УДК 535.56

ДИСПЕРСИОННЫЕ ПРАВИЛА СУММ В ОПТИКЕ ЕСТЕСТВЕННО ГИРОТРОПНЫХ СРЕД

Б. В. Бокуть, В. А. Пенязь и *А. Н. Сердюков*

Получены дисперсионные правила сумм для тензора естественной оптической активности. Показано, что интеграл от кривой дисперсии вращательной способности любой естественно гиротропной среды по всем длинам волн равен нулю.

1. В рамках линейной макроскопической электродинамики исчерпывающее феноменологическое описание электромагнитных свойств естественно гиротропных сред с частотной дисперсией может быть дано на основе материальных уравнений наиболее общего вида [1]

$$\left.\begin{aligned} D_i(t) &= E_i(t) + \int\limits_0^\infty f_{ij}(\tau)\, E_j(t-\tau)\, d\tau + \int\limits_0^\infty \varphi_{ij}(\tau)\, H_j(t-\tau)\, d\tau, \\ B_i(t) &= H_i(t) + \int\limits_0^\infty g_{ij}(\tau)\, H_j(t-\tau)\, d\tau + \int\limits_0^\infty \psi_{ij}(\tau)\, E_j(t-\tau)\, d\tau, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

учитывающих зависимость электрической и магнитной поляризации среды от значений напряженностей электрического и магнитного поля не только в данный момент времени t, но и во все предшествующие моменты $t-\tau$. Для монохроматического поля частоты ω из (1) получаем [1, 2]

$$D_i = \varepsilon_{ij}(\omega)\, E_j + \beta_{ij}^{(1)}(\omega)\, H_j, \quad B_i = \mu_{ij}(\omega)\, H_j + \beta_{ij}^{(2)}(\omega)\, E_j, \tag{2}$$

где тензоры $\varepsilon_{ij}(\omega)$ и $\mu_{ij}(\omega)$ известным образом выражаются через $f_{ij}(\tau)$ и $g_{ij}(\tau)$ [3], а $\beta_{ij}^{(1)}(\omega)$ и $\beta_{ij}^{(2)}(\omega)$ имеют вид [1]

$$\beta_{ij}^{(1)}(\omega) = \int\limits_0^\infty \varphi_{ij}(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau, \quad \beta_{ij}^{(2)}(\omega) = \int\limits_0^\infty \psi_{ij}(\tau)\, e^{i\omega\tau} d\tau. \tag{3}$$

Покажем, что в немагнитоупорядоченной среде $\beta_{ij}^{(1)}(0) = \beta_{ij}^{(2)}(0) = 0$. Введем для статических полей ($\omega = 0$) термодинамический потенциал $V(\mathbf{E}, \mathbf{H})$, полный дифференциал которого равен

$$dV = D_i dE_i + B_i dH_i.$$

Отсюда

$$D_i = \frac{\partial V}{\partial E_i}, \quad B_i = \frac{\partial V}{\partial H_i}. \tag{4}$$

Из (2), (4) следует

$$\beta_{ij}^{(1)}(0) = \frac{\partial^2 V}{\partial H_j \partial E_i}, \quad \beta_{ij}^{(2)}(0) = \frac{\partial^2 V}{\partial E_j \partial H_i},$$

так что

$$\beta_{ij}^{(1)}(0) = \beta_{ji}^{(2)}(0). \tag{5}$$

Сравнивая соотношение (5) с равенством

$$\beta_{ij}^{(1)}(\omega) = -\beta_{ji}^{(2)}(\omega), \tag{6}$$

вытекающим из принципа симметрии кинетических коэффициентов [1, 4], действительно находим

$$\beta_{ij}^{(1)}(0) = \beta_{ij}^{(2)}(0) = 0. \tag{7}$$

В областях прозрачности среды гиротропия, как известно, описывается чисто мнимым тензором $\beta_{ij}^{(1)}(\omega)$ [1]. Поэтому в материальных уравнениях (2) удобно перейти к тензору

$$\alpha_{ij}(\omega) = -i\beta_{ij}^{(1)}(\omega), \tag{8}$$

вещественному при отсутствии поглощения, так что с учетом (6) имеем

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E} + i\alpha(\omega)\,\mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu(\omega)\,\mathbf{H} - i\tilde{\alpha}(\omega)\,\mathbf{E}. \tag{9}$$

Здесь и далее используется безындексная форма записи: тильда (~) означает транспонирование.

Из (3) следуют дисперсионные соотношения между вещественной и мнимой частями тензора (8)

$$\alpha'(\omega) = \frac{2\omega}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha''(x)}{x^2-\omega^2}\,dx, \tag{10}$$

$$\alpha''(\omega) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{x\alpha'(x)}{x^2-\omega^2}\,dx. \tag{11}$$

Обратимся теперь к рассмотрению изотропной оптически активной среды, описываемой материальными уравнениями (9) со скалярными параметрами $\varepsilon(\omega)$, $\mu(\omega)$ и $\alpha(\omega)$. Такая среда обладает циркулярным двупреломлением и дихроизмом, причем комплексные показатели преломления право- и левополяризованных волн равны

$$n_\pm(\omega) = \sqrt{\varepsilon(\omega)\,\mu(\omega)} \pm \alpha(\omega). \tag{12}$$

Ее вращательная способность или угол поворота плоскости поляризации на единицу толщины (при наличии дихроизма — угол поворота осей эллипса поляризации) $\vartheta(\omega) = \omega\,\mathrm{Re}\,[n_+(\omega) - n_-(\omega)]/2c$ определится, согласно (12), через вещественную часть комплексного параметра гирации $\alpha(\omega)$

$$\vartheta(\omega) = \frac{\omega\alpha'(\omega)}{c}. \tag{13}$$

Выразим отсюда $\alpha'(\omega)$ через $\vartheta(\omega)$ и подставим в соотношение (11)

$$\alpha''(\omega) = -\frac{2c}{\pi}\int_0^\infty \frac{\vartheta(x)}{x^2-\omega^2}\,dx. \tag{14}$$

Полагая в (14) $\omega = 0$, учитывая, что, согласно (7), (8), $\alpha''(0) = 0$, найдем

$$\int_0^\infty \frac{\vartheta(\omega)}{\omega^2}\,d\omega = 0. \tag{15}$$

Переходя далее в (15) от интегрирования по частотам к интегрированию по длинам волн ($\lambda = 2\pi c/\omega$), получим

$$\int_0^\infty \vartheta(\lambda)\,d\lambda = 0. \tag{16}$$

Нетрудно показать, что этот же результат справедлив и для вращательной способности одноосных кристаллов в направлении оптической оси.

Функции $\alpha'(\omega)$ и $\vartheta(\lambda)$ не имеют особенностей при последовательном учете диссипативных свойств среды. Поэтому интеграл (16) можно рассматривать в обычном смысле, опуская символ главного значения.

2. Для среды, моделируемой системой связанных осцилляторов, комплексный параметр оптической активности $\alpha(\omega)$ имеет вид [5]

$$\alpha(\omega) = \sum_s \frac{A_s \omega}{\omega_s^2 - \omega^2 - 2i\Gamma_s \omega}, \tag{17}$$

где A_s, ω_s и Γ_s — константы, определяемые микроскопическими характеристиками среды. Зависимость вращательной способности такой среды от частоты, согласно (13), (17), задается формулой

$$\vartheta(\omega) = \sum_s \frac{A_s(\omega_s^2 - \omega^2)}{(\omega_s^2 - \omega^2)^2 + 4\Gamma_s^2 \omega^2}. \tag{18}$$

Проводя интегрирование в (15) с использованием (18), нетрудно убедиться в справедливости общих соотношений (15), (16) на этом примере.

3. Из (3), (7) следует условие

$$\int_0^\infty \varphi(\tau)\, d\tau = 0, \tag{19}$$

которому должно удовлетворять ядро $\varphi(\tau)$ первого соотношения (1). Аналогичному условию будет, очевидно, удовлетворять и $\psi(\tau)$, так как в силу (3), (6) $\psi(\tau) = -\tilde{\varphi}(\tau)$. Для рассмотренной выше модели среды, согласно (3), (8), (17),

$$\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta^{(1)}(\omega)\, e^{-i\omega\tau} d\tau = \frac{i}{2\pi} \sum_s A_s \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega e^{-i\omega\tau}}{\omega_s^2 - \omega^2 - 2i\Gamma_s\omega}\, d\omega.$$

Поскольку $\tau > 0$, замкнем контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса в нижней полуплоскости. Используя теорему о вычетах, находим

$$\varphi(\tau) = \sum_s \frac{A_s}{\sqrt{\omega_s^2 - \Gamma_s^2}} e^{-\Gamma_s\tau} \left[\Gamma_s \sin\left(\sqrt{\omega_s^2 - \Gamma_s^2}\,\tau\right) - \sqrt{\omega_s^2 - \Gamma_s^2} \cos\left(\sqrt{\omega_s^2 - \Gamma_s^2}\,\tau\right)\right]$$

или

$$\varphi(\tau) = \frac{d}{d\tau} \sum_s \frac{-A_s}{\sqrt{\omega_s^2 - \Gamma_s^2}}\, e^{-\Gamma_s\tau} \sin\left(\sqrt{\omega_s^2 - \Gamma_s^2}\,\tau\right). \tag{20}$$

Непосредственным интегрированием нетрудно убедиться, что выражение (20) удовлетворяет условию (19).

4. Установим дисперсионные правила сумм для тензора гирации, описывающего естественную оптическую активность в рамках подхода теории пространственной дисперсии. С этой целью удобнее исходить из материальных уравнений для монохроматических полей

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{D} &= \varepsilon(\omega)\,\mathbf{E} + i\alpha(\omega)\,\mathbf{B}, \\ \mathbf{H} &= \mu^{-1}(\omega)\,\mathbf{B} + i\tilde{\alpha}(\omega)\,\mathbf{E}, \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

в отличие от (9), разрешенных относительно векторов электрической индукции и напряженности магнитного поля. Хотя здесь и сохранены прежние обозначения для тензоров материальных постоянных среды, очевидно, тензоры $\varepsilon(\omega)$ и $\alpha(\omega)$ в (21) отличаются от соответствующих тензоров в (9). Тем не менее тензор $\alpha(\omega)$ будет удовлетворять дисперсионным соотношениям вида (10), (11), если рассматривать (21) как следствие соответствующих нелокальных во времени материальных уравнений, аналогичных (1), разрешенных, однако, относительно $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$. Как и выше, можно показать, что тензор $\alpha(\omega)$ в (21) для статических полей ($\alpha(0)=0$) обращается в нуль.

Перейдем к описанию оптической активности на основе теории пространственной дисперсии. В связи с этим, исходя из уравнений Максвелла для плоских монохроматических волн

$$\mathbf{k}^{\times}\mathbf{E}=\frac{\omega}{c}\mathbf{B}, \tag{22}$$

$$\mathbf{k}^{\times}\mathbf{H}=-\frac{\omega}{c}\mathbf{D} \tag{23}$$

и материальных уравнений (21), переопределим векторы поля, включив часть магнитной поляризации, связанной с гиротропией, в определение электрической поляризации. В результате такого переопределения приходим к материальным уравнениям [4, 6]

$$\mathbf{H}'=\mu^{-1}\mathbf{B},$$
$$\mathbf{D}'=\varepsilon(\mathbf{k})\mathbf{E}=\left(\varepsilon+i(\gamma\mathbf{k})^{\times}\right)\mathbf{E}.$$

Определенные таким образом векторы магнитной напряженности $\mathbf{H}'$ и электрической индукции $\mathbf{D}'$ удовлетворяют обычным уравнениям Максвелла. Тензор $\gamma(\omega)$, ответственный за пространственную дисперсию, связан с тензором гирации $\alpha(\omega)$ соотношением [4, 6]

$$\gamma(\omega)=\frac{c}{\omega}\left(\operatorname{sp}\alpha(\omega)-\tilde{\alpha}(\omega)\right). \tag{24}$$

Поскольку в (21) $\alpha(0)=0$, то из (11) находим

$$\int_0^\infty \frac{\alpha'(\omega)}{\omega}\,d\omega=0. \tag{25}$$

Далее из (24), (25) окончательно приходим к дисперсионному правилу сумм

$$\int_0^\infty \gamma'(\omega)\,d\omega=0 \tag{26}$$

для вещественной части тензора $\gamma(\omega)$, описывающего естественную оптическую активность в теории пространственной дисперсии.

5. Согласно (16), интеграл от кривой дисперсии вращательной способности всех естественно гиротропных сред (исключая, быть может, двуосные кристаллы, испытывающие дисперсию оптических осей) по длинам волн равен нулю. Это означает, в частности, что не существует абсолютно право- или левовращающих сред во всем диапазоне длин волн. Следовательно, определение того или другого пространственного изомера по признаку правого или левого вращения (как, например, правовращающий, левовращающий кварц) не является универсальным и требует дополнительного указания спектральной области, в которой измеряется вращательная способность.

Дисперсионные правила сумм (16), (19), (26) означают, что вращательная способность естественно гиротропных сред в различных диапазонах длин волн коррелирована. Следовательно, соотношения (16), (19), (26) могут быть использованы для оценки параметров гиротропии в тех областях частот, где их непосредственное измерение затруднено.

Литература

[1] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков, В. В. Шепелевич. Опт. и спектр., *37*, 120, 1974.
[2] Ф. И. Федоров. Теория гиротропии, 279. «Наука и техника», Минск, 1976.
[3] Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. Электродинамика сплошных сред, 316. Физматгиз, М., 1959.
[4] R. M. Horneich, S. Shtrikman. Phys. Rev., *171*, 1065, 1968.
[5] D. J. Caldwell, H. Eyring. The Theory of Optical Activity, 35. N. Y., 1971.
[6] Б. В. Бокуть, А. Н. Сердюков. ЖЭТФ, *61*, 1808, 1971.

Поступило в Редакцию 3 марта 1980 г.