УДК 539.12

ОБ ОПИСАНИИ СВЯЗАННЫХ СОСТОЯНИЙ ДЛЯ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1 В КУЛОНОВСКОМ ПОЛЕ

Е.М. Овсиюк[1], О.В. Веко[2], Я.А. Войнова[2], А.Д. Коральков[1], В.В. Кисель[3], В.М. Редьков[2]

[1]*Мозырский государственный педагогический университет им. И.П. Шамякина*
[2]*Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси*, *Минск*
[3]*Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники*, *Минск*

ON DESCRIBING BOUND STATES FOR A SPIN 1 PARTICLE IN THE EXTERNAL COULOMB FIELD

E.M. Ovsiyuk[1], O.V. Veko[2], Ya.A. Voynova[2], A.D. Koral'kov[1], V.V. Kisel[3], V.M. Red'kov[2]

[1]*I.P. Shamyakin Mosyr State Pedagogical University*
[2]*B.I. Stepanov Institute of Physics National Academy of Sciences of Belarus*, *Minsk*
[3]*Belarusian State University of Informatics and Radioelectronics*, *Minsk*

Исследуется система из 10 радиальных уравнений для векторной частицы в кулоновском поле. С использованием оператора пространственной четности система разбивается на две, по 4 и 6 уравнений каждая. Система из 4 уравнений решается в гипергеометрических функциях, приводя к известному спектру энергий. Комбинированием 6 уравнений удается получить для некоторых радиальных функций дифференциальные уравнения второго порядка. В частности, одно из уравнений оказывается уравнением Гойна, это позволило на основе выделения так называемых трансцендентных вырожденных функций Гойна получить условие квантования и соответствующий спектр энергий. Система 6 уравнений после исключения недифференциальных соотношений приведена к связанным уравнениям 1-го порядка для функций f_1, f_2, f_3, f_4. Выведены уравнения 4-го порядка для каждой из этих функций, описаны их сингулярности. Предложен метод описания проекций векторов решений – линий в 4-мерном пространстве $\{f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)\}$ на различные плоскости $f_i = 0$.

***Ключевые слова**: векторная частица, поле Кулона, условие Лоренца, связанные состояния, трансцендентные функции Гойна, точные решения, дифференциальные уравнения первого и четвертого порядка.*

The system of 10 radial equations for a spin 1 particle in the external Coulomb field, is studied. With the use of the space reflection operator, the system is split to subsystems, consisted of 4 and 6 equations respectively. The system of 4 equations is solved in terms of hypergeometric functions, which gives the known energy spectrum. Combining the 6-equation system, we derive several equations of the 2-nd order for some separate functions. On of them may be recognized as a confluent Heun equation. A series of bound states is constructed in terms of the so called transcendental confluent Heun functions, which provides us with solutions for the second class of bound states, with corresponding formula for energy levels. The subsystem of 6 is equations reduced to the system of the 1-st order equations for 4 functions f_i, $i = 1, 2, 3, 4$. We derive explicit form of a corresponding of the 4-th order equation for each function. From four independent solutions of each 4-th order equation, only two solutions may be referred to series of bound states.

***Keywords**: vector particle, Coulomb field, Lorentz condition, bound states, transcendental Heun functions, exact solutions, differential equations of second and fourth order.*

Введение

До сих пор не решенной полностью является квантово-механическая задача о поведении частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле. Первый из трех ожидаемых подклассов решений и соответствующий ему дискретный спектр энергий был установлен И.Е. Таммом [1]. Незавершенность анализа относится к двум другим подклассам решений, описываемых системой из шести зацепляющихся между собой уравнений. Основной вывод работы [1] заключается в утверждении, что в этих состояниях векторная частица должна падать на кулоновский центр, не образуя устойчивых стационарных состояний в кулоновском поле. Однако исследование нерелятивистского предела в уравнениях для векторной частицы в кулоновском поле показало [2], что существуют три подкласса решений, отвечающих связанным состояниям, с соответствующими спектрами энергии, модифицирующими известную шредингеровскую формулу для нерелятивистской скалярной частицы. Выполненный в работах [3], [4] анализ также показал, что есть возможность получать для некоторых радиальных функций дифференциальные уравнения второго порядка вместо ожидаемых уравнений 4-го порядка. К сожалению, в работах [3], [4] обнаружилась существенная техническая ошибка, что делает неверной форму представления части полученных там результатов; в частности, в настоящей работе эта ошибка исправлена.

В разделе 1 получена система из 10 радиальных уравнений, следующая из уравнения Даффина – Кеммера для векторной частицы в кулоновском поле. С использованием оператора пространственной четности система разбивается на две подсистемы, состоящие из 4 и 6 уравнений. Решение системы из 4 уравнений выражено через гипергеометрические функции, при этом найденный спектр энергий совпадает с уже известным. Также найдены решения и уровни энергии при нулевом полном моменте $j = 0$.

В разделе 2 с использованием обобщенного условия Лоренца показано равенство нулю одной из радиальных компонент, что позволило упростить уравнения. Для простой подсистемы из 4 уравнений условие Лоренца выполняется автоматически. Условие равенства нулю одной из радиальных функций относится только к подсистеме из 6 уравнений, в ней имеем только 5 неизвестных функций.

В разделе 3 комбинированием полученных 6 уравнений удается получить уравнение второго порядка для одной из радиальных функций.

В разделе 4 выполнен анализ этого дифференциального уравнения. Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна. На основе использования условия, выделяющего так называемые трансцендентные вырожденные функции Гойна, введено условие квантования и найден соответствующий спектр энергии. Таким образом, установлен второй класс связанных состояний.

В разделе 5 система 6 уравнений после исключения двух функций может быть приведена к четырем связанным между собой уравнениям первого порядка для 4 функций $f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)$. В работе предложен метод, позволяющий получить описание проекций (сечений) линий в 4-мерном пространстве $\{f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)\}$ – полных решений системы из 5 уравнений на различные плоскости $f_i = 0$. В каждом случае эти проекции состоят из двух частей (ветвей), которые задаются решениями двух разных уравнений второго порядка. Найден явный вид всех уравнений второго порядка, возникающих при описании таких проекций решений.

В разделе 6 выведены уравнения 4-го порядка для каждой из этих функций, описаны их сингулярности. Четыре дифференциальных уравнения 4-го порядка разбиваются на две пары с одинаковыми наборами сингулярных точек.

Уравнения для f_1, f_3 имеют одинаковый набор особых точек: три регулярные и две нерегулярные ранга 3/2. Уравнения для f_2, f_4 имеют также одинаковый набор особых точек: две регулярные и две нерегулярные ранга 3/2. Любую из 4 функций, подчиняющихся уравнению 4-го порядка, можно выбрать как основную, а остальные вычислить из нее. Каждое из уравнений 4-го порядка имеет 4 линейно независимых решения. Из общих физических соображений можно ожидать, что только два из них описывают связанные состояния, порождая тем самым две серии связанных состояний с соответствующими (неизвестными) спектрами энергии.

1 Разделение переменных

Будем использовать матричное представление уравнения для векторной частицы в форме Даффина – Кеммера, основанное на применении тетрадного формализма [5]:

$$\left\{\beta^0\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)+i\left[\beta^3\partial_r+\frac{1}{r}\left(\beta^1 j^{31}+\beta^2 j^{32}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{r}\Sigma_{\theta,\phi}-m\right\}\Phi(x)=0,$$

где $\varepsilon = E/c\hbar,\ m = Mc/\hbar,\ \alpha = e^2/(c\hbar) = 1/137$; $\Sigma_{\theta,\phi}$ обозначает зависящий от угловых переменных оператор

$$\Sigma_{\theta,\phi} = i\,\beta^1\partial_\theta + \beta^2\,\frac{i\partial_\phi + i\,j^{12}\cos\theta}{\sin\theta}.$$

Волновые функции с квантовыми числами (ε, j, m) строятся в этом представлении на основе подстановки [5]

$$\Psi(x) = \{\,\Phi_0(x), \vec{\Phi}(x), \vec{E}(x), \vec{H}(x)\,\},$$

$$\Phi_0(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\Phi_0(r)D_0,\ \vec{\Phi}(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\begin{vmatrix}\Phi_1(r)D_{-1}\\ \Phi_2(r)D_0\\ \Phi_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},$$

$$\vec{E}(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\begin{vmatrix}E_1(r)D_{-1}\\ E_2(r)D_0\\ E_3(r)D_{+1}\end{vmatrix},\ \vec{H}(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\begin{vmatrix}H_1(r)D_{-1}\\ H_2(r)D_0\\ H_3(r)D_{+1}\end{vmatrix}.$$

Функции Вигнера обозначаются так:

$$D_\sigma = D^j_{-m,\sigma}(\phi,\theta,0),\ \sigma = 0, +1, -1;$$

квантовое число j принимает значения $0, 1, 2, \ldots$ (не путать квантовое число m с безразмерным параметром массы). С применением рекуррентных формул для функций Вигнера

$$\partial_\theta D_{-1} = aD_{-2} - cD_0,$$

$$\frac{-m-(-1)\cos\theta}{\sin\theta}D_{-1} = -aD_{-2} - cD_0,$$

$$\partial_\theta D_0 = (cD_{-1} - dD_{+1}),\ \frac{-m}{\sin\theta}D_0 = -cD_{-1} - dD_{+1},$$

$$\partial_\theta D_{+1} = (dD_0 - bD_{+2}),$$

$$\frac{-m-(+1)\cos\theta}{\sin\theta}D_{+1} = -dD_0 - bD_{+2},$$

$$a = \frac{1}{2}\sqrt{(j-1)(j+2)},\ b = \frac{1}{2}\sqrt{(j-1)(j+2)},$$

$$c = \frac{1}{2}\sqrt{j(j+1)}, \ d = \frac{1}{2}\sqrt{j(j+1)}$$

находим систему из 10 радиальных уравнений [3], [4]:

$$-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 - \frac{\nu}{r}(E_1+E_3) = m\Phi_0,$$
$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m\Phi_1,$$
$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2 - i\frac{\nu}{r}\left(H_1-H_3\right) = m\Phi_2,$$
$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_3 - i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_3 - i\frac{\nu}{r}H_2 = m\Phi_3,$$
$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0,$$
$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 - \frac{d}{dr}\Phi_0 - mE_2 = 0, \qquad (1.1)$$
$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_3 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_3 = 0,$$
$$-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1 - i\frac{\nu}{r}\Phi_2 - mH_1 = 0,$$
$$+i\frac{\nu}{r}(\Phi_1-\Phi_3) - mH_2 = 0,$$
$$+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_3 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 - mH_3 = 0,$$

где $\nu = \sqrt{j(j+1)/2}, \ \ j = 1,2,....$

Вместе с операторами квадрата и третьей проекции полного момента будем диагонализировать оператор пространственной инверсии $\widehat{\Pi}$. После преобразования представления оператора от обычного декартового базиса к базису сферической тетрады и циклическому базису матриц Даффина – Кеммера находим следующее явное выражение:

$$\widehat{\Pi} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Pi_3 \end{vmatrix} \widehat{P}, \quad \Pi_3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Уравнение на собственные значения $\widehat{\Pi}\Psi = P\,\Psi$ дает два значения для пространственной четности и соответствующие ограничения для радиальных функций:

$$P = (-1)^{j+1}, \Phi_0 = 0, \Phi_3 = -\Phi_1, \Phi_2 = 0,$$
$$E_3 = -E_1, E_2 = 0, H_3 = H_1;$$
$$P = (-1)^{j}, \Phi_3 = \Phi_1, E_3 = +E_1, H_3 = -H_1, H_2 = 0.$$

При этом система из 10 уравнений (1.1) дает две более простые подсистемы. Первая:

$$P = (-1)^{j+1},$$
$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 + i\frac{\nu}{r}H_2 = m\Phi_1,$$
$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 = mE_1,$$
$$-i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1 = mH_1, \ 2i\frac{\nu}{r}\Phi_1 = mH_2;$$

исключая в ней переменные E_1, H_1, H_2, приходим к уравнению второго порядка для одной (основной) функции Φ_1

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2 - m^2 - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\Phi_1 = 0.$$

Полученное уравнение совпадает с уравнением для скалярной частицы в кулоновском поле. Решения строятся в гипергеометрических функциях и спектр энергии следующий (приводим формулу в обычных единицах измерения):

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}}, \ N = n + \frac{1}{2} + \sqrt{(j+1/2)^2 - \alpha^2}.$$

Для состояний с четностью $P = (-1)^j$ имеем систему из 6 уравнений:

$$1) \left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 + 2\frac{\nu}{r}E_1 + m\Phi_0 = 0,$$
$$2) +i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1 + i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1 - m\Phi_1 = 0,$$
$$3) +i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2 - 2i\frac{\nu}{r}H_1 - m\Phi_2 = 0, \qquad (1.2)$$
$$4) -i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1 + \frac{\nu}{r}\Phi_0 - mE_1 = 0,$$
$$5) \ i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2 + \frac{d}{dr}\Phi_0 + mE_2 = 0,$$
$$6) \ i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1 + i\frac{\nu}{r}\Phi_2 + mH_1 = 0.$$

Состояния с $j = 0$ следует рассмотреть отдельно. В этом случае исходим из специальной подстановки для волновой функции:

$$\Phi_0(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\Phi_0(r), \ \vec{\Phi}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ \Phi_2(r) \\ 0 \end{vmatrix},$$
$$\vec{E}(x) = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\begin{vmatrix} 0 \\ E_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}, \ \vec{H}(x) = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} 0 \\ H_2(r) \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Угловой оператор $\Sigma_{\theta,\phi}$ при действии на эту функцию дает ноль. Четность фиксирована величиной $P = (-1)^{0+1} = -1$. Чтобы исключить из радиальных уравнений мнимую единицу *i*, используем переменные $\Phi_0 = \varphi_0, \ -i\Phi_1 = \varphi_1, \ -i\Phi_2 = \varphi_2$, тогда имеем уравнения

$$H_2 = 0, \ -\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2 = m\varphi_0,$$
$$\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2 = m\varphi_2, \ \left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\varphi_2 - \frac{d}{dr}\varphi_0 = mE_2.$$

Отсюда находим уравнение второго порядка для основной функции E_2

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}-\frac{2}{r^2}+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-m^2\right]E_2=0.$$

Оно решается в терминах вырожденных гипергеометрических функций; приведем соответствующий спектр энергии

$$E=Mc^2\left(1+\frac{\alpha^2}{(n+\Gamma)^2}\right)^{-1/2},$$

$$\Gamma=\frac{1+\sqrt{9-4\alpha^2}}{2},\ n=0,1,2,...$$

2 Условие Лоренца во внешнем кулоновском поле

Известно, что для частицы со спином 1 во внешнем поле должно существовать обобщенное условие Лоренца. Чтобы найти это условие, удобно воспользоваться тензорной записью уравнений в форме Прока [5]:

$$D_\alpha\Phi_\beta-D_\beta\Phi_\alpha=m\Phi_{\alpha\beta},\ D^\alpha\Phi_{\alpha\beta}=m\Phi_\beta, \quad (2.1)$$

где $D_\alpha=\nabla_\alpha+ieA_\alpha$. Действуя на второе уравнение в (2.1) оператором D_α, получим

$$(\nabla_\alpha+ieA_\alpha)\Phi^\alpha=\frac{i\alpha}{2m}F_{\alpha\beta}\Phi^{\alpha\beta}.$$

Это условие в тензорной форме должно быть преобразовано к используемому представлению волновых функций. После необходимых вычислений получим радиальное соотношение [5]:

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_0-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)\Phi_2-\frac{\nu}{r}(\Phi_1+\Phi_3)=$$
$$=\frac{i\alpha}{2mr^2}E_2.$$

Для состояний с четностью $P=(-1)^{j+1}$ это условие превращается в тождество $0=0$. Для состояний с четностью $P=(-1)^j$ оно принимает вид

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_0-\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)\Phi_2-\frac{2\nu}{r}\Phi_1=$$
$$=\frac{i\alpha}{2mr^2}E_2. \quad (2.2)$$

С использованием (2.2) из системы (1.2) можно вывести полезное для дальнейшего соотношение. Для этого из уравнения (2.2) исключим функцию Φ_2 с помощью третьего уравнения в (1.2), это дает

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)m\Phi_0+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2-$$
$$-\frac{2i\nu}{r}\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+\frac{2m\nu}{r}\Phi_1=\frac{i\alpha}{2r^2}E_2.$$

Преобразуя здесь второй и третий члены с помощью 1-го и 2-го уравнений системы (1.2), получаем

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)m\Phi_0+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\left(-2\frac{\nu}{r}E_1-m\Phi_0\right)-$$
$$-\frac{2\nu}{r}\left[m\Phi_1-i(\varepsilon+\frac{\alpha}{r})E_1\right]+\frac{2m\nu}{r}\Phi_1=\frac{i\alpha}{2r^2}E_2.$$

Слагаемые с E_1 и с Φ_1 сокращаются, в результате приходим к равенству

$$im\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_0-im\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_0=\frac{i\alpha}{2r^2}E_2\Rightarrow E_2=0.$$

Таким образом, имеем ограничение $E_2=0$. Это важное условие, фактически оно означает, что дальше в подсистеме из 6 уравнений будем иметь только 5 неизвестных функций.

3 Уравнение второго порядка для функции Φ_0

Из системы (1.2) с учтенным в ней условием $E_2=0$:

$$1)\ mE_1=-\frac{m^2}{2\nu}r\Phi_0,$$

$$2)\ \left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)mE_1+\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)mH_1+m^2\varphi_1=0,$$

$$3)\ \frac{2\nu}{mr}H_1=\varphi_2,$$

$$4)\ -\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\varphi_1+\frac{\nu}{r}\Phi_0=mE_1,$$

$$5)\ \left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\varphi_2+\frac{d}{dr}\Phi_0=0,$$

$$6)\ \left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\varphi_1+\frac{\nu}{r}\varphi_2+mH_1=0$$

(в уравнениях мнимая единица исключена введением переменных $i\Phi_1=\varphi_1, i\Phi_2=\varphi_2$) можно вывести достаточно простое уравнение второго порядка для функции Φ_0. Сначала, с помощью уравнений 3) и 4) исключим функции φ_2 и E_1:

$$1)\ -\frac{2\nu}{r}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\varphi_1+\left(\frac{2\nu^2}{r^2}+m^2\right)\Phi_0=0,$$

$$2)\ \left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{m}\frac{\nu}{r}\Phi_0+$$
$$+\frac{1}{m}\left[m^2-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\varphi_1=0, \quad (3.1)$$

$$5)\ \frac{d}{dr}\Phi_0+\frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)H_1=0,$$

$$6)\ \left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\varphi_1+\frac{1}{m}\left(m^2+\frac{2\nu^2}{r^2}\right)H_1=0.$$

Подействуем на уравнение 5) в (3.1) оператором $\frac{d}{dr}$:

$$\frac{d^2}{dr^2}\Phi_0-\frac{2\nu}{mr^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)H_1-\frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}H_1+$$

$$+\frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{d}{dr}H_1=0.$$

Затем с помощью уравнения 2) в (3.1)

$$\frac{d}{dr}H_1=$$

$$=-\left[\frac{1}{r}H_1+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{m}\frac{\nu}{r}\Phi_0+\frac{1}{m}\left[m^2-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\varphi_1\right]$$

получим

$$\frac{d^2}{dr^2}\Phi_0-\frac{2\nu}{mr^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)H_1-\frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}H_1-$$

$$-\frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\left[\frac{1}{r}H_1+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\frac{1}{m}\frac{\nu}{r}\Phi_0+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{m}\left[m^2-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\varphi_1\right]=0 ,$$

или

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}-\frac{2\nu^2}{m^2r^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\Phi_0-$$

$$-\left[\frac{2\nu}{mr^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)+\frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}+\frac{2\nu}{mr^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\right]H_1-$$

$$-\frac{2\nu}{m^2r}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\left[m^2-\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2\right]\varphi_1=0.$$

Чтобы исключить отсюда функцию φ_1, воспользуемся уравнением 1) в (3.1):

$$\frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\varphi_1=\frac{1}{m}\left(m^2+\frac{2\nu^2}{r^2}\right)\Phi_0;$$

так приходим к

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-m^2-\frac{2\nu^2}{r^2}\right]\Phi_0-$$

$$-\frac{4\nu}{mr^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)H_1-\frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}H_1=0.$$

Теперь воспользуемся уравнением 5) в (3.1)

$$\frac{d}{dr}\Phi_0+\frac{2\nu}{mr}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)H_1=0;$$

тогда получим

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)^2-m^2-\frac{2\nu^2}{r^2}+\frac{2}{r}\frac{d}{dr}\right]\Phi_0-$$

$$-\frac{2\nu}{mr}\frac{\alpha}{r^2}H_1=0.$$

Наконец, воспользовавшись еще раз уравнением 5) в (3.1):

$$-\frac{mr}{2\nu}\frac{1}{(\varepsilon+\frac{\alpha}{r})}\frac{d}{dr}\Phi_0=H_1,$$

приходим к уравнению второго порядка для функции Φ_0 :

$$\left[\frac{d^2}{dr^2}+\left(\frac{3}{r}-\frac{\varepsilon}{\varepsilon r+\alpha}\right)\frac{d}{dr}+\varepsilon^2-\right.$$

$$\left.-m^2+\frac{2\varepsilon\alpha}{r}+\frac{\alpha^2-2\nu^2}{r^2}\right]\Phi_0=0.$$

Это уравнение в переменной

$$z=-\frac{\varepsilon}{\alpha}r<0,\ \ r=-\frac{\alpha}{\varepsilon}z$$

примет вид

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2}+\left(\frac{3}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\frac{d\Phi_0}{dz}+$$
$$+\left(\alpha^2-\frac{\alpha^2}{E_0^2}-\frac{2\alpha^2}{z}-\frac{2\nu^2-\alpha^2}{z^2}\right)\Phi_0=0, \qquad (3.2)$$

где все величины безразмерные; в частности, $m^2/\varepsilon^2=M^2c^4/E^2=1/E_0^2$. Будем пользоваться обозначениями

$$\Gamma^2=2\nu^2-\alpha^2=j(j+1)-\alpha^2>0,$$

$$-\Lambda^2=-\left(-\alpha^2+\frac{\alpha^2}{E_0^2}\right)=-\alpha^2\frac{1-E_0^2}{E_0^2}<0;$$

тогда уравнение (3.2) запишется так:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2}+\left(\frac{3}{z}-\frac{1}{z-1}\right)\frac{d\Phi_0}{dz}+$$
$$+\left(-\Lambda^2-\frac{2\alpha^2}{z}-\frac{\Gamma^2}{z^2}\right)\Phi_0=0. \qquad (3.3)$$

Можно ввести квадрат эффективного импульса

$$P^2(z)=-\Lambda^2-\frac{2\alpha^2}{z}-\frac{\Gamma^2}{z^2};$$

в физических особых точках он ведет себя так:

$$z\to 0,\ \ P^2(x)\sim-\frac{\Gamma^2}{z^2}\sim-\infty;$$

$$z\to\infty,\ \ P^2(x)\sim-\Lambda^2<0.$$

Две точки поворота задаются уравнением $\Lambda^2z^2+2\alpha^2z+\Gamma^2=0$, они равны

$$z_{1,2}=\frac{-\alpha^2\pm\sqrt{\alpha^4-\Gamma^2\Lambda^2}}{\Lambda^2}.$$

Обе точки поворота лежат в отрицательной области переменной z (значит, лежат в физической области), если

$$\alpha^4-\Gamma^2\Lambda^2<0\ \Rightarrow\ E_0^2<1-\frac{\alpha^2}{\Gamma^2+\alpha^2}.$$

Это качественное рассмотрение указывает на возможность существования решений, соответствующих связанным состояниям системы; уровни энергии будут описаны ниже.

4 Анализ уравнения для функции Φ_0

Обратимся к уравнению (3.3). Оно имеет две регулярные точки $z=0,\ 1$ и одну нерегулярную $z=\infty$ ранга 2. Рассмотрим поведение решений Φ_0 около точки $z=0$:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2}+\frac{3}{z}\frac{d\Phi_0}{dz}-\frac{\Gamma^2}{z^2}\Phi_0=0,\ \ \Phi_0\sim z^A,$$

$$A_1 = -1+\sqrt{1+\Gamma^2} > 0,\ A_2 = -1-\sqrt{1+\Gamma^2} < 0;$$

связанным состояниям (решения должны быть конечными в $r = 0$) соответствуют положительные значения для A. В области $z = \infty$ решения ведут себя так:

$$\frac{d^2\Phi_0}{dz^2} + \frac{2}{z}\frac{d\Phi_0}{dz} - \Lambda^2\Phi_0 = 0,$$

$$\Phi_0 = e^{+\sqrt{\Lambda^2}\,z} = e^{-\sqrt{M^2c^4-E^2}\,r/\hbar c};$$

используем только решения, затухающие на бесконечности. Около нефизической особой точки решения ведут себя вполне регулярно:

$$\Phi_0(z) \sim (z-1)^{\sigma},\ \sigma = 0, 2.$$

Будем строить решения уравнения (3.3) в виде $\Phi_0(z) = z^A e^{Bz} f(z);$ находим уравнение для функции f:

$$f'' + \left(2B + \frac{2A+3}{z} - \frac{1}{z-1}\right)f' + \\ +\left[(B^2-\Lambda^2) + \frac{A^2+2A-\Gamma^2}{z^2} + \right. \\ \left. + \frac{2AB+A+3B-2\alpha^2}{z} - \frac{A+B}{z-1}\right]f = 0. \quad (4.1)$$

Выбрав A и B так:

$$A = -1+\sqrt{1+\Gamma^2},\ B = +\sqrt{\Lambda^2},$$

уравнение приводим к более простому виду

$$f'' + \left(2B + \frac{2A+3}{z} - \frac{1}{z-1}\right)f' + \\ +\left(\frac{2AB+A+3B-2\alpha^2}{z} - \frac{A+B}{z-1}\right)f = 0.$$

Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна [6], [7]

$$H'' + \left(-t + \frac{c}{z} + \frac{d}{z-1}\right)H' + \frac{\lambda - taz}{z(z-1)}H = 0,$$

с параметрами

$$t = -2B,\ c = 2A+3,\ d = -1,$$

$$-\lambda = 2AB + 3B + A - 2\alpha^2,\ -ta = 2BA + 2B - 2\alpha^2.$$

Для параметра a находим выражение $a = A + 1 - \alpha^2 / B;$ и далее получаем

$$a = +\sqrt{1+\Gamma^2} - \alpha^2/\Lambda.$$

Решения уравнения (4.1) строим в виде степенных рядов: $f = \sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$. Получив уравнение

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)d_n z^n - \sum_{n=1}^{\infty}(n+1)nd_{n+1}z^n - \\ -t\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)d_{n-1}z^n + (t+d+c)\sum_{n=1}^{\infty} nd_n z^n - \\ -c\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)d_{n+1}z^n + \lambda\sum_{n=0}^{\infty} d_n z^n - ta\sum_{n=1}^{\infty} d_{n-1}z^n = 0,$$

приходим к 3-членным рекуррентным соотношениям

$$n = 0,\ cd_1 + \lambda d_0 = 0;$$

$$n \ge 1,2,3,...\quad t(n-1+a)d_{n-1} - \\ -[n(n-1+t+d+c)+\lambda]d_n + (n+1)(n+c)d_{n+1} = 0.$$

Рекуррентную формулу можно переписать так:

$$n = 0,\ cd_1 + \lambda d_0 = 0,$$

$$n = 1,2,...\ P_n d_n - (Q_n+\lambda)d_{n+1} + R_n d_{n+2} = 0, \quad (4.2)$$

где

$$P_n = t(n-1+a),$$

$$Q_n = n(n-1+t+d+c),$$

$$R_n = (n+1)(n+c).$$

Соотношение (4.2) эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{n^2}P_n - \frac{1}{n^2}(Q_n+\lambda)\frac{d_{n+1}}{d_n} + \frac{1}{n^2}R_n\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}}\frac{d_{n+1}}{d_n} = 0;$$

отсюда при $n \to \infty$ находим простое алгебраическое уравнение

$$-r + r^2 = 0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+1}}{d_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{d_{n+2}}{d_{n+1}} = r.$$

Согласно методу Пуанкаре – Перрона заключаем, что минимальный (и значит гарантированный) радиус сходимости равен $R_{conv} = 1$. Другая возможность для радиуса сходимости – это $R'_{conv} = \infty$. Нет оснований полагать, что ряд не сходится в области $R'_{conv} = \infty$, поскольку около третьей особой точки $z = 1$ решения ведут себя вполне регулярно. Однако желателен более детальный анализ этого вопроса.

Если накладывать только первое условие $a = -n$, опуская второе $d_{n+1} = 0$, то приходим к классу так называемых трансцендентных вырожденных функций Гойна [6] (они не являются полиномами):

$$a = -n,\ n = 0,1,2,3.... \quad (4.3)$$

С использованием обозначения

$$N \equiv n + \sqrt{1+\Gamma^2} = n + \sqrt{1+j(j+1)-\alpha^2}$$

правило квантования (4.3) приводит к

$$N = \frac{\alpha^2}{\Lambda} \equiv \alpha\sqrt{\frac{E_0^2}{1-E_0^2}},$$

откуда следует формула для уровней энергии

$$E_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\alpha^2/N^2}},\ N = n + \sqrt{1+j(j+1)-\alpha^2}.$$

Полученная формула для энергий представляется разумной с физической точки зрения, ее можно рассматривать как описывающую вторую серию связанных состояний с четностью $P = (-1)^j$ для векторной частицы в кулоновском поле.

Анализ показывает, что при дальнейшем комбинировании уравнений внутри полученной системы мы приходим к уравнениям с одними и теми же (несколькими) наборами сингулярных точек. В рамках настоящей статьи не излагаются все эти возможности. Это можно рассматривать как обнадеживающий фактор. Вместе с тем анализ системы уравнений не следует считать законченным. Например, заранее неясно, какие спектры энергии могут возникнуть из анализа разных уравнений второго порядка; множество разных спектров едва ли может рассматриваться удовлетворительным ответом. Еще одна сложность заключается в том, что отсутствуют рецепты выделения решений для связанных состояний, если уравнение содержит достаточно сложный набор сингулярных точек.

В связи с этим дальше возвратимся снова к исходной системе из 6 уравнений, не учитывая следствия их условия Лоренца (само условие Лоренца – это следствие этой же системы уравнений, поэтому учитывать его с самого начала необязательно).

5 Анализ системы из четырех дифференциальных уравнений

Исходим из полученной ранее системы 6 радиальных уравнений, описывающей состояния с фиксированной пространственной четностью $P=(-1)^j$, $j=1,2,...$:

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_2-2i\frac{\nu}{r}H_1-M\Phi_2=0,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_1+\frac{\nu}{r}\Phi_0-ME_1=0,$$

$$\left(\frac{d}{dr}+\frac{2}{r}\right)E_2+2\frac{\nu}{r}E_1+M\Phi_0=0,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)H_1-M\Phi_1=0,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{r}\right)\Phi_2+\frac{d}{dr}\Phi_0+ME_2=0,$$

$$i\left(\frac{d}{dr}+\frac{1}{r}\right)\Phi_1+i\frac{\nu}{r}\Phi_2+MH_1=0.$$

Размерности величин определяются соотношениями

$$M=\frac{mc}{\hbar}=\frac{1}{\lambda},\ [M]=\frac{1}{L},$$

$$\varepsilon=\frac{E}{\hbar c},\ [\varepsilon]=\frac{1}{L},\ \alpha=\frac{e^2}{\hbar c}=\frac{1}{137}.$$

Фактически, можно перейти полностью к безразмерным параметрам, если учесть присутствие в уравнениях комптоновской длины волны λ и за единицу измерения энергии выбрать энергию покоя частицы mc^2: $rM->x$, $\varepsilon/M=E/mc^2->\varepsilon$, в результате имеем

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)E_2-2i\frac{\nu}{x}H_1-\Phi_2=0,$$

$$-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)\Phi_1+\frac{\nu}{x}\Phi_0-E_1=0,$$

$$\left(\frac{d}{dx}+\frac{2}{x}\right)E_2+2\frac{\nu}{x}E_1+\Phi_0=0,$$

$$+i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)E_1+i\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{r}\right)H_1-\Phi_1=0,$$

$$i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)\Phi_2+\frac{d}{dx}\Phi_0+E_2=0,$$

$$i\left(\frac{d}{dx}+\frac{1}{x}\right)\Phi_1+i\frac{\nu}{x}\Phi_2+H_1=0.$$

С использованием подстановок

$$\Phi_1=\frac{1}{x}\varphi_1,\ E_2=\frac{1}{x^2}e_2,\ H_1=\frac{1}{x}h_1$$

преобразуем систему к виду

$$\Phi_2=i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)\frac{1}{x^2}e_2-2i\frac{\nu}{x^2}h_1,$$

$$E_1=-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)\frac{1}{x}\varphi_1+\frac{\nu}{x}\Phi_0,$$

$$\frac{d}{dx}e_2=-2\nu xE_1-x^2\Phi_0,$$

$$\frac{d}{dx}h_1=-(x\varepsilon+\alpha)E_1-i\varphi_1,$$

$$\frac{d}{dx}\Phi_0=-i\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)\Phi_2-\frac{1}{x^2}e_2,$$

$$\frac{d}{dx}\varphi_1=-\nu\Phi_2+ih_1.$$

С помощью двух первых уравнений исключаем функции Φ_2, E_1:

$$\frac{d}{dx}e_2=2i\nu\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)\varphi_1-(2\nu^2+x^2)\Phi_0,$$

$$\frac{d}{dx}h_1=+i\left[\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)^2-1\right]\varphi_1-\nu\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)\Phi_0;$$

$$\frac{d}{dx}\varphi_1=-\frac{i\nu}{x^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)e_2+i\left(\frac{2\nu^2}{x^2}+1\right)h_1,$$

$$\frac{d}{dx}\Phi_0=\frac{1}{x^2}\left[\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)^2-1\right]e_2-\frac{2\nu}{x^2}\left(\varepsilon+\frac{\alpha}{x}\right)h_1.$$

Для дальнейшего удобно использовать обобщенные обозначения:

$$a=2i\nu\frac{\varepsilon x+\alpha}{x},\ c=-(2\nu^2+x^2),$$

$$d=i\frac{(\varepsilon x+\alpha)^2-x^2}{x^2},\ b=-\frac{\nu(\varepsilon x+\alpha)}{x},$$

$$A=-i\frac{\nu(\varepsilon x+\alpha)}{x^3},\ B=-\frac{2\nu(\varepsilon x+\alpha)}{x^3},$$

$$C=+i\frac{(2\nu^2+x^2)}{x^2},\ D=\frac{(\varepsilon x+\alpha)^2-x^2}{x^4},$$

$$ab-cd=ip(x),\ AB-CD=-i\frac{p(x)}{x^4},$$

$$p(x)=(\varepsilon^2-1)x^2+2\alpha\varepsilon x-(2\nu^2-\alpha^2);$$

также переобозначим неизвестные функции: $e_2=f_1$, $h_1=f_2$, $\varphi_1=f_3$, $\Phi_0=f_4$. Тогда получим уравнения

$$\frac{d}{dx}f_1 = af_3 + cf_4,\ \frac{d}{dx}f_2 = df_3 + bf_4;$$

$$\frac{d}{dx}f_3 = Af_1 + Cf_2,\ \frac{d}{dx}f_4 = Df_1 + Bf_2. \qquad (5.1)$$

Выше в разделе 2 после комбинирования уравнений друг с другом было выведено ограничение $E_2 = 0$. Исследуем эту возможность еще раз; кроме того, будем накладывать такого рода внешние условия и на другие три функции.

Накладываем в системе (5.1) ограничение $f_1 = 0$ (тем самым исследуем проекцию полного решения $\{f_1, ..., f_4\}$ на плоскость $f_1 = 0$); при этом получаем уравнения

$$af_3 + cf_4 = 0,\ df_3 + bf_4 = \frac{d}{dx}f_2,$$
$$\frac{d}{dx}f_3 = Cf_2,\ \frac{d}{dx}f_4 = Bf_2. \qquad (5.2)$$

Рассматривая первые два уравнения как линейные относительно f_3 и f_4, находим

$$f_3 = \frac{-c}{ab-cd}\frac{d}{dx}f_2,\ f_4 = \frac{a}{ab-cd}\frac{d}{dx}f_2.$$

Подставляя эти равенства в оставшиеся два уравнения, получаем два разных уравнения второго порядка для функции f_2:

$$\frac{d}{dr}\frac{-c}{ab-cd}\frac{d}{dr}f_2^I = Cf_2^I,$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{2\nu^2+x^2}{p(x)}\frac{d}{dx} + \frac{2\nu^2+x^2}{x^2}\right)f_2^I = 0;$$

$$\frac{d}{dr}\frac{a}{ab-cd}\frac{d}{dr}f_2^{II} = Bf_2^{II},$$

$$\left(\frac{d}{dx}\frac{\varepsilon x+\alpha}{xp(x)}\frac{d}{dx} + \frac{(\varepsilon x+\alpha)}{x^3}\right)f_2^{II} = 0.$$

Таким образом, система уравнений (5.2), описывающая проекцию решения на плоскость $f_1 = 0$, может быть решена на основе использования двух основных функций $f_1 = f_1^I, f_1^{II}$, подчиняющихся существенно различным дифференциальным уравнениям второго порядка, при этом в каждом случае для остальных трех функций получаем также разные представления. Другими словами, проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_1 = 0$ состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_2^I и f_2^{II}. По существу понятие «проекция решения» – это определение; оправдание для его использования в том, что этот прием позволяет получить некоторую дополнительную информацию о решениях, которые мы хотели бы построить.

Накладываем условие $f_2 = 0$; тогда имеем уравнения

$$af_3 + cf_4 = \frac{d}{dx}f_1,\ 0 = df_3 + bf_4,$$

$$\frac{d}{dx}f_3 = Af_1,\ \frac{d}{dx}f_4 = Df_1.$$

Из первых двух уравнениях находим f_3, f_4; в результате имеем

$$f_3 = \frac{b}{ab-cd}\frac{d}{dx}f_1,\ f_4 = \frac{-d}{ab-cd}\frac{d}{dx}f_1,$$

$$\frac{d}{dx}f_3 = Af_1,\ \frac{d}{dx}f_4 = Df_1.$$

Из двух последних уравнений находим два разных уравнения для f_1:

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{(\varepsilon x+\alpha)}{xp(x)}\frac{d}{dx} + \frac{(\varepsilon x+\alpha)}{x^3}\right]f_1^I = 0;$$

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{(\varepsilon x+\alpha)^2 - x^2}{x^2 p(x)}\frac{d}{dx} + \frac{(\varepsilon x+\alpha)^2 - x^2}{x^4}\right]f_1^{II} = 0.$$

Проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_2 = 0$ также состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_1^I, f_1^{II}.

Накладываем условие $f_3 = 0$, тогда имеем уравнения

$$\frac{d}{dx}f_1 = cf_4,\ \frac{d}{dx}f_2 = bf_4,$$

$$Af_1 + Cf_2 = 0,\ Df_1 + Bf_2 = \frac{d}{dx}f_4;$$

откуда получаем эквивалентную систему

$$f_1 = \frac{-C}{AB-CD}\frac{d}{dx}f_4,\ f_2 = \frac{A}{AB-CD}\frac{d}{dx}f_4,$$

$$\frac{d}{dx}f_1 = cf_4,\ \frac{d}{dx}f_2 = bf_4.$$

Таким образом, находим два разных уравнения для f_4:

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{(2\nu^2+x^2)x^2}{p(x)}\frac{d}{dx} + (2\nu^2+x^2)\right]f_4^I = 0;$$

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{(\varepsilon x+\alpha)x}{p(x)}\frac{d}{dx} + \frac{\varepsilon x+\alpha}{x}\right]f_4^{II} = 0.$$

Проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_3 = 0$ состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_4^I, f_4^{II}.

Накладываем условие $f_4 = 0$, тогда имеем уравнения

$$Af_1 + Cf_2 = \frac{d}{dr}f_3,\ Df_1 + Bf_2 = 0,$$

$$\frac{d}{dx}f_1 = af_3,\ \frac{d}{dr}f_2 = df_3,$$

откуда следует эквивалентная система

$$f_1 = \frac{B}{AB-CD}\frac{d}{dx}f_3,\ f_2 = \frac{-D}{AB-CD}\frac{d}{dx}f_3,$$

$$\frac{d}{dx}f_1 = af_3,\ \frac{d}{dx}f_2 = df_3.$$

Два последних уравнения дают разные уравнения для f_3 : :

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{2\nu(\varepsilon x+\alpha)x}{p(x)}\frac{d}{dx}+\frac{2\nu(\varepsilon x+\alpha)}{x}\right]f_3^I=0,$$

$$\left[\frac{d}{dx}\frac{(\varepsilon x+\alpha)^2-x^2}{p(x)}+\frac{(\varepsilon x+\alpha)^2-x^2}{x^2}\right]f_3^{II}=0.$$

Проекция полного решения $\{f_i(x)\}$ на плоскость $f_4=0$ состоит из двух частей, связанных соответственно с функциями f_3^I, f_3^{II}.

Найдем явный вид всех полученных уравнений второго порядка и проследим за характером их сингулярностей; напоминаем, что

$$p(x)=(\varepsilon^2-1)(x-x_1)(x-x_2),$$

$$x_{1,2}=\frac{\varepsilon\pm\sqrt{2\nu^2\varepsilon^2-(2\nu^2-\alpha^2)}}{1-\varepsilon^2},$$

это комплексные корни, если следим за связанными состояниями: $0<\varepsilon<1$.

Проекция $f_1=0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{2x}{x^2+2\nu^2}-\frac{p'}{p}\right)\frac{d}{dx}+\frac{p}{x^2}\right]f_2^I=0,$$

особые точки $x_1,\ x_2, x_{3,4}=\pm i\sqrt{2\nu^2},\ 0, \infty_{[2]}$.

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x+\alpha}-\frac{1}{x}-\frac{p'}{p}\right)\frac{d}{dx}+\frac{p}{x^2}\right]f_2^{II}=0,$$

особые точки $x_1,\ x_2, x_5=-\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0, \infty_{[2]}$.

Проекция $f_2=0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x+\alpha}-\frac{1}{x}-\frac{p'}{p}\right)\frac{d}{dx}+\frac{p}{x^2}\right]f_1^I=0.$$

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{2(\varepsilon x+\alpha)\varepsilon-2x}{(\varepsilon x+\alpha)^2-x^2}-\frac{2}{x}-\frac{p'}{p}\right)\frac{d}{dx}+\frac{p}{x^2}\right]f_1^{II}=0,$$

корни уравнения $(\varepsilon x+\alpha)^2-x^2=0$:

$$x_{3,4}=-\frac{\alpha}{\varepsilon+1},\quad \frac{\alpha}{1-\varepsilon}.$$

Здесь имеем уравнение с сингулярными точками: $x_1, x_2, x_3, x_4, 0, \infty_{[2]}$.

Проекция $f_3=0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{2x}{2\nu^2+x^2}+\frac{2}{x}-\frac{p'}{p}\right)\frac{d}{dx}-\frac{p}{x^2}\right]f_4^I=0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_{3,4}=\pm i\sqrt{2\nu^2}, 0, \infty_{[2]}$.

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x+\alpha}+\frac{1}{x}-\frac{p'}{p}\right)+\frac{p}{x^2}\right]f_4^{II}=0,$$

особые точки $x_1,\ x_2, x_5=-\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0, \infty_{[2]}$.

Проекция $f_4=0$. Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon x+\alpha}+\frac{1}{x}-\frac{p'}{p}\right)\frac{d}{dx}+\frac{p}{x^2}\right]f_3^I=0,$$

особые точки $x_1,\ x_2, x_5=-\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0, \infty_{[2]}$.

Уравнение

$$\left[\frac{d^2}{dx^2}+\left(\frac{2(\varepsilon x+\alpha)\varepsilon-2x}{(\varepsilon x+\alpha)^2-x^2}-\frac{p'}{p}\right)\frac{d}{dx}+\frac{p}{x^2}\right]f_3^{II}=0,$$

особые точки $x_1, x_2, x_3, x_4, 0, \infty_{[2]}$.

6 Уравнения 4-го порядка

Исходим из системы уравнений

$$\frac{d}{dx}f_1=af_3+cf_4,\ \frac{d}{dx}f_2=df_3+bf_4,$$

$$\frac{d}{dx}f_3=Af_1+Cf_2,\ \frac{d}{dx}f_4=Df_1+Bf_2.$$

Она эквивалентна следующей системе:

$$f_1=\frac{Bf'_3-Cf'_4}{AB-CD},\ f_2=\frac{-Df'_3+Af'_4}{AB-CD},$$

$$f_3=\frac{bf'_1-cf'_2}{ab-cd},\ f_4=\frac{-df'_1+af'_2}{ab-cd}. \quad (6.1)$$

Сначала исключим функции f_3, f_4 :

$$f_1=\frac{B}{(AB-CD)}\frac{d}{dx}\frac{bf'_1-cf'_2}{ab-cd}-$$

$$-\frac{C}{(AB-CD)}\frac{d}{dx}\frac{-df'_1+af'_2}{ab-cd},$$

$$f_2=-\frac{D}{(AB-CD)}\frac{d}{dx}\frac{bf'_1-cf'_2}{ab-cd}+$$

$$+\frac{A}{(AB-CD)}\frac{d}{dx}\frac{-df'_1+af'_2}{ab-cd}.$$

Учитывая явный вид $a(x), ..., D(x)$, предыдущую систему уравнений приводим к виду

$$\left(K_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+K_1(x)\frac{d}{dx}+K_0(x)\right)f_1=\frac{df_2}{dx},$$

$$\left(L_2(x)\frac{d^2}{dx^2}+L_1(x)\frac{d}{dx}+L_0(x)\right)f_2=\frac{df_1}{dx},\quad (6.2)$$

где использованы обозначения

$$K_2(x)=\frac{1}{2}\frac{-x^5\varepsilon^2-2x^4\alpha\varepsilon+2\nu^2x^3+x^5-x^3\alpha^2}{x\left(2\varepsilon x^3+3\alpha x^2+2\alpha\nu^2\right)\nu},$$

$$K_1(x)=\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2-1}{\varepsilon\nu}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\alpha\left(3x^2-x^2\varepsilon^2-\varepsilon x\alpha+2\nu^2\right)}{\varepsilon\nu\left(2\varepsilon x^3+3\alpha x^2+2\alpha\nu^2\right)}+\frac{1}{2}\frac{\alpha}{x\nu},$$

$$K_0(x)=-\frac{1}{4}\frac{\left(\left(\varepsilon^2-1\right)x^2+2\varepsilon x\alpha-2\nu^2+\alpha^2\right)^2}{\nu\left(\varepsilon x^3+3/2\alpha x^2+\alpha\nu^2\right)},$$

$$L_2(x)=\frac{\left(x^5\varepsilon^2+2x^4\alpha\varepsilon-x^5+x^3\alpha^2-2\nu^2x^3\right)x}{\left(x^2+x^2\varepsilon^2+2\varepsilon x\alpha+\alpha^2\right)\nu\alpha},$$

$$L_1(x) = \frac{\left(2\varepsilon x\alpha\nu^2 + 2x^3\varepsilon\alpha + 2x^2\alpha^2 + 2\nu^2\alpha^2\right)x}{\left(x^2 + x^2\varepsilon^2 + 2\varepsilon x\alpha + \alpha^2\right)\nu\alpha},$$

$$L_0(x) = \frac{\left(\left(\varepsilon^2 - 1\right)x^2 + 2\varepsilon x\alpha - 2\nu^2 + \alpha^2\right)^2 x^2}{\nu\left(x^2 + x^2\varepsilon^2 + 2\varepsilon x\alpha + \alpha^2\right)\alpha}.$$

Исключаем функцию f_2:

$$f_2(x) = \int\left(K_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + K_1(x)\frac{d}{dx} + K_0(x)\right)f_1,$$

$$\left(L_2\frac{d}{dx} + L_1\right)\left(K_2\frac{d^2}{dx^2} + K_1\frac{d}{dx} + K_0\right)f_1 +$$

$$+L_0\int dx\left(K_2\frac{d^2}{dx^2} + K_1\frac{d}{dx} + K_0\right)f_1 = 0.$$

Второе уравнение нужно разделить на $L_0(x)$ и полученное соотношение продифференцировать, так получим дифференциальное уравнение 4-го порядка для функции $f_1(x)$:

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{L_2}{L_0}\frac{d}{dx} + \frac{L_1}{L_0}\right)\left(K_2\frac{d^2}{dx^2} + K_1\frac{d}{dx} + K_0\right) +\right.$$

$$\left. +\left(K_2\frac{d^2}{dx^2} + K_1\frac{d}{dx} + K_0\right)\right\}f_1(x) = 0.$$

Аналогично получаем уравнение 4-го порядка для функции f_2:

$$\left\{\frac{d}{dx}\left(\frac{K_2}{K_0}\frac{d}{dx} + \frac{K_1}{K_0}\right)\left(L_2\frac{d^2}{dx^2} + L_1\frac{d}{dx} + L_0\right) +\right.$$

$$\left. +\left(L_2\frac{d^2}{dx^2} + L_1\frac{d}{dx} + L_0\right)\right\}f_2(x) = 0.$$

Получим явный вид системы второго порядка для функций f_3, f_4. Для этого из системы

$$f_1 = \frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD},\quad f_2 = \frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD},$$

$$f_3 = \frac{bf'_1 - cf'_2}{ab - cd},\quad f_4 = \frac{-df'_1 + af'_2}{ab - cd}$$

исключим f_1, f_2, в результате получаем

$$f_3 = \frac{b}{ab - cd}\frac{d}{dx}\frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD} -$$

$$-\frac{c}{ab - cd}\frac{d}{dx}\frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD},$$

$$f_4 = -\frac{d}{ab - cd}\frac{d}{dx}\frac{Bf'_3 - Cf'_4}{AB - CD} +$$

$$+\frac{a}{ab - cd}\frac{d}{dx}\frac{-Df'_3 + Af'_4}{AB - CD}.$$

Учитывая явный вид $a(x), ..., D(x)$, предыдущую систему уравнений приводим к виду

$$\left(P_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + P_1(x)\frac{d}{dx} + P_0(x)\right)f_3 = \frac{df_4}{dx},$$

$$\left(Q_2(x)\frac{d^2}{dx^2} + Q_1(x)\frac{d}{dx} + Q_0(x)\right)f_4 = \frac{df_3}{dx},$$

где использованы обозначения

$$P_2(x) = \frac{ix^2\left(2\nu^2 - \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon x\alpha - \alpha^2 + x^2\right)}{\nu\left(2x^3\varepsilon + 2\nu^2\alpha + 3x^2\alpha\right)},$$

$$P_1(x) = \frac{2i\nu\left(\varepsilon x\alpha + \alpha^2 + 2x^2\right)}{x\left(2x^3\varepsilon + 2\nu^2\alpha + 3x^2\alpha\right)},$$

$$P_0(x) = \frac{-i\left(\left(\varepsilon^2 - 1\right)x^2 + 2\varepsilon x\alpha - 2\nu^2 + \alpha^2\right)^2}{2\nu\varepsilon x^3 + 3\nu\alpha x^2 + 2\nu^3\alpha},$$

$$Q_2(x) = \frac{1}{2}\frac{ix^4\left(2\nu^2 - \varepsilon^2 x^2 - 2\varepsilon x\alpha - \alpha^2 + x^2\right)}{\nu\alpha\left(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \varepsilon^2 x^2 + \alpha^2\right)},$$

$$Q_1(x) =$$

$$= \frac{ix\left(\nu^2\left(2x^2 - \alpha^2 - \varepsilon x\alpha\right) - x^2\left(x^2\varepsilon^2 + 2\alpha^2 - x^2 + 3x\varepsilon\alpha\right)\right)}{\nu\alpha\left(2\varepsilon x\alpha + x^2 + \varepsilon^2 x^2 + \alpha^2\right)},$$

$$Q_0(x) = \frac{-1/2i\left(\left(\varepsilon^2 - 1\right)x^2 + 2\varepsilon x\alpha - 2\nu^2 + \alpha^2\right)^2 x^2}{\nu\alpha\left(x^2 + \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon x\alpha + \alpha^2\right)}.$$

Действуя по описанной методике, находим явный вид уравнений 4-го порядка для всех четырех функций f_1, f_2, f_3, f_4.

Уравнения для f_1, f_3 имеют одинаковый набор особых точек (три регулярные и две нерегулярные ранга 3/2):

$$(2\varepsilon x^3 + 3\alpha x^2 + 2\nu^2\alpha) = 2\varepsilon(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3),$$

$$x = 0,\ \ x = \infty,$$

$$f^{IV}{}_1 + \left[-\frac{12x\left(\varepsilon x + \alpha\right)}{2\varepsilon x^3 + 2\nu^2\alpha + 3\alpha x^2} + \frac{6}{x}\right]f'''{}_1 +$$

$$+\left[-2 + 2\varepsilon^2 + \frac{4\varepsilon\alpha}{x} - \frac{18\alpha\left(2\nu^2\alpha + 4\varepsilon\nu^2 x - \alpha x^2\right)}{\left(2\varepsilon x^3 + 2\nu^2\alpha + 3\alpha x^2\right)^2} +\right.$$

$$\left. +\frac{6 + 2\alpha^2 - 4\nu^2}{x^2} + \frac{-30\alpha - 12\varepsilon x}{2\varepsilon x^3 + 2\nu^2\alpha + 3\alpha x^2}\right]f''{}_1 +$$

$$+\left[\frac{72\alpha x\left(\varepsilon x + \alpha\right)}{\left(2\varepsilon x^3 + 2\nu^2\alpha + 3\alpha x^2\right)^2} + \frac{8\varepsilon\alpha}{x^2} + \frac{-4\nu^2 + 2\alpha^2}{x^3} +\right.$$

$$+\frac{6\nu^2 - 6\alpha^2 - 12 + 6\varepsilon^2\nu^2}{x\nu^2} + +\frac{1}{\left(2\varepsilon x^3 + 2\nu^2\alpha + 3\alpha x^2\right)\nu^2}\times$$

$$\times\left(24\nu^4\varepsilon - 36\varepsilon\alpha^2\nu^2 - 24x\nu^2\alpha + 18\alpha^3 x - 36\alpha x\varepsilon^2\nu^2 +\right.$$

$$\left.\left. +36\alpha x - 12x^2\nu^2\varepsilon^3 + 24x^2\varepsilon - 12x^2\varepsilon\nu^2 + 12x^2\varepsilon\alpha^2\right)\right]f'{}_1 +$$

$$+\left[1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^4 +\right.$$

$$+\frac{-6\alpha^2 + \nu^2\left(6\varepsilon^2 + 6\varepsilon^2\alpha^2 + 6 - 4\varepsilon^2\nu^2 + 4\nu^2 - 2\alpha^2\right)}{x^2\nu^2} -$$

$$-\frac{4\varepsilon\alpha\left(2\nu^2 - \alpha^2\right)}{x^3} + \frac{-4\alpha^2 + \alpha^4 + 4\nu^4 - 4\alpha^2\nu^2}{x^4} +$$

$$+\frac{1}{\left(2\varepsilon x^3+2\nu^2\alpha+3\alpha x^2\right)\nu^2\alpha}\left(-18\varepsilon^2\alpha^2\nu^2+18\alpha^4-\right.$$
$$-18\alpha^2\nu^2-84\alpha\varepsilon x\nu^2+120\alpha^3\varepsilon x-12\alpha\varepsilon^3 x\nu^2-$$
$$\left.-48x^2\varepsilon^2\nu^2+72x^2\varepsilon^2\alpha^2\right)+\frac{1}{\left(2\varepsilon x^3+2\nu^2\alpha+3\alpha x^2\right)^2}\times$$
$$\times\left(72\alpha^4-180\varepsilon^2\alpha^2\nu^2-108\alpha^2\nu^2-72\alpha\varepsilon^3 x\nu^2-\right.$$
$$-216\alpha\varepsilon x\nu^2+288\alpha^3\varepsilon x-$$
$$\left.-144x^2\varepsilon^2\nu^2+162x^2\varepsilon^2\alpha^2-18x^2\alpha^2\right)-$$
$$\left.-\frac{2\alpha^2\nu^2}{x^6}+\frac{4\varepsilon\left(-9\alpha^2-\alpha^2\nu^2+6\nu^2+\varepsilon^2\alpha^2\nu^2\right)}{x\nu^2\alpha}\right]f_1=0,$$

$$f^{IV}{}_3+\left[-\frac{12x(\varepsilon x+\alpha)}{2x^3\varepsilon+3\alpha x^2+2\nu^2\alpha}+\frac{10}{x}\right]f'''{}_3+$$
$$+\left[2\varepsilon^2-2+\frac{4\alpha\varepsilon}{x}+\frac{2\alpha^2-4\nu^2+24}{x^2}+\right.$$
$$+\frac{-66\alpha-48\varepsilon x}{2x^3\varepsilon+3\alpha x^2+2\nu^2\alpha}-$$
$$\left.-\frac{18\alpha\left(2\nu^2\alpha+4x\nu^2\varepsilon-\alpha x^2\right)}{\left(2x^3\varepsilon+3\alpha x^2+2\nu^2\alpha\right)^2}\right]f''{}_3+$$
$$+\left[\frac{-54-6\alpha^2+2\nu^2+10\varepsilon^2\nu^2}{x\nu^2}+\frac{16\alpha\varepsilon}{x^2}+\right.$$
$$+\frac{12+6\alpha^2-12\nu^2}{x^3}-\frac{72\alpha\left(2\varepsilon\nu^2-3\alpha x-2\varepsilon x^2\right)}{\left(2x^3\varepsilon+3\alpha x^2+2\nu^2\alpha\right)^2}+$$
$$+\frac{1}{\left(2x^3\varepsilon+3\alpha x^2+2\nu^2\alpha\right)\nu^2}\times$$
$$\times\left(24\varepsilon\nu^4-36\varepsilon\alpha^2\nu^2-24\varepsilon\nu^2+18\alpha^3x-24\alpha x\nu^2-\right.$$
$$-36\alpha x\varepsilon^2\nu^2+162\alpha x-12x^2\nu^2\varepsilon^3+$$
$$\left.\left.+108\varepsilon x^2+12x^2\varepsilon\alpha^2-12x^2\varepsilon\nu^2\right)\right]f'{}_3+$$
$$+\left[-2\varepsilon^2+\varepsilon^4+1+\right.$$
$$+\frac{-12\alpha^2+\nu^2\left(12\varepsilon^2+6\varepsilon^2\alpha^2+4\nu^2-2\alpha^2-4\nu^2\varepsilon^2+12\right)}{x^2\nu^2}+$$
$$+\frac{1}{\left(2x^3\varepsilon+3\alpha x^2+2\nu^2\alpha\right)\nu^2\alpha}\times$$
$$\times\left(-54\varepsilon^2\alpha^2\nu^2-42\alpha^2\nu^2+36\alpha^4-132\varepsilon x\alpha\nu^2+\right.$$
$$\left.+186\alpha^3\varepsilon x-24\varepsilon^3x\alpha\nu^2-72x^2\varepsilon^2\nu^2+108\alpha^2\varepsilon^2x^2\right)-$$
$$-\frac{4\alpha\varepsilon\left(-2-\alpha^2+2\nu^2\right)}{x^3}-\frac{2\alpha^2\nu^2}{x^6}+$$
$$+\frac{1}{\left(2x^3\varepsilon+3\alpha x^2+2\nu^2\alpha\right)^2}\times$$
$$\times\left(72\alpha^4-180\varepsilon^2\alpha^2\nu^2-108\alpha^2\nu^2-72\varepsilon^3x\alpha\nu^2-\right.$$
$$-216\varepsilon x\alpha\nu^2+288\alpha^3\varepsilon x+$$
$$\left.+162\alpha^2\varepsilon^2x^2-18\alpha^2x^2-144x^2\varepsilon^2\nu^2\right)+$$
$$+\frac{2\varepsilon\left(-27\alpha^2-2\alpha^2\nu^2+18\nu^2+2\varepsilon^2\alpha^2\nu^2\right)}{\alpha x\nu^2}+$$
$$\left.+\frac{-2\alpha^2-4\alpha^2\nu^2-4\nu^2+\alpha^4+4\nu^4}{x^4}\right]f_3=0.$$

Уравнения для f_2, f_4 имеют также одинаковый набор особых точек (две регулярные и две нерегулярные ранга 3/2):

$$(1+\varepsilon^2)x^2+2\varepsilon\alpha x+\alpha^2=(1+\varepsilon^2)(x-x_5)(x-x_6),$$
$$x=0,\;\; x=\infty,$$

$$f^{IV}{}_2+\left[\frac{-4\varepsilon\alpha-4x\varepsilon^2-4x}{2\varepsilon x\alpha+x^2+\alpha^2+\varepsilon^2x^2}+\frac{10}{x}\right]f'''{}_2+$$
$$+\left[-2+2\varepsilon^2+\frac{22-4\nu^2+2\alpha^2}{x^2}-\right.$$
$$-\frac{8\alpha^2}{\left(2\varepsilon x\alpha+x^2+\alpha^2+\varepsilon^2x^2\right)^2}+$$
$$\left.+\frac{32\varepsilon^2\alpha-16\alpha+24x\varepsilon^3+24\varepsilon x}{\left(2\varepsilon x\alpha+x^2+\alpha^2+\varepsilon^2x^2\right)\alpha}+4\frac{\varepsilon\left(-6+\alpha^2\right)}{\alpha x}\right]f''{}_2+$$
$$+\left[\frac{4\varepsilon\left(2\nu^2-6+3\alpha^2\right)}{\alpha x^2}+\frac{24\varepsilon\alpha-8\varepsilon^3\alpha-8x\varepsilon^4+8x}{\left(2\varepsilon x\alpha+x^2+\alpha^2+\varepsilon^2x^2\right)^2}+\right.$$
$$+\frac{1}{\left(2\varepsilon x\alpha+x^2+\alpha^2+\varepsilon^2x^2\right)\alpha^2}\left(-72\varepsilon^3\alpha+8\nu^2\varepsilon^3\alpha+\right.$$
$$+56\varepsilon\alpha+8\varepsilon\alpha^3-24\nu^2\varepsilon\alpha-48x\varepsilon^4+$$
$$\left.+8x\nu^2\varepsilon^4-32x\varepsilon^2+8\varepsilon^2\alpha^2x-8x\nu^2+16x+8\alpha^2x\right)+$$
$$+\frac{8\nu^2-8\nu^2\varepsilon^2-16+48\varepsilon^2-14\alpha^2+6\varepsilon^2\alpha^2}{\alpha^2x}+$$
$$\left.+\frac{-12\nu^2+8+6\alpha^2}{x^3}\right]f'{}_2++\left[\varepsilon^4-2\varepsilon^2+1+\right.$$
$$+\frac{4\varepsilon\left(-24\nu^2+\varepsilon^2\alpha^4+8\nu^2\varepsilon^2+8\alpha^2-\alpha^4\right)}{\alpha^3x}+$$
$$+\frac{24\nu^2+6\varepsilon^2\alpha^2+6\varepsilon^2\alpha^4-24\nu^2\varepsilon^2}{x^2\alpha^2}+$$
$$+\frac{-4\nu^2\varepsilon^2\alpha^2-30\alpha^2-2\alpha^4+4\alpha^2\nu^2}{x^2\alpha^2}$$
$$+\frac{16\alpha^3-16\alpha\nu^2+48\alpha\nu^2\varepsilon^2+32\varepsilon x\nu^2+32\varepsilon^3x\nu^2}{\left(2\varepsilon x\alpha+x^2+\alpha^2+\varepsilon^2x^2\right)^2\alpha}-$$
$$-\frac{2\alpha^2\nu^2}{x^6}+\frac{1}{\left(2\varepsilon x\alpha+x^2+\alpha^2+\varepsilon^2x^2\right)\alpha^3}\times$$
$$\times\left(-40\alpha\nu^2\varepsilon^4-40\alpha^3\varepsilon^2+192\alpha\nu^2\varepsilon^2+24\alpha^3-24\alpha\nu^2-\right.$$
$$\left.-32x\nu^2\varepsilon^5+64\varepsilon^3x\nu^2-32x\varepsilon^3\alpha^2-32\varepsilon\alpha^2x+96\varepsilon x\nu^2\right)+$$
$$+\frac{-8\nu^2-4\alpha^2\nu^2+\alpha^4+4\nu^4}{x^4}-$$

$$-\frac{4\varepsilon\left(2\alpha^2\nu^2-\alpha^4-4\nu^2-2\alpha^2\right)}{\alpha x^3}\Bigg]f_2=0,$$

$$f^{IV}{}_4+\left[\frac{-4\varepsilon\alpha-4x\varepsilon^2-4x}{x^2+\alpha^2+2\varepsilon x\alpha+\varepsilon^2x^2}+14x^{-1}\right]f'''{}_4+$$

$$+\Bigg[2\varepsilon^2-2-\frac{8\alpha^2}{\left(x^2+\alpha^2+2\varepsilon x\alpha+\varepsilon^2x^2\right)^2}+$$

$$+\frac{-4\nu^2+2\alpha^2+52}{x^2}+$$

$$+\frac{44\alpha\varepsilon^2-28\alpha+36x\varepsilon^3+36\varepsilon x}{\left(x^2+\alpha^2+2\varepsilon x\alpha+\varepsilon^2x^2\right)\alpha}+4\frac{\varepsilon\left(\alpha^2-9\right)}{\alpha x}\Bigg]f''{}_4+$$

$$+\Bigg[\frac{-8\varepsilon^3\alpha+56\varepsilon\alpha-8x\varepsilon^4+16x\varepsilon^2+24x}{\left(x^2+\alpha^2+2\varepsilon x\alpha+\varepsilon^2x^2\right)^2}+$$

$$+\frac{48+10\alpha^2-20\nu^2}{x^3}+\frac{1}{\left(x^2+\alpha^2+2\varepsilon x\alpha+\varepsilon^2x^2\right)\alpha^2}$$

$$\times\left(8\nu^2\varepsilon^3\alpha-136\varepsilon^3\alpha-24\varepsilon\alpha\nu^2+8\alpha^3\varepsilon+\right.$$

$$+184\varepsilon\alpha-100x\varepsilon^4+8x\nu^2\varepsilon^4-$$

$$\left.-40x\varepsilon^2+8\alpha^2x\varepsilon^2+60x+8\alpha^2x-8x\nu^2\right)+$$

$$+\frac{4\varepsilon\left(-16+5\alpha^2+2\nu^2\right)}{\alpha x^2}+$$

$$+\frac{100\varepsilon^2-60+10\alpha^2\varepsilon^2-18\alpha^2-8\varepsilon^2\nu^2+8\nu^2}{\alpha^2x}\Bigg]f'{}_4+$$

$$+\Bigg[\varepsilon^4-2\varepsilon^2+1+\frac{-20\nu^2+\alpha^4+6\alpha^2+4\nu^4-4\alpha^2\nu^2}{x^4}+$$

$$+\frac{48\alpha\varepsilon^2\nu^2+16\alpha^3-16\alpha\nu^2+32\varepsilon^3x\nu^2+32\varepsilon x\nu^2}{\left(x^2+\alpha^2+2\varepsilon x\alpha+\varepsilon^2x^2\right)^2\alpha}+$$

$$+\frac{32\nu^2-44\alpha^2+12\alpha^2\varepsilon^2+4\alpha^2\nu^2}{x^2\alpha^2}+$$

$$+\frac{-2\alpha^4-4\alpha^2\varepsilon^2\nu^2-32\varepsilon^2\nu^2+6\varepsilon^2\alpha^4}{x^2\alpha^2}-$$

$$-\frac{4\varepsilon\left(-\alpha^4-5\alpha^2-6\nu^2+2\alpha^2\nu^2\right)}{\alpha x^3}-\frac{2\alpha^2\nu^2}{x^6}+$$

$$+\frac{1}{\left(x^2+\alpha^2+2\varepsilon x\alpha+\varepsilon^2x^2\right)\alpha^3}\times$$

$$\times\left(-48\alpha\nu^2\varepsilon^4-48\alpha^3\varepsilon^2+240\alpha\varepsilon^2\nu^2+32\alpha^3-\right.$$

$$-32\alpha\nu^2-40x\varepsilon^5\nu^2-40x\varepsilon^3\alpha^2+$$

$$\left.+80\varepsilon^3x\nu^2-40\varepsilon x\alpha^2+120\varepsilon x\nu^2\right)+$$

$$+\frac{4\varepsilon\left(-30\nu^2+10\alpha^2-\alpha^4+10\varepsilon^2\nu^2+\varepsilon^2\alpha^4\right)}{\alpha^3x}\Bigg]f_4=0.$$

Любую из 4 функций, подчиняющихся уравнению 4-го порядка, можно выбрать как основную, а остальные вычислить из нее.

Пусть основной берется функция f_1. Учтем шесть уравнений (6.1), (6.2):

$$f_1=\frac{Bf'_3-Cf'_4}{AB-CD},\quad f_2=\frac{-Df'_3+Af'_4}{AB-CD},$$

$$f_3=\frac{bf'_1-cf'_2}{ab-cd},\quad f_4=\frac{-df'_1+af'_2}{ab-cd},$$

$$\left(K_2\frac{d^2}{dx^2}+K_1\frac{d}{dx}+K_0\right)f_1=\frac{df_2}{dx},$$

$$\left(L_2\frac{d^2}{dx^2}+L_1\frac{d}{dx}+L_0\right)f_2=\frac{df_1}{dx},$$

из пятого уравнения находим f_2, затем из 3-го и 4-го уравнений находим функции f_3, f_4. Пусть основной берется функция f_2, тогда из шестого уравнения находим f_1, затем из 3-го и 4-го уравнений находим функции f_3, f_4.

Пусть основной берется функция f_3, тогда используем уравнения

$$f_1=\frac{Bf'_3-Cf'_4}{AB-CD},\quad f_2=\frac{-Df'_3+Af'_4}{AB-CD},$$

$$f_3=\frac{bf'_1-cf'_2}{ab-cd},\quad f_4=\frac{-df'_1+af'_2}{ab-cd},$$

$$\left(P_2\frac{d^2}{dx^2}+P_1\frac{d}{dx}+P_0\right)f_3=\frac{df_4}{dx},$$

$$\left(Q_2\frac{d^2}{dx^2}+Q_1\frac{d}{dx}+Q_0\right)f_4=\frac{df_3}{dx},$$

из пятого уравнения находим f_4, затем из 1-го и 2-го уравнений находим функции f_1, f_2. Пусть основной берется функция f_4, тогда из шестого уравнения находим f_3, затем из 1-го и 2-го уравнений находим функции f_1, f_2.

Каждое из уравнений 4-го порядка имеет 4 линейно независимых решений. Из общих физических соображений можно ожидать, что только два из них описывают связанные состояния, порождая тем самым две серии связанных состояний с соответствующими (неизвестными) спектрами энергии.

Заключение

В работе показано, что в системе, описываемой полностью дифференциальными уравнениями 4-го порядка, по-прежнему важную роль играют некоторые связанные с этой системой дифференциальные уравнения 2-го порядка. В частности, комбинированием полученных уравнений удается получить уравнение второго порядка для одной из радиальных функций. Оно может быть отождествлено с вырожденным уравнением Гойна. На основе использования условия, выделяющего так называемые трансцендентные вырожденные функции Гойна, введено условие квантования и найден соответствующий спектр энергии. Таким образом, установлен второй класс связанных состояний.

Предложенным в работе методом можно получить описание некоторых проекций векторов решений – линий в 4-мерном пространстве $\{f_1(r), f_2(r), f_3(r), f_4(r)\}$ последовательно на различные плоскости $f_i = 0,\ i = 1,\ 2,\ 3,\ 4.$ В каждом случае эти проекции состоят из двух частей (ветвей), которые задаются решениями двух разных уравнений второго порядка (в то время как полные решения $\{f_i(r)\}$ определяются дифференциальным уравнением 4-го порядка). С учетом того, что каждое уравнение 4-го порядка имеет 4 независимых решения, установление двух разных уравнений второго порядка с двумя соответствующими независимыми решениями может означать, что тем самым строятся проекции всех этих четырех решений. При этом одна пара решений (по одному из каждой ветви) может отвечать двум дискретным спектрам энергии, а вторая пара может отвечать двум непрерывным спектрам.

При условии, что в каждом случае проекций удастся решить возникающие два уравнения второго порядка, в частности выделив две серии связанных состояний с соответствующими спектрами энергии, остается вопрос – как эти спектры соотносятся с истинными спектрами, которые должны следовать из анализа уравнения 4-го порядка. Кроме того, важным является вопрос, как соотносятся спектры, относящие к проекциям на разные плоскости. Эти все вопросы нуждаются в дальнейшем исследовании.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тамм*, *И.Е.* Движение мезонов в электромагнитных полях / И.Е. Тамм // Докл. АН СССР. – 1940. – Т. 29. – С. 551–554.

2. *Ovsiyuk*, *E.M.* Quantum Kepler Problem for Spin 1/2 Particle in Spaces on Constant Curvature. I. Pauli Theory / E.M. Ovsiyuk // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2011. – Vol. 14, № 1. – P. 14–26.

3. *Kisel*, *V.V.* On the wave functions and energy spectrum for a spin 1 particle in external Coulomb field / V.V. Kisel, E.M. Ovsiyuk, V.M. Red'kov // Nonlinear Phenomena in Complex Systems. – 2010. – Vol. 13, № 4. – P. 352–367.

4. *Кисель*, *В.В.* Волновые функции и спектр энергии для частицы со спином 1 во внешнем кулоновском поле / В.В. Кисель, В.М. Редьков, Е.М. Овсиюк // ДАН Беларуси. –2011. – Т. 55, № 1. – С. 50–55.

5. *Ovsiyuk*, *E.M.* Maxwell Electrodynamics and Boson Fields in Spaces of Constant Curvature / E.M. Ovsiyuk, V.V. Kisel, V.M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers, Inc., 2014. – 486 p.

6. *Ronveaux*, *A.* Heun's differential equation / A. Ronveaux. – Oxford: Oxford University Press, 1995.

7. *Slavyanov*, *S.Yu.* Special functions. A unified theory based on singularities / S.Yu. Slavyanov, W. Lay. – Oxford: Oxford University Press, 2000.

Поступила в редакцию 27.11.17.