Учреждение образования
"ТОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ"
Кафедра теоретической физики

# ТЕОРИЯ ГРУПП СИММЕТРИИ

**Курс лекций**

Специальность

1-31 04 01 Физика (по направлениям)

(1-31 04 01-02 производственная деятельность)

Материал подготовил

**Андреев**

**Виктор Васильевич**

кандидат физ.-мат. наук, доцент

**Гомель, 2012**

# ОГЛАВЛЕНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

## 1 Пару слов о симметрии

“Симметрия — в широком или узком смысле в зависимости от того, как вы определите значение этого понятия,— является той идеей, посредством которой человек на протяжении веков пытался постичь и создать порядок, красоту и совершенство.” [13]

“Пифагорейцы считали на плоскости — окружность, а в пространстве — сферу, в силу их полной поворотной симметрии, наиболее совершенными геометрическими фигурами, а Аристотель приписывал сферическую форму небесным телам, так как, по его мнению, всякая другая форма лишила бы их божественного совершенства.” [13]

В “Кратком Оксфордском словаре” симметрия определяется как “Красота, обусловленная пропорциональностью частей тела или любого целого, равновесием, подобием, гармонией, согласованностью”. Хотя в физике очень много сложного, в ней также много простоты и изящества, что в значительной мере обусловлено симметрией физических законов и физических систем. В соответствии с этим симметрия не только занимает важное место в физике, но и играет все возрастающую роль в современных физических исследованиях.

Понятие симметрии, играющей ведущую, хотя и не всегда осознанную, роль в современной науке, искусстве, технике и окружающей нас жизни. Симметрия пронизывает буквально все вокруг, захватывая, казалось бы, совершенно неожиданные области и объекты. Здесь уместно привести высказывание Дж. Ньюмена, который особенно удачно подчеркнул всеохватывающие и вездесущие проявления симметрии: «Симметрия устанавливает забавное и удивительное сродство между предметами, явлениями и теориями, внешне, казалось бы, ничем не связанными: земным магнетизмом, женской вуалью, поляризованным светом, естественным отбором, теорией групп, инвариантами и преобразованиями, рабочими привычками пчел в улье, строением пространства, рисунками ваз, квантовой физикой, скарабеями, лепестками цветов, интерференционной картиной рентгеновских лучей, делением клеток морских ежей, равновесными конфигурациями кристаллов, романскими соборами, снежинками, музыкой, теорией относительности...».

В современном толковом словаре дается такое определение симметрии:

Симметрия , в геометрии - свойство геометрических фигур. Две точки, лежащие на одном перпендикуляре к данной плоскости (или прямой) по разные стороны и на одинаковом расстоянии от нее, называются симметричными относительно этой плоскости (или прямой). Фигура (плоская или пространственная) симметрична относительно прямой (оси симметрии) или плоскости (плоскости симметрии), если ее точки попарно обладают указанным свойством. Фигура симметрична относительно точки (центр симметрии), если ее точки попарно лежат на прямых, проходящих через центр симметрии, по разные стороны и на равных расстояниях от него.; СИММЕТРИЯ (от греч . symmetria - соразмерность), в широком смысле - инвариантность (неизменность) структуры, свойств, формы материального объекта относительно его преобразований (т. е. изменений ряда физических условий). Симметрия лежит в основе законов сохранения."

ДУША МУЗЫКИ И ПОЭЗИИ - РИТМ!

В поэзии мы имеем дело диалектическим единством симметрии и асимметрии. «Душа музыки – ритм – состоит в правильном периодическом повторении частей музыкального произведения, -

писал в 1908 году известный русский физик Г.В. Вульф. – Правильное же повторение одинаковых частей в целом и составляет сущность симметрии. Мы с тем большим правом можем приложить к музыкальному произведению понятие симметрии, что это произведение записывается при помощи нот, т.е. получает пространственный геометрический образ, части которого мы можем обозревать». Он же писал: «Подобно музыкальным произведениям, могут быть симметричны и произведения словесные, в особенности стихотворения».

В стихотворениях подразумевается, очевидно, симметрия чередования рифм, ударных слогов, то есть опять таки ритмичность. Однако, как в музыке, так и в поэзии симметрию нельзя сводить к ритму. Всякое хорошее произведение (музыкальное или стихотворное) имеет определенные смысловые инварианты, которые проходят, видоизменяясь, через все произведение. Композитор в своей симфонии может по нескольку раз возвращаться к одной и той же теме, постепенно разрабатывая ее.

Сохранение темы и ее изменение (разработка, развитие) – это и есть единство симметрии и асимметрии. И чем удачнее решает композитор или поэт проблему соотношения между симметрией и асимметрией, тем выше художественная ценность создаваемого произведения искусства.

Самое непосредственное отношение к симметрии имеет композиция. Великий немецкий поэт Иоганн Вольфганг Гете утверждал, что «всякая композиция основана на скрытой симметрии». Владеть законами композиции – это значит владеть законами симметрии. Три основных закона композиции предполагают трансляционно-тождественное повторение элементов структуры, контрастное повторение, варьированное повторение. Это выглядит как орнамент во времени.

Действительно, нечто вроде временного орнамента. Нас всегда будут восхищать «орнаменты», созданные великим русским поэтом А.С. Пушкиным. Вот относительно простой, изящный пушкинский «орнамент»:

В тот год осенняя погода
Куртины, кровли и забор,
Стояла долго на дворе
Зимы ждала, ждала природа.
Снег выпал только в январе веселых на дворе
На третье в ночь. Проснувшись рано, устланные горы
В окно увидела Татьяна блистательным ковром.
Поутру побелевший двор, кругом.
На стеклах легкие узоры,
Деревья в зимнем серебре,
Сорок веселых на дворе
И мягко устланные горы
Зимы блистательным ковром.
Все ярко, Все ярко, все бело

Не будем проводить интонационного разбора приведенных примеров пушкинских стихов. Ограничимся тем, что еще и еще раз прочитаем оба отрывка и попробуем полнее ощутить прелесть этих стихотворных «орнаментов».

Наличие симметрии приводит к многочисленным упрощениям физической картины как в классической, так и в квантовой механике.

Приведем пример из классической механики.

Покажем, что наличие интегралов движения (законов сохранения) обусловлено симметрией системы относительно групп непрерывных преобразований.

Рассмотрим систему материальных $N$ точек. Как известно, состояние механической системы описывается функцией Лагранжа:

$$L\left(\vec{\mathbf{r}}\,,\;\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,,\;t\right)=\sum_{i=1}^{N}L\left(\vec{\mathbf{r}}_i,\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i,\,t\right) \tag{1.1}$$

Потребуем, чтобы функция Лагранжа (1.1) была инвариантна относительно группы трансляций в трехмерном пространстве т.е. при преобразовании сдвига для радиус-векторов материальных точек

$$\vec{\mathbf{r}}_i\to\vec{\mathbf{r}}_i{}'=\vec{\mathbf{r}}_i+\vec{\mathbf{a}}\;,\quad\delta\vec{\mathbf{r}}_i=\vec{\mathbf{a}} \tag{1.2}$$

функции Лагранжа не должна измениться

$$L'=L\left(\vec{\mathbf{r}}\,'\,,\;\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,,\;t\right)=L\left(\vec{\mathbf{r}}\,,\;\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,,\;t\right)\;. \tag{1.3}$$

Считая приращение бесконечно малым, разложим лагранжиан $L'$ в окрестности $\vec{\mathbf{r}}$:

$$\begin{aligned}L'&=L\left(\vec{\mathbf{r}}\,'\,,\;\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,,\;t\right)=\\&=L\left(\vec{\mathbf{r}}\,,\;\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,,\;t\right)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L\left(\vec{\mathbf{r}}_i,\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i,\,t\right)}{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}\delta\vec{\mathbf{r}}_i=\\&=L\left(\vec{\mathbf{r}}\,,\;\dot{\vec{\mathbf{r}}}\,,\;t\right)+\vec{\mathbf{a}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L\left(\vec{\mathbf{r}}_i,\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i,\,t\right)}{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}\end{aligned} \tag{1.4}$$

Инвариантность означает, что приращение функции Лагранжа $\delta L$, обусловленное сдвигом (1.2) должно равняться нулю:

$$\delta L=\vec{\mathbf{a}}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial L\left(\vec{\mathbf{r}}_i,\,\dot{\vec{\mathbf{r}}}_i,\,t\right)}{\partial\vec{\mathbf{r}}_i}=0 \tag{1.5}$$

или в силу произвольности вектора $\vec{\mathbf{a}}$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L\left(\vec{\mathbf{r}}_i, \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i, t\right)}{\partial \vec{\mathbf{r}}_i} = 0\ . \tag{1.6}$$

Согласно уравнениям Лагранжа также имеем:

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i} - \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \vec{\mathbf{r}}_i} = 0\ . \tag{1.7}$$

Тогда из (1.6) (требование инвариантности) и (1.7) следует что

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{N} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i} = 0\ . \tag{1.8}$$

Используя определения обобщенного импульса

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{\mathbf{r}}}_i} = \vec{\mathbf{p}}_i \tag{1.9}$$

приходим к тому, что

$$\frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_i\right] = 0 \tag{1.10}$$

или

$$\vec{\mathbf{P}} = \left[\sum_{i=1}^{N} \vec{\mathbf{p}}_i\right] = \mathrm{const}\ . \tag{1.11}$$

Другими словами наше требование инвариантности функции Лагранжа относительно трансляций в трехмерном пространстве приводит к закону сохранения полного импульса системы.

И таких примеров можно привести большое количество.

***Тема 1.*** *Начала теории групп преобразований. Свойства симметрии физических систем. Определение группы. Примеры групп, имеющих приложения в физике. Введение в группы симметрии. Условие инвариантности уравнений движения. Абстрактные группы. Сдвиг по группе. Подгруппа. Сопряженные совокупности. Сопряженные элементы и класс. Инвариантная подгруппа (нормальный делитель). Факторгруппа. Группы перестановок. Циклические перестановки. Четность перестановки. Симметрическая группа. Теорема Кэли. Порядок элемента.*

## 2 Определение группы

Будем говорить, что на множестве $G$ задана бинарная операция умножения, если каждой паре элементов $a, b \in G$ сопоставлен третий элемент $(a \cdot b) \equiv (ab) \in G$ (“умножение”, закон композиции), называемый их **произведением**.

***Определение 2.1***

*Группой называется множество $G$ элементов произвольной природы, на котором бинарная операция $a \cdot b$ такая, что выполняются следующие условия:*

1. **ассоциативность**:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \tag{2.1}$$

для любых элементов $a, b, c$ из $G$;

2. **наличие единицы**: в множестве $G$ существует такой элемент , что

$$(e \cdot a) = (a \cdot e) = a \qquad (2.2)$$

для любого элемента $a \in G$.
Такой элемент $e$ называется **единицей** группы $G$;

3. **наличие обратного элемента**: для любого элемента $\in G$ существует такой элемент $a^{-1} \in G$, что

$$a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = e\ . \qquad (2.3)$$

Такой элемент называется **обратным** к элементу $a$.

**Примечание 1.** Единичный элемент в группе может быть только один.

**Примечание 2.** Для каждого элемента $a$ обратный к нему элемент тоже только один.

**Примечание 3.** Если $c = (ab)$, то $c^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ в силу ассоциативности умножения в группе (см. (2.1)).

Заметим, что порядок сомножителей в произведении элементов группы изменять вообще нельзя т.е. в общем случае:

$$a \cdot b \neq b \cdot a \qquad (2.4)$$

***Определение 2.2***

*Элементы $a, b$ из группы $G$ коммутируют (являются перестановочными), если $a \cdot b = b \cdot a$. Группа $G$ коммутативная, или **абелева**, если любые два ее элемента являются коммутирующими.*

Число элементов в группе не ограничивается; оно может быть бесконечным или конечным.

**Определение 2.3**

*Для конечных групп число элементов называется* ***порядком группы*** *(обозначим его буквой $g$).*

Таким образом, можно говорить о конечных и бесконечных группах. К бесконечным группам относятся, в частности, так называемые непрерывные группы, элементы которых определяется не дискретными символами $a$ и $b$, а непрерывно изменяющимися параметрами.

## 3 Примеры групп

Числа $1, -1, \mathrm{i}$ и $-\mathrm{i}$ образуют группу. Покажем это.

Пусть $I$ - инверсия, т.е., операция, изменяющая направление всякого вектора в трехмерном пространстве на обратное.

$$\mathbf{r}\,(x,y,z) \xrightarrow{\mathrm{I}} -\mathbf{r}\,(-x, -y, -z) \tag{3.1}$$

Очевидно, $\mathrm{I}^2 = E$ (тождественная операция), так что $E$, I образуют группу; она называется группой $S_2$.

**Группа вращений - непрерывная группа преобразований пространства с фиксированной неподвижной точкой (центром вращений), оставляющих неизменным расстояние между двумя произвольными точками**; сохраняются также углы между произвольными векторами.

**Группа вращений $R\,(3)$ (иногда ее записывают как $O^+\,(3)$):** ее элементы — преобразования вращения трехмерного пространства или соответствующие им ортогональные матрицы с определителем, равным единице. Это непрерывная трехпараметрическая группа.

Инвариантность относительно группы $R\,(3)$ выражает свойство изотропности (т. е. равноправности направлений) трехмерного пространства.

Если к группе вращений добавить операцию инверсии I, то получим ортогональную группу $O\,(3)$.

Группа перестановок $n$ символов, например $n$ координат тождественных частиц. Это конечная группа порядка $n!$.

## 4 Сдвиг по группе

Пусть группа $G$ состоит из $m$ элементов

$$g_1,\, g_2, \ldots,\, g_m\;. \tag{4.1}$$

Умножим справа каждый из элементов группы на один и тот же элемент $g_i$, или, как говорят, **произведем правый сдвиг по группе**.

Тогда мы получим последовательность

$$g_1\, g_i,\;\; g_2\, g_i,\;\; \ldots,\;\; g_m\, g_i\;. \tag{4.2}$$

В этой "сдвинутой" последовательности (4.2) каждый элемент группы встречается один и только один раз.

Действительно, пусть $g_k$ — произвольный элемент группы (4.1). Представим, что элемент $g_k$ в виде

$$g_k = \left(g_k g_i^{-1}\right) g_i\;.$$

и, следовательно, элемент $g_k$ содержится в последовательности (4.2). Так как число элементов в нашей последовательности равно порядку группы, то каждый из элементов может содержаться в (4.2) только по одному разу.

Таким же свойством обладает последовательность элементов

$$g_i g_1,\, g_i g_2, \ldots,\, g_i g_m\;. \tag{4.3}$$

получаемая с помощью **левого сдвига**.

## 5 Подгруппы. Порядки элементов

***Определение 5.1***

*Часть элементов группы $G$, которые сами по себе образуют группу с тем же законом умножения, называют **подгруппой группы** $G$.*

Оставшаяся часть группы $G$ не может образовывать группу, так как она не содержит, например, единичного элемента.

Возьмем произвольный элемент $g_i$ конечной группы $G$ и образуем различные степени этого элемента:

$$g_i,\ g_i^2,\ g_i^3,\ \ldots \tag{5.1}$$

Так как мы рассматриваем конечную группу, то члены в этой последовательности должны повторяться. Пусть, например,

$$g_i^{k_1} = g_i^{k_2} = b, \quad k_2 > k_1\ , \tag{5.2}$$

где $b \in G$.

Тогда

$$b = g_i^{k_2} = g_i^{k_1} g_i^{k_2-k_1} = b g_i^{k_2-k_1} \longrightarrow g_i^{k_2-k_1} = e\ . \tag{5.3}$$

***Определение 5.2***

*Наименьший показатель степени $h$, для которого имеет место равенство*

$$a^h = e \tag{5.4}$$

*называется **порядком элемента** $a$.*

***Определение 5.3***

*Совокупность элементов $a$, $a^2$, $\ldots, a^h = e$ называется* ***периодом или циклом элемента*** *$a$ .*

Очевидно, период элемента образует подгруппу группы $G$. Все элементы этой подгруппы коммутируют друг с другом, и, следовательно эта подгруппа будет абелевой. Очень часто в такой ситуации говорят о **циклической подгруппе, порожденной элементом группы** $a$.

Если $h$ – порядок элемента $a$, то в силу соотношения

$$a^{h-1} = a^h a^{-1} = ea^{-1} = a^{-1} \tag{5.5}$$

существование обратных элементов для конечных групп является следствием трех других групповых свойств.

## 6 Сопряженные совокупности

Пусть $H$ — подгруппа группы $G$ с элементами

$$h_1, h_2, \ldots h_m \quad , \tag{6.1}$$

где $m$ — порядок группы . Построим следующую последовательность совокупностей элементов группы $G$.

Сначала возьмем элементы подгруппы $H$, затем выберем из группы $G$ какой-нибудь элемент $g_1$, не содержащийся в , и составим совокупность элементов

$$g_1h_1, g_1h_2, \ldots g_1h_m \quad , \tag{6.2}$$

которую будем обозначать через $g_1H$.

Выберем теперь из группы $G$ элемент $g_2$, который не содержится ни в $H$, ни в $g_1H$, и составим еще одну совокупность $g_2H$.

Продолжим построение таких совокупностей, пока не исчерпаем всю группу. В результате мы получим следующую последовательность, которую будем обозначать:

$$H,\, g_1H,\, g_2H,\, \ldots g_{k-1}H \quad . \tag{6.3}$$

**Определение 6.1**

*Совокупности элементов $g_iH$ называют **сопряженными совокупностями слева по подгруппе** $H$.*

**Теорема 6.1**

*Сопряженные совокупности либо совпадают, либо не имеют ни одного общего элемента.*

Действительно, предположим, что в совокупностях $g_1H$, $g_2H$ имеется один общий элемент, например, $g_1h_1 = g_2h_2$. Тогда $g_2 = g_1h_2h_1^{-1}$, и поскольку $H$ является группой (подгруппой), то произведение $h_2h_1^{-1} = h_3$. Тогда

$$g_2 = g_1h_3$$

и мы получим, что $g_2$ принадлежит совокупности $g_1H$ (6.3). Но этот результат противоречит построению. Таким образом, каждый элемент группы $G$ входит только в одну из сопряженных совокупностей.

В результате группа может быть представлена в виде объединения сопряженных совокупностей (6.3):

$$G = H + g_1H + g_2H + \ldots + g_{k-1}H \quad . \tag{6.4}$$

Если группа $G$ содержит $n$ элементов, а каждая из сопряженных совокупностей $m$ элементов, то

$$n = km \tag{6.5}$$

**Число $k$ называют индексом подгруппы $H$ для группы $G$.**

**Как следует из изложенного выше, порядок подгруппы является делителем порядка группы (теорема Лагранжа).**

Аналогичным образом можно провести разложение группы $G$ на сопряженные совокупности справа:

$$H,\, Hg_1',\, Hg_{2'},\, \ldots Hg_{k-1}' \ . \tag{6.6}$$

При построении сопряженных совокупностей имеется произвол в выборе элементов $g_i$.

Однако, что при любом допустимом выборе элементов $g_i$ получается один и тот же набор сопряженных совокупностей и, следовательно, одно и то же разложение.

Этот результат непосредственно следует из теоремы (6.1).

Таким образом, группа $G$ может быть однозначно разложена на сопряженные совокупности слева (или справа) по подгруппе .

## 7 Сопряженные элементы и класс

***Определение 7.1***

*Пусть $g$ — некоторый элемент группы $G$, Составим $g$ элемент $h$ по следующему правилу:*

$$h = g_i\, g\, g_i^{-1}\ ,\ \ g_i \in G\ . \tag{7.1}$$

***Элементы $g$ и $g'$ называются сопряженными***

Пусть теперь $g_i$ пробегает все элементы группы $G$. Тогда получим $n$ элементов, среди которых могут оказаться одинаковые. Пусть число разных элементов равно $k$ и обозначим их через

$$h_1,\, h_2,\, \ldots h_k \quad . \tag{7.2}$$

Исходя из построения эта совокупность включает в себя все элементы группы $G$, которые сопряжены с элементом $g$. Можно показать, что все элементы этой совокупности являются **взаимно сопряженными**.

Действительно, пусть имеем два элемента из (7.2):

$$h_1 = g_\alpha\, g\, g_\alpha^{-1} \;, \tag{7.3}$$

$$h_2 = g_\beta\, g\, g_\beta^{-1} \;. \tag{7.4}$$

Тогда из (7.3)

$$g = g_\alpha^{-1}\, h_1\, g_\alpha \;,$$

и следовательно

$$\begin{aligned} h_2 &= \left(g_\beta\, g_\alpha^{-1}\right)\; h_1\; \left(g_\alpha\, g_\beta^{-1}\right) = \\ &= \left(g_\beta\, g_\alpha^{-1}\right)\; h_1\; \left(g_\alpha^{-1}\, g_\beta\right)^{-1} \quad . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Согласно определению 6.1 $h_1$ и $h_2$ сопряженными друг с другом или являются **взаимно сопряженными**.

***Определение 7.2***

*Совокупность всех взаимно сопряженных элементов называют* ***классом****.*

Таким образом, элементы $h_1,\; h_2,\; \ldots h_k$ образуют класс сопряженных элементов.

Класс вполне определяется заданием одного из элементов.

**Определение 7.3**

***Число элементов в классе*** *называют* ***порядком класса***.

Всякая конечная группа может быть разбита на несколько классов сопряженных элементов.

Единичный элемент группы сам по себе образует класс. Легко убедиться в том, что все элементы одного и того же класса имеют одинаковый порядок.

**Теорема 7.1**

*совокупность произведений элементов двух классов состоит из целых классов т.е.*

$$C_i C_j = \sum_k s_{i\ j\ k} C_k \ , \tag{7.6}$$

*где $C_{i,j,k}$ — совокупности элементов $ij,k$-го класса, а $s_{i\ j\ k}$— целые числа.*

## 8 Инвариантная подгруппа (нормальный делитель)

Пусть $H$ — подгруппа группы $G$ и $g_i \in G$. Составим совокупность элементов $g_i\ H\ g_i^{-1}$ (элемент $g_i$ фиксирован). Эта совокупность также является группой, так как для нее выполняются все групповые аксиомы.

**Определение 8.1**

*Такую подгруппу называют* ***подобной*** *подгруппе $H$.*

Если $g_i \in G$, то подобная подгруппа, очевидно, будет совпадать с $H$. Однако, если $g_i \notin G$, то в общем случае мы получим некоторую подгруппу группы $G$, отличную от $H$.

**Определение 8.2**

*Подгруппа  совпадает со всеми своими подобными подгруппами, она называется* ***инвариантной подгруппой или нормальным делителем****.*

Инвариантную подгруппу будем обозначать буквой $N$. Из определения (8.2) следует, что если инвариантная подгруппа содержит некоторый элемент $g$ группы $G$, то вместе с ним она содержит и весь класс, к которому принадлежит $g$.

Поэтому говорят, что инвариантная подгруппа состоит из целых классов группы.

Для **инвариантной подгруппы** $N$ группы $G$ сопряженные совокупности слева и справа совпадают. Действительно,

$$g_i N = g_i N g_i^{-1} g_i = N g_i \ , \tag{8.1}$$

так как согласно определению инвариантной подгруппы (8.2)

$$g_i N g_i^{-1} = N \ . \tag{8.2}$$

Всякая группа имеет две тривиальные инвариантные подгруппы: первая совпадает с самой группой, а вторая состоит из единичного элемента группы.

**Определение 8.3**

*Группы, не имеющие инвариантных подгрупп, отличных от тривиальных, называются простыми.*

## 9 Фактор-группа

Пусть $N$ — инвариантная подгруппа группы $G$. Разложим группу $G$ на сопряженные совокупности по группе $N$:

$$N, g_1N \ , \ \ g_2N \ , \ \ \ldots, g_{k-1}N \ \ . \tag{9.1}$$

т.е.

$$G = N + g_1N + g_2N + \ldots + g_{k-1}N \ \ . \tag{9.2}$$

Образуем теперь совокупность $g_1N\,g_2N$, которая состоит из различных элементов $g_1n_\alpha g_2n_\beta$, когда $n_\alpha$ и $n_\beta$ независимо пробегают всю подгруппу $N$.

Легко видеть, что

$$g_1Ng_2N = g_1\ g_2\ g_2^{-1}\ N\ g_2N = g_1\ g_2\ N\ N = g_3N\ . \tag{9.3}$$

Если совокупность $g_1Ng_2N$ называть произведением совокупностей $g_1N$ и $g_2N$, то можно сказать, что произведения двух сопряженных с $N$ совокупностей дают опять некоторую сопряженную с $N$ совокупность.

Умножение (в указанном смысле) сопряженной с $N$ совокупности на $N$ слева или справа не изменяет этой сопряженной совокупности:

$$Ng_1N = g_1\ g_1^{-1}\ N\ g_1N = g_1\ NN = g_1\ N\ . \tag{9.4}$$

Для каждой сопряженной совокупности $g_iN$ имеется такая сопряженная совокупность $g_1^{-1}N$, что их произведение равно $N$:

$$g_1^{-1}\ Ng_1\ N = NN = N\ . \tag{9.5}$$

Таким образом, сопряженные совокупности инвариантной группы можно рассматривать как элементы некоторой новой группы, в которой $N$ играет роль единичного элемента.

**Определение 9.1**

*Эту группу называют* ***фактор - группой*** *по инвариантной подгруппе* $N$.

Ее порядок равен индексу инвариантной подгруппы.

**Тема 2. Теория представлений конечных групп.** Обозначения и примеры. Изоморфизм и гомоморфизм групп. Определение представления группы. Переход к новому базису. Унитарные представления. Примеры представлений. Представление группы симметрии уравнения Шредингера, реализующееся на его собственных функциях. Существование эквивалентного унитарного представления. Приводимые и неприводимые представления группы.

## 10 Изоморфизм и гомоморфизм групп

***Определение* 10.1**

*Если между элементами двух групп существует взаимно однозначное соответствие, которое не нарушается при групповом умножении, то такие группы называются **изоморфными**.*

Две группы $G$ и $H$ называются изоморфными, если между элементами $g_i$ группы $G$ и элементами $h_i$ группы $H$ можно установить взаимно однозначное соответствие $g_i \leftrightarrow h_i$, такое, что из равенства $g_i\, g_j = g_k$ следует равенство $h_i\, h_j = h_k$.

Установление изоморфизма групп позволяет свести исследование рассматриваемой группы к изучению другой группы, изоморфной с нею.

Другим важным понятием в теории групп является понятие гомоморфизма.

***Определение* 10.2**

*Если каждому элементу группы $G$ соответствует только один определенный элемент группы $H$, а каждому элементу группы $H$ соответствует несколько элементов группы $G$, причем это соответствие сохраняется при групповом умножении, то говорят, что группа $H$* ***гомоморфна*** *группе $G$.*

Гомоморфные группы обладают следующими свойствами.

**а)** Если группа $H$ гомоморфна группе $G$, то единичному элементу группы $G$ соответствует единичный элемент группы $H$.

**б)** Если группа $H$ гомоморфна группе $G$, то взаимно обратным элементам группы $G$ соответствуют взаимно обратные элементы группы $H$.

**в)** Если группа $H$ гомоморфна группе $G$, то все элементы группы $G$, которые соответствуют единичному элементу группы $H$, образуют инвариантную подгруппу $N$ группы $G$.

## 11 Определение представления группы

Каждое преобразование группы симметрии этих уравнений вызывает определенное преобразование их решений. Если уравнение инвариантно относительно некоторого преобразования, то это еще не означает, что все его решения также инвариантны по отношению к этому преобразованию. Каковы возможные преобразования решений уравнения при операциях из его группы симметрии? Оказывается, что ответить на этот вопрос можно, опираясь только на свойства самой группы.

**Говорят, что совокупность преобразований решений, вызываемых операциями из группы симметрии уравне-**

**ния, образует представление данной группы**. Далее мы дадим строгое определение линейного представления группы, а в качестве примера рассмотрим преобразования симметрии для решений уравнения Шрёдингера, принадлежащих одному и тому же собственному значению энергии. В целом данная глава посвящена изучению общих свойств представлений группы и ее содержание является важным для всего последующего изложения.

Рассмотрим некоторую конечную группу $G$ с элементами

$$g_1, g_2, \ldots, g_m \, . \tag{11.1}$$

***Определение* 11.1**

*Если группа $T$ линейных операторов $\hat{T}_{g_i}$ в некотором пространстве $R$ гомоморфна группе $G$, то говорят, что группа $T$ образует **представление группы** $G$ в пространстве $R$.*

В силу гомоморфизма имеем

$$\hat{T}_{g_i}\hat{T}_{g_k} = \hat{T}_{g_i g_k} \, . \tag{11.2}$$

Говорят также, что представление группы $G$ есть “отображение” элементов $g_i$ на операторы $\hat{T}_{g_i}$ в векторном пространстве $R$. Если размерность пространства $R$ равна $n$, то представление называют $n$-мерным. Пространство $R$ называют пространством представления $T$.

Если пространство $R$ есть n-мерное векторное пространство $R_n$, то любой его элемент $x$ может быть разложен по $n$ ортам образующим базис этого пространства:

$$x = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \, . \tag{11.3}$$

Операторы $\hat{T}_{g_i}$ определен, если мы зададим его действие на каждый из ортов $\mathbf{e}_k$ с помощью матриц. Пусть

$$\hat{T}_{g_i}\mathbf{e}_k = \sum_{r=1}^{n} D_{rk}\left(g_i\right)\mathbf{e}_r \ . \tag{11.4}$$

Как видно из (11.4) каждому элементу $g_i$ нашей группы сопоставляется матрица $D\left(g_i\right)$. Ясно, что единичному элементу группы должна быть сопоставлена единичная матрица, а обратным элементам — обратные матрицы.

Покажем, что для матриц $D$ выполняется равенство

$$D\left(g_i\right) D\left(g_j\right) = D\left(g_i g_j\right) \ . \tag{11.5}$$

Действительно, применив к орту $\mathbf{e}_k$ последовательно операторы $\hat{T}_{g_i}$ и $\hat{T}_{g_k}$, получим

$$\begin{aligned}
&\hat{T}_{g_i}\hat{T}_{g_j}\mathbf{e}_k = \hat{T}_{g_i}\sum_{r=1}^{n} D_{rk}\left(g_j\right)\mathbf{e}_r = \\
&= \sum_{r=1}^{n} D_{rk}\left(g_j\right)\hat{T}_{g_i}\mathbf{e}_r = \sum_{r=1}^{n} D_{kr}\left(g_j\right)\sum_{f=1}^{n} D_{fr}\left(g_i\right)\mathbf{e}_f = \\
&= \sum_{f=1}^{n}\left(\sum_{r=1}^{n} D_{fr}\left(g_i\right) D_{rk}\left(g_j\right)\right)\mathbf{e}_f \ .
\end{aligned} \tag{11.6}$$

Но, с другой стороны,

$$\hat{T}_{g_i}\hat{T}_{g_j}\mathbf{e}_k = \hat{T}_{g_i g_j}\mathbf{e}_k = \sum_{f=1}^{n} D_{fk}\left(g_i g_j\right)\mathbf{e}_f \ . \tag{11.7}$$

Сравнивая (11.6) и (11.7) получим, что

$$D_{fk}\left(g_i g_j\right) = \sum_{r=1}^{n} D_{fr}\left(g_i\right) D_{rk}\left(g_j\right) \tag{11.8}$$

или в безиндексной форме

$$D\left(g_i\right) D\left(g_j\right) = D\left(g_i g_j\right) \ . \tag{11.9}$$

Мы будем говорить, что матрицы $D\left(g_i\right)$ образуют представление порядка $n$ группы $G$. Пространство $R_n$ называют пространством представления, а базис в этом пространстве — базисом представления. При действии оператора $\hat{T}_{g_i}$ на произвольный вектор $x$ пространства $R_n$ получаем:

$$\begin{gathered}\hat{T}_{g_i} x = \sum_{k=1}^{n} x_k \hat{T}_{g_i} \mathbf{e}_k = \\ \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{r=1}^{n} D_{rk}\left(g_i\right) \mathbf{e}_r = \sum_{r=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} D_{rk}\left(g_i\right) x_k \mathbf{e}_r = \\ = \sum_{r=1}^{n} x'_r \mathbf{e}_r \ ,\end{gathered} \tag{11.10}$$

где

$$x'_r = \sum_{k=1}^{n} D_{rk}\left(g_i\right) x_k \ . \tag{11.11}$$

Рассмотрим, как изменяется матрица представления, если в пространстве $R_n$ выбрать новый базис $\mathbf{e}'_i$ связанный с базисом $\mathbf{e}_k$ линейным преобразованием $V$:

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{k=1}^{n} V_{ki} \mathbf{e}_k \ , \quad \mathbf{e}_i = \sum_{k=1}^{n} V^{-1}_{ki} \mathbf{e}'_k \tag{11.12}$$

Для этого подействуем на орт $\mathbf{e}'_j$ оператором $\hat{T}_{g_i}$. Используя(11.12), получим

$$\hat{T}_{g_i}\mathbf{e}'_j=\sum_{k=1}^{n}V_{kj}\hat{T}_{g_i}\mathbf{e}_k=\sum_{k=1}^{n}V_{kj}\sum_{s=1}^{n}D_{sk}\left(g_i\right)\mathbf{e}_s=$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\sum_{k,s=1}^{n}V_{kj}D_{sk}\left(g_i\right)V_{rs}^{-1}\mathbf{e}'_r=\sum_{r=1}^{n}\sum_{k,s=1}^{n}V_{rs}^{-1}D_{sk}\left(g_i\right)V_{kj}\mathbf{e}'_r=$$
$$=\sum_{r=1}^{n}\left\{V^{-1}D\left(g_i\right)V\right\}_{rj}\mathbf{e}'_r \tag{11.13}$$

Таким образом, при переходе к новому базису матрицы представления испытывают **преобразование подобия**.

Представление матрицами $V^{-1}DV$ называется **эквивалентным** по отношению к представлению матрицами $D$.

Если матрицы представления все унитарные, то **представление называют унитарными**.

Если группа матриц $D\left(g_i\right)$ изоморфна группе $G$, то говорят, что **матрицы дают точное представление группы** $G$.

Среди представлений группы всегда имеется тривиальное тождественное представление, в котором каждому элементу группы сопоставляется единица.

Если элементами группы являются линейные преобразования, то **матрицы этих преобразований сами дают представление, изоморфное группе**. Эти два представления соответствуют двум тривиальным инвариантным подгруппам, которые упоминались в предыдущих параграфах.



## 12 Несколько слов об унитарных представлениях и матрицах

Унитарная матрица $D$ — квадратная матрица с комплексными элементами, результат умножения которой на эрмитово сопряжённую $D^\dagger$ равен единичной матрице:

$$DD^\dagger = D^\dagger D = I \tag{12.1}$$

или

$$D^\dagger = D^{-1}\ . \tag{12.2}$$

Унитарная матрица, элементы которой вещественны, является **ортогональной**.

**Свойства**:

- ◇ Произведение унитарных матриц также является унитарной матрицей.
- ◇ Для всякой унитарной матрицы $U$ существует такая унитарная матрица $V$ , что $V^*UV$ — диагональна.
- ◇ Множество всех унитарных матриц порядка $n$ по умножению образует унитарную группу $U(n)$ — (алгебраическую) группу (группу Ли) над полем вещественных чисел.
- ◇ Если определитель унитарной матрицы $U$ равен единице, её называют **специальной унитарной матрицей**. Модуль определителя унитарной матрицы всегда равен 1. Множество всех специальных унитарных матриц порядка $n$ по умножению образуют специальную унитарную группу $SU(n)$. Группы $SU(2)$ и $SU(3)$ играют важную роль при изложении квантовой механики и физики элементарных частиц.

Унитарная матрица представляет преобразование, переводящее ортонормированный базис комплексного векторного пространства размерности, соответствующей ее размеру, в ортонормированный базис. (Это верно для любого ортонормированного базиса).

Это эквивалентно утверждению, что

**Теорема 12.1**

***если преобразование $D$ унитарное, то оно сохраняет скалярное произведение $(x,y)$.***

Определим скалярное произведение векторов $x$ и $y$ в пространстве $R_n$:

$$(x,y) \equiv \left(xy^{\dagger}\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_i \ , \tag{12.3}$$

где означает операцию эрмитового сопряжения $\dagger$.

Действительно, пусть преобразование $D_{g_i}$ переводит вектора $x$ и $y$ в $x^{(i)}$ и $y^{(i)}$:

$$x^{(i)} = \hat{D}_{g_i} x \ , \ \ x_k^{(i)} = \sum_{r=1}^{n} D_{kr}\left(g_i\right) x_r$$

$$y^{(i)} = \hat{D}_{g_i} y \ , \ \ y_k^{(i)} = \sum_{r=1}^{n} D_{kr}\left(g_i\right) y_r \tag{12.4}$$

Из (12.4) найдем, что

$$y^{(i)\dagger} = y^{\dagger} \hat{D}_{g_i}^{\dagger} \ , \ \ \bar{y}_k^{(i)} = \sum_{r=1}^{n} \bar{y}_r D_{rk}^{*}\left(g_i\right) \tag{12.5}$$

Далее найдем скалярное произведение $\left(x^{(i)},y^{(i)}\right)$:

$$\left(x^{(i)},y^{(i)}\right)=\sum_{k=1}^{n}x_k^{(i)}\bar{y}_k^{(i)}=$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}D_{kr}\left(g_i\right)x_r\sum_{r'=1}^{n}\bar{y}_{r'}D^*_{r'k}\left(g_i\right)=$$
$$\sum_{r,r'=1}^{n}x_r\bar{y}_{r'}\sum_{k=1}^{n}D^*_{r'k}\left(g_i\right)D_{kr}\left(g_i\right)=$$
$$=\sum_{r,r'=1}^{n}x_r\bar{y}_{r'}\delta_{rr'}=\sum_{r=1}^{n}x_r\bar{y}_r=(x,y)\ . \qquad (12.6)$$

**Теорема 12.2**

*Всякое представление конечной группы эквивалентно унитарному.*

## 13 Примеры представлений. Представление группы симметрии уравнения Шредингера, реализующееся на его собственных функциях.

В практических приложениях представления групп реализуются часто как преобразования функциональных пространств $R$, индуцированные преобразованиями аргументов функций.

Если аргумент $\mathbf{r}$ преобразуется под действием группы симметрии $u_s$

$$\mathbf{r}'=u_s\mathbf{r}\ , \qquad (13.1)$$

преобразование $\hat{T}_{u_s}$ функции $\psi\left(\mathbf{r}\right)$, индуцированное преобразованием из группы $U$ аргумента $\mathbf{r}$ , определяется соотношением

$$\psi'\left(\mathbf{r}'\right)=\hat{T}_{u_s}\psi\left(\mathbf{r}\right)\equiv\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right)\ . \qquad (13.2)$$

При условии, что преобразования $u_s$ являются элементами группы, а $\hat{T}_{u_s}\psi(\mathbf{r})$, как и $\psi(\mathbf{r}) \in R$, то операторы $\hat{T}_{u_s}$ являются представлением группы. Проверим наличие гомоморфизма. Действительно,

$$\begin{aligned} \hat{T}_{u_t}\hat{T}_{u_s}\psi(\mathbf{r}) &= \hat{T}_{u_t}\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) = \\ &= \psi\left(u_s^{-1}u_t^{-1}\mathbf{r}\right) = \psi\left(\left[u_t u_s\right]^{-1}\mathbf{r}\right) = \\ &= \hat{T}_{u_t u_s}\psi(\mathbf{r}) \ . \end{aligned} \tag{13.3}$$

Тогда

$$\hat{T}_{u_t}\hat{T}_{u_s} = \hat{T}_{u_t u_s} \tag{13.4}$$

## 13.1 Собственные функции уравнения Шредингера

Покажем, что функция (13.2) является собственной функцией уравнения Шредингера, если преобразование симметрии $u_s$ не меняет гамильтониана $H$.

Пусть $u_s$ ортогональная группа. Рассмотрим стационарное уравнение Шредингера

$$\hat{H}(\mathbf{r})\,\psi(\mathbf{r}) \equiv \left[-\frac{\hbar^2\triangle_{\mathbf{r}}}{2m^2} + V(\mathbf{r})\right]\psi(\mathbf{r}) = E\psi(\mathbf{r}) \ . \tag{13.5}$$

Делая замену $\mathbf{r} \to u_s^{-1}\mathbf{r}'$ приходим к уравнению

$$\left[-\frac{\hbar^2\triangle_{u_s^{-1}\mathbf{r}'}}{2m^2} + V\left(u_s^{-1}\mathbf{r}'\right)\right]\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}'\right) = E\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}'\right) \ . \tag{13.6}$$

Подстановка $\mathbf{r} \to u_s^{-1}\mathbf{r}'$ должна сохранять вид уравнения т.е. гамильтониан должен удовлетворять соотношению

$$\hat{H}(\mathbf{r}) = \hat{H}(\mathbf{r}') = \hat{H}\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) \ . \tag{13.7}$$

Так как оператор Лапласа инвариантен относительно любых ортогональных преобразований координат, то условие (13.7) сводится к требованию

$$\hat{V}(\mathbf{r}) = \hat{V}\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) \ . \tag{13.8}$$

Поэтому преобразованная волновая функция $\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right)$ является также является собственной функцией уравнений Шредингера (13.5) с тем же собственным значением $E$ т.е.

$$\hat{H}(\mathbf{r})\,\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) = \left[-\frac{\hbar^2\triangle_{\mathbf{r}}}{2m^2} + V(\mathbf{r})\right]\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) = E\psi\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) \ . \tag{13.9}$$

### 13.2 Представление группы симметрии уравнения Шредингера, реализующееся на его собственных функциях или какими могут быть базисы

Пусть $\psi_1(\mathbf{r})$, $\psi_2(\mathbf{r})$, …, $\psi_k(\mathbf{r})$— полный набор ортонормированных собственных функций этого уравнения (12.5), соответствующих собственному значению $E$ т.е. выполняется условие

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \bar{\psi}_i(\mathbf{r})\,\psi_j(\mathbf{r}) = \delta_{ij} \ , \tag{13.10}$$

где

$$\bar{\psi}_i(\mathbf{r}) = \psi_i^{*T}(\mathbf{r})$$

**Докажем, что эти функции образуют базис унитарного представления группы.**

Действительно, каждую из преобразованных функций $\hat{T}_{u_s}\psi(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\hat{T}_{u_s}\psi_i(\mathbf{r}) = \psi_i\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) = \sum_{j=1}^{k} D_{ji}(u_s)\,\psi_j(\mathbf{r}) \ . \tag{13.11}$$

Функции $\hat{T}_{u_s}\psi_i(\mathbf{r})$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ также должны быть ортонормированы, поскольку тоже являются решениями того же уравнения Шредингера (замена переменной с помощью ортогонального преобразования $u_s$ сохраняет условие ортонормированности) т.е.

$$\int \mathrm{d}\mathbf{r}\ \bar{\psi}_i\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right)\psi_j\left(u_s^{-1}\mathbf{r}\right) = \delta_{ij}\ . \tag{13.12}$$

Используя (13.11) представим (13.12) в виде:

$$\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}\mathbf{r} \sum_{\ell'=1}^{k} \bar{\psi}_{\ell'}(\mathbf{r})\, D^{\dagger}_{j\ell'}(u_s) \sum_{\ell=1}^{k} D_{\ell i}(u_s)\, \psi_\ell(\mathbf{r}) = \\
&= \sum_{\ell,\ell'=1}^{k} D^{\dagger}_{j\ell'}(u_s)\, D_{\ell i}(u_s) \int \mathrm{d}\mathbf{r} \bar{\psi}_{\ell'}(\mathbf{r})\, \psi_\ell(\mathbf{r}) \\
&= \sum_{\ell,\ell'=1}^{k} D^{\dagger}_{j\ell'}(u_s)\, D_{\ell i}(u_s)\, \delta_{\ell'\ell} = \\
&= \sum_{\ell=1}^{k} D^{\dagger}_{j\ell}(u_s)\, D_{\ell i}(u_s) = \delta_{ij}
\end{aligned} \tag{13.13}$$

или

$$D^{\dagger}(u_s)D(u_s) = I\ . \tag{13.14}$$

Отсюда следует, что матрицы $D(u_s)$ должны быть унитарными.

**Таким образом, каждому преобразованию $u_s$ из группы симметрии уравнения Шрёдингера сопоставляется унитарная матрица $k$-го порядка.**

## 13.3 Симметрия квантовомеханической системы относительно группы преобразований

Состояние квантовомеханической системы описывается решением уравнения Шрёдингера. Поэтому симметрия этой системы относительно некоторой группы означает инвариантность соответствующего уравнения Шрёдингера относительно преобразований этой группы. Мы ограничимся сейчас рассмотрением стационарной задачи, для которой уравнение Шрёдингера имеет вид

$$\hat{H}(x)\,\psi(x) = E\psi(x) \ , \tag{13.15}$$

где $x$ — совокупность переменных, характеризующих конфигурационное пространство системы.

Под инвариантностью уравнения Шрёдингера понимаем сохранение его вида при подстановке

$$x \to g^{-1}x \ , \ \ \psi(x) \to \hat{T}_g\psi(x) = \psi\left(g^{-1}x\right) \ , \tag{13.16}$$

где $g$ — преобразование из группы симметрии $G$ системы. Очевидно, что инвариантность уравнения Шрёдингера относительно преобразования $g$ является следствием инвариантности гамильтониана системы:

$$\hat{H}(gx) = \hat{H}(x) \ . \tag{13.17}$$

Покажем, что условие инвариантности уравнения (13.15) относительно группы $G$ может быть записано в виде условия коммутативности операторов $T_g$ и оператора энергии $H$:

$$\hat{T}_g\hat{H}(x) = \hat{H}(x)\,\hat{T}_g \tag{13.18}$$

Пусть $\psi_E(x)$ — собственная функция оператора $H$, соответствующая собственному значению $E$. Тогда $\psi(x)\,\hat{T}_g\psi_E(x)$ — также собственная функция оператора $\hat{H}(x)$, соответствующая тому же собственному значению $E$, т. е.

$$\hat{H}(x)\left[\hat{T}_g\psi_E(x)\right] = E\left[\hat{T}_g\psi_E(x)\right] \tag{13.19}$$

Но с другой стороны

$$E\left[\hat{T}_g\psi_E\left(x\right)\right] = \hat{T}_g\left[E\psi_E\left(x\right)\right]$$
$$= \hat{T}_g\hat{H}\left(x\right)\psi_E\left(x\right) \tag{13.20}$$

Тогда из (13.19) и (13.20) следует

$$\hat{H}\left(x\right)\hat{T}_g\psi_E\left(x\right) = \hat{T}_g\hat{H}\left(x\right)\psi_E\left(x\right) \tag{13.21}$$

Очевидно, что это равенство справедливо также для любой функции, которая может быть разложена по собственным функциям оператора $\hat{H}\left(x\right)$.

Условие (13.18) инвариантности гамильтониана можно также записать в матричной форме. Если использовать некоторую полную систему ортонормированных функций $\psi_i\left(x\right)$, то из (13.21), получим

$$\sum_k H_{ik}D_{kj}\left(g\right) = \sum_s D_{is}\left(g\right)H_{sj}\ , \tag{13.22}$$

где

$$H_{ik} = \int \overline{\psi}_i\left(x\right)\hat{H}\left(x\right)\psi_k\left(x\right) \tag{13.23}$$

$$D_{ik} = \int \overline{\psi}_i\left(x\right)\hat{T}_g\psi_k\left(x\right) \tag{13.24}$$

причем что матрицы $D(g)$ образуют представление группы $G$.

**Условие симметрии квантовомеханической системы относительно группы преобразований может быть выражено как условие коммутации матрицы гамильтониана с матрицами унитарного представления этой группы.**

## 14 Приводимые и неприводимые представления группы

Пусть в пространстве $R_n$ задано представление $D$ группы $G$.

**Определение 14.1**

*Если в пространстве $R_n$, существует подпространство $R_k (k < n)$, **инвариантное** относительно всех преобразований $D$, т. е. если для $x \in R_k$ имеем $Dx \in R_k$, то представление называется **приводимым**.*

Выберем в качестве первых $k$ ортов в пространстве $R_n$ орты подпространства $R_k$. Тогда матрица представления должна иметь следующий вид:

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1k} & D_{1k+1} & D_{1k+2} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2k} & D_{2k+1} & D_{2k+2} & \dots & D_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{k1} & D_{k2} & \dots & D_{kk} & D_{kk+1} & D_{kk+2} & \dots & D_{kn} \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & D_{k+1k+1} & D_{k+1k+2} & \dots & D_{k+1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{k+2k+1} & D_{k+2k+2} & \dots & D_{k+2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & D_{nk+1} & D_{nk+2} & \dots & D_{nn} \end{array}\right| \qquad (14.1)$$

**Определение 14.2**

*Если же в пространстве $R_n$, нельзя выделить инвариантное подпространство, то представление называется **неприводимым**.*

Если приводимое представление $D$ унитарно, то ортогональное дополнение подпространства $R_k$, которое мы обозначим через $R_{n-k}$, также инвариантно относительно преобразований $D$.

Если теперь в качестве к первых ортов выбрать орты подпространства $R_k$, а в качестве последних $n - k$ ортов — орты подпространства $R_{n-k}$, то матрицы представления будут иметь следующий квазидиагональный вид:

$$
\left|
\begin{array}{cccc|cccc}
D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2k} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
D_{k1} & D_{k2} & \dots & D_{kk} & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\hline
0 & 0 & \dots & 0 & D_{k+1k+1} & D_{k+1k+2} & \dots & D_{k+1n} \\
0 & 0 & \dots & 0 & D_{k+2k+1} & D_{k+2k+2} & \dots & D_{k+2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & 0 & \dots & 0 & D_{nk+1} & D_{nk+2} & \dots & D_{nn}
\end{array}
\right|. \qquad (14.2)
$$

Если пространство $R$ может быть разложено на инвариантные подпространства, в каждом из которых реализуется неприводимое представление, то представление $D$ называют вполне приводимым.

Матрицы этого представления при соответствующем выборе ортов имеют квазидиагональный вид:

$$
\left|
\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
D_{11} & \dots & D_{1k} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
D_{21} & \dots & D_{2k} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
D_{k1} & \dots & D_{kk} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\
\cline{1-6}
0 & \dots & 0 & D_{k+1k+1} & \dots & D_{k+1n} & 0 & \dots & 0 \\
0 & \dots & 0 & D_{k+2k+1} & \dots & D_{k+2n} & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & D_{nk+1} & \dots & D_{nn} & 0 & \dots & 0 \\
\cline{4-9}
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & D_{k+1k+1} & \dots & D_{k+1n} \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & D_{k+2k+1} & \dots & D_{k+2n} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & D_{nk+1} & \dots & D_{nn}
\end{array}
\right|. \qquad (14.3)
$$

Из проведенного рассмотрения следует, что

1. Унитарное представление группы всегда либо неприводимо, либо вполне приводимо.

2. Представление конечной группы или неприводимо, или вполне приводимо (так как оно эквивалентно унитарному)

3. Если представление D приводимо, то приведение его матриц к диагональному виду осуществляется, как мы видели, с помощью перехода к новой системе ортов. Мы знаем, что в этом случае матрицы представления испытывают преобразование подобия:

$$D \to V^{-1} D V \ ,$$

где $V$ — матрица, связывающая орты старого и нового базисов (см. (11.13)).

Поэтому условие приводимости представления можно сформулировать следующим образом. Представление $D$ является приводимым, если существует такая неособенная матрица $V$, что матрицы $V^{-1}DV$ являются квазидиагональными.

## 15 Первая лемма Шура

**Теорема 15.1**

*Матрица, коммутирующая со всеми матрицами неприводимого представления, кратна единичной.*

Пусть $D(g)$ — матрицы неприводимого представления порядка $n$ группы $G$, $g \in G$. Предположим, что матрица $M$ коммутирует со всеми матрицами $D(g)$:

$$MD(g) = D(g)M \tag{15.1}$$

Обозначим через пространство, в котором реализуется представление $D(g)$. В пространстве $R_n$ должен существовать по крайней мере один собственный вектор матрицы $M$. Обозначим его через $x$. Тогда

$$Mx = \lambda x \tag{15.2}$$

Применим к вектору $x$ преобразование с матрицей представления $D(g)$:

$$D(g)x = x_g \tag{15.3}$$

Получившийся при этом вектор $x_g$ также является собственным вектором матрицы $M$ с тем же самым собственным значением $\lambda$.

Действительно, в силу (15.1) мы имеем

$$Mx_g = MD(g)x = D(g)Mx = \lambda D(g)x = \lambda x_g \; .labelm4 \tag{15.4}$$

Отсюда следует, что подпространство собственных векторов матрицы $M$, соответствующих одному и тому же собственному значению, инвариантно относительно преобразований $D(g)$.

Но так как по предложению представление $D(g)$ неприводимо, то это подпространство должно совпадать со всем пространством $R_n$, а матрица $M$, умножающая любой вектор пространства на число$\lambda$, должна иметь вид

$$M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \tag{15.5}$$

Таким образом, теорема доказана.

Если представление вполне приводимо, т. е. его матрицы имеют квазидиагональный вид, то всегда существует матрица, отличная от кратной единичной, которая коммутирует со всеми матрицами этого представления.

Легко проверить, что в качестве такой матрицы можно взять диагональную матрицу, у которой диагональные элементы, соответствующие различным блокам матрицы представления, не равны друг другу. Отсюда можно сделать заключение, что **если единственной матрицей, коммутирующей со всеми матрицами некоторого представления группы, является матрица, кратная единичной, то такое представление неприводимо.**

## 16 Вторая лемма Шура.

**Теорема 16.1**

*Пусть $D^{(1)}(g)$ и Пусть $D^{(2)}(g)$ — матрицы двух неприводимых неэквивалентных представлений группы $G$ порядка $n_1$ и $n_2$ соответственно. Тогда всякая прямоугольная матрица $M$ с $n_1$ столбцами и $n_2$ строками, удовлетворяющая соотношению*

$$MD^{(1)}(g) = D^{(2)}(g)M \tag{16.1}$$

*для всех $g \in G$, должна быть нулевой матрицей.*

## 17 Соотношение ортогональности для матричных элементов неприводимых представлений

С помощью первой и второй лемм Шура можно получить некоторые соотношения между матричными элементами неприводимых представлений группы. Пусть $D^{(i)}(g)$ и $D^{(j)}(g)$ — матрицы двух неприводимых неэквивалентных унитарных представлений группы $G$, состоящей из $m$ элементов. Обозначим через $n_i$, и $n_j$ порядки этих представлений.

Vежду элементами матриц $D^{(i)}(g)$ и $D^{(j)}(g)$ существуют следующие соотношения:

$$\sum_{g \in G} D^{(i)}_{\mu\nu}(g) \bar{D}^{(j)}_{\alpha\beta}(g) = 0 \ , \tag{17.1}$$

$$\sum_{g \in G} D^{(i)}_{\mu\nu}(g) D^{(i)}_{\alpha\beta}(g) = \frac{m}{n_i} \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} \ . \tag{17.2}$$

## 18 Группы перестановок

***Определение* 18.1**

*Совокупность всех перестановок $P$ из $n$ объектов образует группу, называемую обычно* ***симметрической группой***

Занумеруем объекты: $1, 2, 3 \ldots, n$ после чего перестановку можно обозначать символом

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \end{pmatrix} \tag{18.1}$$

указывающим, что элемент $i$ заменяется элементом $p_i$ ; числа $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ это просто переставленные числа $1, 2, 3, \ldots, n$. Каждая подстановка заключается в том, что на место числа, стоящего в верхней строчке, ставится подписанное под ним число из нижней строчки. Существует $n!$ элементов группы.

Записывать числа верхнего ряда в $P$ в порядке возрастания вовсе необязательно. Так, например, два символа:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad , \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{18.2}$$

обозначают одну и ту же перестановку.

К каждой подстановке имеется обратная к ней, дающая в произведении с данной тождественную подстановку: обратная подстановка к данной ставит все числа, смещенные подстановкой, на их прежние Элемент, обратный $P$,можно записывать в виде

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \ldots & p_n \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n \end{pmatrix} \tag{18.3}$$

Рассмотрим как составляется таблица умножения (примем для конкретности $n = 3$). Обозначим ее элементы следующим образом:

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \ P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \ P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

$$P_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \ P_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \ P_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}. \quad (18.4)$$

По определению группы, если перемножить две подстановки, значит последовательно произвести их одну за другой. В результате получится опять подстановка, называемая произведением двух данных подстановок.

В качестве произведения перестановок рассмотрим следующий пример:

$$P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad (18.5)$$

В силу первой подстановки (это $P_2$; “идем” справа налево $\leftarrow$) единица заменится единицей ($1 \to 1$), в силу второй подстановки (это $P_1$) эта единица заменится двойкой $1 \to 2$ т.е. имеем цепочку $1 \to 1 \to 2$.

Точно так же после последовательного совершения обеих подстановок двойка перейдет в тройку ( $2 \to 3 \to 3$), тройка перейдет в единицу ( $3 \to 2 \to 1$).

В итоге произведение

$$P_1 P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = P_4 \, . \quad (18.6)$$

Все эти рассуждения можно заменить следующим правилом: путем перестановок столбцов $P_1$ добъемся того, чтобы верхняя строка в $P_1$ переставлена **совпала с нижней** строкой $P_2$

$$P_1P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = P_4 \,. \tag{18.7}$$

И в общем случае

$$\begin{pmatrix} p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ p_1 & p_2 & p_3 & \dots & p_n \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ q_1 & q_2 & q_3 & \dots & q_n \end{pmatrix} \tag{18.8}$$

Последнее соотношение можно принять за определение произведения двух перестановок

## Список использованных источников

1. Lüdeling, C. Group Theory (for Physicists) / C. Lüdeling. — 2010. — P. 123 http://www.th.physik.uni-bonn.de/nilles/people/luedeling/grouptheory.

2. Александров, П. С. Введение в теорию групп / П. С. Александров. — Москва: Наука , 1980. — 144 с. — Серия Библиотечка «Квант», выпуск 7.

3. Алексеев, В. Б. Теорема Абеля в задачах и решениях / В. Б. Алексеев. — Москва: Главная редакция физико-математической литературы издательства "Наука" , 1976. — 208 с.

4. Аминов, Л. К. Теория симметрии (конспекты лекций и задачи) / Л. К. Аминов. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований , 2002. — 192 с.

5. Артамонов, В. А. Группы и их приложения в физике, химии, кристаллографии: Учеб. пособие для студ. высш. учеб. заведений / В. А. Артамонов, Ю. Л. Словохотов. — Москва: Издательский центр "Академия"' , 2005. — 512 с.

6. Бангавантам, С. Теория групп и её применение к физическим проблемам / С. Бангавантам, Т. Венкатарайуду. — Москв: Издательство Иностранной Литературы , 1959. — 303 с.

7. Барут, А. Теория представления групп и ее приложения.: в 2 т. / А. Барут, Р. Рончка. — Москва: Мир , 1980. — 1 т. — 452 с.

8. Барут, А. Теория представления групп и ее приложения.: в 2 т. / А. Барут, Р. Рончка. — Москва: Мир , 1980. — 2 т. — 395 с.

9. Богопольский, О. В. Введение в теорию групп / О. В. Богопольский. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований , 2002. — 148 с.

10. Вавилов, Н. А. Конкретная теория групп / Н. А. Вавилов. — Санкт-Петербург , 2006. — 275 с.

11. Ван-дер Варден, Б. Л. Метод теории групп в квантовой механике / Б. Л. Ван-дер Варден. — Ижевск: Издательский дом “Удмуртский университет” , 1999. — 232 с.

12. Вейль, Г. Теория групп и квантовая механика / Г. Вейль. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры , 1986. — 496 с.

13. Вейль, Г. Симметрия / Г. Вейль. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры , 1968. — 192 с.

14. Вигнер, Е. Этюды о симметрии / Е. Вигнер. — Москва: Мир , 1971. — 320 с.

15. Вигнер, Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров / Е. Вигнер. — Москва: ИЛ , 1961. — 444 с.

16. Виленкин, Н. . Специальные функции и теория представления групп / Н. . Виленкин. — Москва: Мир , 1965. — 600 с.

17. Винберг, Э. Б. Линейные представления групп / Э. Б. Винберг. — Москва: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит-ры. , 1985. — 144 с.

18. Гельфанд, И. М. Представления группы вращений и группы Лоренца, их применения / И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. . Шапиро. — Москва: Наука , 1979. — 367 с.

19. Гибсон, У. Принципы симметрии в физике элементарных частиц / У. Гибсон, Б. Поллард. — Москва: Атомиздат , 1979. — 348 с.

20. Голод, П. И. Математические основы теории симметрии / П. И. Голод, А. У. Климык. — Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика , 2001. — 528 с.

21. Иванов, Е. П. Теория групп и ее применения в физике.

Уч.пособие. / Е. П. Иванов. — Москва: МИЭТ , 2006. — 160 с.

22. Любарский, Г. . Теория групп и физика / Г. . Любарский. — Москва: Наука , 1986. — 224 с.

23. Ляховский, В. Д. Группы симметрии и элементарные частицы / В. Д. Ляховский, А. А. Болохов. — Ленинград: Изд-во ЛГУ , 1983. — 337 с.

24. Менский, М. Б. Метод индуцированных представлений: пространство-время и концепция частиц / М. Б. Менский. — Москва: Наука , 1976. — 288 с.

25. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время : в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. — Москва: Мир , 1988. — 2 т. Спинорные и твистор-ные методы в геометрии пространства-времени. — 572 с.

26. Пенроуз, Р. Спиноры и пространство-время: в 2 т. / Р. Пенроуз, В. Риндлер. — Москва: Мир , 1987. — 1 т. Два-спинорное исчисление и релятивистские поля. — 528 с.

27. Петрашень, М. И. Применение теории групп в квантовой механике / М. И. Петрашень, Е. Д. Трифонов. — Москва: Эдиториал УРСС , 2000. — 280 с.

28. Поклонский, Н. А. Точечные группы симметрии / Н. А. Поклонский. — Минск: БГУ , 2003. — 215 с.

29. Румер, Ю. Теория групп и квантованные поля / Ю. Румер, А. М. Фет. — Второе издание изд. . — Москва: Наука , 1977. — 248 с.

30. Румер, Ю. Теория унитарной симметрии / Ю. Румер, А. М. Фет. — Москва: Наука , 1970. — 405 с.

31. Соколик, Г. А. Групповые методы в теории элементарных частиц / Г. А. Соколик. — Москва: Атомиздат , 1965. — 176 с.

32. Федоров, Ф. И. Теория гиротропии / Ф. И. Федоров. — Минск: Наука и техника , 1976. — 456 с.

33. Хамермеш, М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам / М. Хамермеш. — Москва: Мир , 1966. — 588 с.

34. Хейне, В. Теория групп в квантовой механике / В. Хейне. — Москва: Иностранная литература , 1963. — 523 с.

35. Чупрунов, Е. В. Основы кристаллографии / Е. В. Чупрунов, А. Ф. Хохлов, М. А. Фадеев. — Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры , 2004. — 500 с.

36. Шмутцер, Э. Симметрии и законы сохранения в физике / Э. Шмутцер. — Наука , 1973. — 159 с.

37. Шредер, М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая / М. Шредер. — Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика” , 2001. — 528 с.

38. Шубников, А. В. Симметрия в науке и искусстве / А. В. Шубников, В. А. Копцик. — 3-е изд. . — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований , 2004. — 560 с.

39. Эллиот, Д. Симметрия в физике: в 2 т. / Д. Эллиот, П. Добер. — Москва: Мир , 1983. — 1 т. — 364 с.

40. Эллиот, Д. Симметрия в физике: в 2 т. / Д. Эллиот, П. Добер. — Москва: Мир , 1983. — 2 т. — 414 с.

41. Кристаллография. Лабораторный практикум. / под ред. Е. В. Чупрунова. — Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры , 2005. — 412 с.

42. Задачи по кристаллографии / под ред. Е. В. Чупрунова. — Москва: Изд-во физ.-мат. лит-ры , 2003. — 208 с.