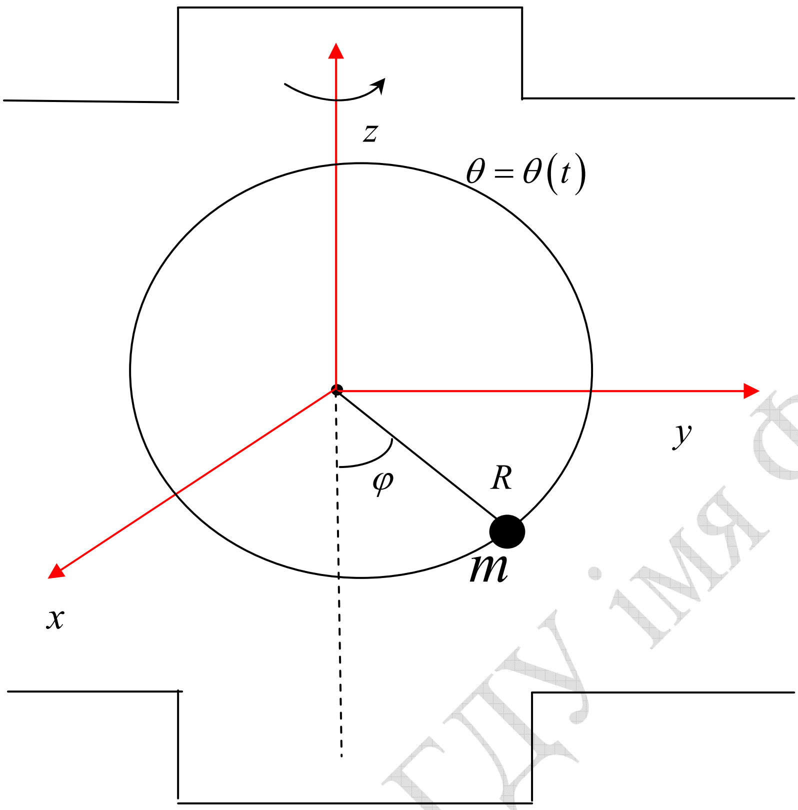


Рисунок 3.

$\varphi(t)$- изменение положения бусинки на обруче (обобщенная координата).

$\theta(t)$- угол поворота обруча вокруг вертикального диаметра (закон движения).

$$\begin{cases} z = R \cdot \cos\varphi, \\ x = R \cdot \sin\varphi \cdot \cos\theta, \\ y = R \cdot \sin\theta \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

$$\dot{x} = R \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\theta - R \cdot \sin\varphi \cdot \sin\theta \cdot \dot{\theta},$$
$$\dot{y} = R \cdot (\cos\theta \cdot \sin\theta + \sin\theta \cdot \cos\varphi \cdot \dot{\varphi}),$$
$$\dot{z} = -R \cdot \sin\varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

$$T = T_{\text{îáðó÷à}} + T_{\text{áóñèíêè}} = \frac{J\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m\upsilon^2}{2},$$

$$U = mgh = mgz = mg \cdot R \cdot cos\varphi.$$

$$T = \frac{J\dot{\theta}^2}{2} + \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right).$$

$$T_{\text{áóñèíêè}} = \frac{m}{2}\left(R^2 \sin^2\varphi \cdot \dot{\theta}^2 + R^2 \cos^2\varphi^2 + R^2 \cdot \sin^2\varphi \cdot \varphi^2\right) =$$

$$= \frac{m}{2}\left(R^2 \sin^2\varphi \cdot \theta^2 + R^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{mR^2}{2}\left(\sin^2\varphi \cdot \theta^2 + \dot{\varphi}^2\right).$$

Функция Гамильтона:

$$L = \frac{J\dot{\theta}}{2} + \frac{mR^2}{2}\left(\sin^2\varphi \cdot \theta^2 + \dot{\varphi}^2\right) - mg \cdot R \cdot \cos\varphi.$$

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot{\varphi}} = mR^2\dot{\varphi} \Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mR^2}.$$

$$H\left(p_\varphi, \varphi\right) = p_\varphi \cdot \varphi - L = \frac{p_\varphi^2}{mR^2} - \frac{J\dot{\theta}^2}{2} - \frac{mR^2}{2}\left(\frac{p_{\varphi^2}}{mR^2} + \sin^2\varphi \cdot \theta^2\right) + mgR\cos\varphi =$$

$$= \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} - \frac{mR^2}{2}\sin^2\varphi \cdot \theta^2 - \frac{J\dot{\theta}^2}{2} + mgR\cos\varphi.$$

Канонические уравнения:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial p_\varphi} = \frac{p_\varphi}{2mR^2},$$

$$\dot{p}_\varphi = \frac{\partial H}{\varphi} = mgR\sin\varphi + mR^2\theta^2\cos\varphi\sin\varphi = mR\sin\varphi(g + \cos\varphi R\dot{\theta}^2).$$

## 6.2 Скобки Пуассона

*Задача 1.*

Вычислить скобки Пуассона, состоящие из декартовых компонент импульса и координат.

*Решение:*

$$g = \vec{r},$$

$$\left\{r_i, r_j\right\} = \sum_k \left(\frac{\partial r_i}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial \pi_k} - \frac{\partial r_i}{\partial \pi_k} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial r_k}\right) = 0,$$

$$\frac{\partial r_i}{\partial r_j} = \delta_{ij} \quad , \quad \frac{\partial r_i}{\partial \pi_k} = \frac{\partial \pi_i}{\partial r_k} = 0 \quad , \quad \frac{\partial \pi_i}{\partial \pi_j} = \delta_{ij},$$

$$\left\{\pi_i, \pi_j\right\} = 0,$$

$$\left\{\pi_i, r_j\right\} = \sum_k \left( \frac{\partial \pi_i}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial \pi_k} - \frac{\partial \pi_i}{\partial \pi_k} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial r_k} \right) = -\delta_{ik}\delta_{jk} = -\delta_{ij},$$

$$\left\{r_i, \pi_j\right\} = \delta_{ij}.$$

*Задача 2.*

Вычислить скобки Пуассона от некоторой функции $f$ и декартовых координат компонент и импульса.

*Решение:*

$$\left\{f, r_j\right\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial \pi_k} - \frac{\partial f}{\partial \pi_k} \cdot \frac{\partial r_j}{\partial r_k} \right) = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial r_k} \cdot 0 - \frac{\partial f}{\partial \pi_k} \cdot \delta_{jk} \right) = -\frac{\partial f}{\partial \pi_j},$$

$$\left\{f, \pi_j\right\} = \sum_k \left( \frac{\partial f}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial \pi_j}{\partial \pi_k} - \frac{\partial f}{\partial \pi_k} \cdot \frac{\partial \pi_j}{\partial r_k} \right) = -\frac{\partial f}{\partial r_k}\delta_{jk} = \frac{\partial f}{\partial r_j}.$$

*Задача 3.*

Найти скобки Пуассона для проекций радиус-вектора, импульса, момента импульса точки и показать, что в центрально-симметричном поле соответствующие скобки Пуассона приводят к интегралам момента.

*Решение:*

Выберем в качестве независимых координат, свободной материальной точки ее декартовы координаты. Обобщенными импульсами при этом будут проекции импульса точки $p_x, p_y, p_z$. Составляя скобки Пуассона для $x$ и $M_x = yp_z - zp_y$, а затем для $p_x$ и $M_x$ и т. д., в случае произвольного потенциального внешнего поля получим

$$\left\{x, M_x\right\} = \left\{y, M_y\right\} = \left\{z, M_z\right\} = 0,$$

$$\left\{x, M_y\right\} = z,\ \left\{y, M_y\right\} = x,\ \left\{z, M_x\right\} = y,$$

$$\left\{y, M_x\right\} = -z,\ \left\{z, M_y\right\} = -x,\ \left\{x, M_z\right\} = -y,$$

$$\left\{p_x, M_x\right\} = \left\{p_y, M_x\right\} = \left\{p_z, M_y\right\} = 0,$$

$$\left\{p_x, M_y\right\} = p_z,\ \left\{p_y, M_z\right\} = p_x,\ \left\{p_z, M_x\right\} = p_y,$$

$$\left\{p_y, M_x\right\} = -p_z,\ \left\{p_z, M_y\right\} = -p_x,\ \left\{p_x, M_z\right\} = -p_y,$$

(эти результаты полезно сравнить с соответствующими квантово-механическими соотношениями).

Если точка движется в центрально-симметричном поле то, вычисляя скобку

$$\{M_x, H\} = \frac{\partial M_x}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial p_x} - \frac{\partial M_x}{\partial p_x}\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_x}{\partial y}\frac{\partial H}{\partial p_y} - \frac{\partial M_x}{\partial p_y}\frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial z}\frac{\partial H}{\partial p_z} - \frac{\partial M_x}{\partial p_z}\frac{\partial H}{\partial z},$$

где $H = \frac{1}{2m}\left(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2\right) + U(r)$ и $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

получается $\{M_x, H\} = p_z \frac{p_y}{m} + z\frac{\partial U}{\partial r}\frac{y}{r} - p_y\frac{p_z}{m} - y\frac{\partial U}{\partial r}\frac{z}{r} = 0.$.

Следовательно, $M_x$ является интегралом движения канонических уравнений. Составляя скобку Пуассона, $\{M_y, H\}$ аналогично убедимся, что и $M_y = M_{y0}$.

## 6.3 Канонические преобразования

*Задача 1.*

Найти канонические преобразования, задаваемые производящей функцией

$F(q,Q,t) = \frac{1}{2} m w(t) q^2 ctg\theta$, где $f(t)$ - внешняя сила.

*Решение:*

Если $F(q,Q,t)$, то используем формулы преобразования:

$$\pi = \frac{\partial F}{\partial q};\ \rho = -\frac{\partial F}{\partial Q}.$$

$$\begin{cases} \pi = m \cdot w(t) \cdot q \cdot ctg\theta, \\ \rho = 1/2m \cdot w(t) q^2 \dfrac{1}{\sin^2\theta}, \end{cases}$$

$$\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)' = \frac{-\sin^2\theta - \cos^2\theta}{\sin^2\theta} = -\frac{1}{\sin^2\theta}.$$

$$q = \frac{\pi}{m \cdot w(t) \cdot ctgQ},$$

$$\rho = \frac{mw(t)}{2\sin^2 Q}\cdot\frac{\pi^2}{m^2 w^2(t) ctg^2 Q} = \frac{\pi^2}{2\cos^2 Q mw(t)},$$

$$\pi = \sqrt{2\rho\cos^2 Q mw(t)} = \cos Q\sqrt{2\rho mw(t)},$$

$$q = \frac{\sqrt{2\rho m w(t)} \cdot \sin Q}{m w(t)} = \sqrt{\frac{2\rho}{m w(t)}} \cdot \sin Q.$$

*Задача 2:*

Дана система переменных $q_i$ и $p_i$. Требуется найти новые переменные $\xi_i$ и $\eta_i$,выразить их в зависимости от старых переменных $\xi_i$ и $\eta_i$ и вычислить новую функцию Гамильтона R в зависимости от старой функции *H,* если производящая функция *S* имеет вид: $S = \sum_{i=1}^{s} q_i \xi_i$ .

*Решение:*

Используем формулы $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ и $\eta_i = -\frac{\partial S}{\partial \xi_i}$ - связь новых и старых канонических переменных. Получится

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = \xi_i, \qquad \eta_i = -\frac{\partial S}{\partial \xi_i} = -q_i,$$

т. е. новые переменные равны

$$p_i = \xi_i \ , \ \eta_i = -q_i,$$

где i= 1, 2, .. ., s.

Итак, в новой системе переменных старые импульсы стали новыми координатами, а отрицательные значения старых координат стали новыми импульсами.

Производящая функция $S = \sum_{i=1}^{s} q_i \xi_i$ явно от времени не зависит. Поэтому *dS/dt = 0* и, следуя формуле,

$$R = \frac{\partial S}{\partial t} + H,$$

получим *S=H.*

## 6.4 Уравнение Гамильтона-Якоби

*Задача 1.*

Составить уравнение Гамильтона — Якоби для описания движения в поле силы тяжести свободной материальной точки массы *m.* В качестве обобщенных взять, декартовы координаты $x, y, z$ .

*Решение:*

Функция Гамильтона в декартовых координатах имеет вид:

$$H = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + mgz.$$

С учетом формул

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} \text{ и } \eta_i = -\frac{\partial S}{\partial \xi_i},$$

имеем $p_x = dV/dx$, $p_y = dV/dy$, $p_z = \partial V / \partial z$, и функция $H$ принимает вид:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + mgz.$$

Используя эту формулу в уравнение Гамильтона-Якоби, запишем искомое уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right] + mgz = 0\,.$$

*Задача 2.*

Решить предыдущую задачу, приняв в качестве обобщенных сферические координаты $\rho, \varphi, \theta$.

*Решение:*

Дана соответствующая функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2m}\left[p_\rho^2 + \frac{p_\varphi^2}{\rho^2 \sin\theta} + \frac{p_\theta^2}{\rho^2}\right] + mg\rho\cos\theta.$$

На основании формул $p_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ и $\eta_i = -\dfrac{\partial S}{\partial \xi_i}$, имеем: $\rho_\rho = \partial S / \partial \rho$, $\rho_\varphi = \partial S / \partial \varphi$, $\rho_\theta = \partial S / \partial \theta$ и функция $H$ принимает вид:

$$H = \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] + mg\rho\cos\theta.$$

Внеся это выражение в формулу Гамильтона-Якоби, получим искомое уравнение Гамильтона—Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left[\left(\frac{\partial S}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2\right] + mg\rho\cos\theta = 0\,.$$

*Задача 3.*

Составить уравнение Гамильтона—Якоби для описания движения физического маятника, если Р — его вес, $I_z$ — момент инерции относительно оси привеса, *а* — расстояние от точки привеса до центра тяжести маятника. В качестве обобщенной координаты выбрать угол $\varphi$ отклонения маятника от вертикали.

*Решение*:

Дана соответствующая функция Гамильтона:

$$H = \frac{1}{2I_z} p_\varphi^2 - Pa\cos\varphi.$$

На основании формулы $p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}$ и $\eta_i = -\frac{\partial S}{\partial \xi_i}$, имеем

$$p_\varphi = \frac{\partial S}{\partial \varphi}.$$

и функция H принимает вид:

$$H = \frac{1}{2I_z}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - Pa\cos\varphi.$$

Используя это выражение в формуле Гамильтона-Якоби, получаеться искомое уравнение Гамильтона — Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2I_z}\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}\right)^2 - Pa\cos\varphi = 0.$$