УДК 535.31

# МАТРИЧНЫЙ АППАРАТ ГАУССОВОЙ ОПТИКИ В ОКРЕСТНОСТИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ЛУЧА

*С. А. Родионов*

Рассматривается матричная форма соотношений гауссовой оптики для окрестности произвольного луча в произвольной оптической системе. Исследованы свойства гауссовой матрицы, связывающей четырехмерные векторы падающего и выходящего лучей линейным преобразованием. Показано, что из самых общих требований оптического смысла этого преобразования вытекает возможность представить его в виде двух независимых двумерных преобразований, аналогичных таковым для центрированных оптических систем в гауссовой области. При этом свойства системы в окрестности луча определяются девятью параметрами — фокусными расстояниями и фокальными отрезками в двух взаимно перпендикулярных главных сечениях и углами поворота этих сечений относительно базовых систем координат.

Гауссова оптика в параксиальной области в центрированных оптических системах с недавнего времени [1, 2] стала описываться в терминах матричной алгебры и такой подход оказался весьма плодотворным и универсальным; представляется полезным развить его на случай произвольного луча в произвольной оптической системе.

Пусть имеется некоторый луч, проходящий через произвольную оптическую систему (рис. 1), где $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}'$ — орты направления луча в пространствах предметов и изображений, $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}'$ — радиус-векторы некоторых точек $A$ и $A'$ на луче в системах декартовых координат $oxyz$ и $o'x'y'z'$; $\mathbf{q}^T=(X,\ Y,\ Z)$; $\mathbf{q}'^T=(X',\ Y',\ Z')$; $\mathbf{a}^T=(x,\ y,\ z)$; $\mathbf{a}'^T=(x',\ y',\ z')$; $\|\mathbf{q}\|=1$; $\|\mathbf{q}'\|=1$. В предыдущих выражениях $T$ — индекс транспонирования, $\|\cdot\|$ — евклидова норма. Пусть $\mathbf{q}+d\mathbf{q}$; $\mathbf{q}'+d\mathbf{q}'$; $\mathbf{a}+d\mathbf{a}$; $\mathbf{a}'+d\mathbf{a}'$ — луч, близкий к данному, отличающийся от него на дифференциалы $d\mathbf{q}$, $d\mathbf{q}'$, $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{a}'$ («дифференциал луча»). Известно, что множество лучей в пространстве четырехмерно, следовательно, каждый дифференциал луча определяется четырехмерными векторами: $d\mathbf{r}$ — в пространстве предметов и $d\mathbf{r}'$ — в пространстве изображений. В качестве компонент этих четырехмерных векторов выберем проекции на оси $x$, $y$ и $x'$, $y'$ дифференциалов $d\mathbf{a}$, $d\mathbf{q}$, . . .

$$d\mathbf{r}=\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ -dX \\ -dY \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \alpha \end{pmatrix};\quad d\mathbf{r}'=\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \\ -dX' \\ dY' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \mathbf{h}' \\ \alpha' \end{pmatrix},\quad \text{где}\quad \mathbf{h}=\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix},\quad \alpha=-\begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \tag{1}$$

(знак «минус» у $\alpha$ взят для того, чтобы получить аналогию с правилом знаков в обычной гауссовой оптике). Пусть векторы $d\mathbf{a}$ и $d\mathbf{a}'$ лежат в плоскостях $oxy$ и $o'x'y'$ соответственно, тогда $dz=dz'=0$ по определению, а $dZ$ и $dZ'$ определяются из условий ортогональности векторов $\mathbf{q}$ и $d\mathbf{q}$, $\mathbf{q}'$ и $d\mathbf{q}'$

$$d\mathbf{q}^T\mathbf{q}=d\mathbf{q}'^T\mathbf{q}'=0. \tag{2}$$

Оптическая система каждому дифференциалу луча $d\mathbf{r}$ в пространстве предметов строит дифференциал $d\mathbf{r}'$ в пространстве изображений, таким образом, работа оптической системы в окрестности данного луча описывается оператором $G$, изображающим четырехмерный вектор $d\mathbf{r}$

$$d\mathbf{r}' = G\,[d\mathbf{r}]. \qquad (3)$$

Для регулярных оптических систем существует окрестность луча, в которой оператор (3) линеен; эта окрестность соответствует гауссовой области вокруг луча. Линейный оператор типа (3) может быть представлен в виде матрицы. Таким образом, гауссовы характеристики системы в окрестности луча определяются квадратной матрицей $\mathbf{G}$ четвертого порядка

$$d\mathbf{r}' = \mathbf{G}d\mathbf{r}. \qquad (4)$$

Рассмотрим самые общие свойства, которыми должна обладать эта матрица. Прежде всего отделим свойства, зависящие от выбора координат

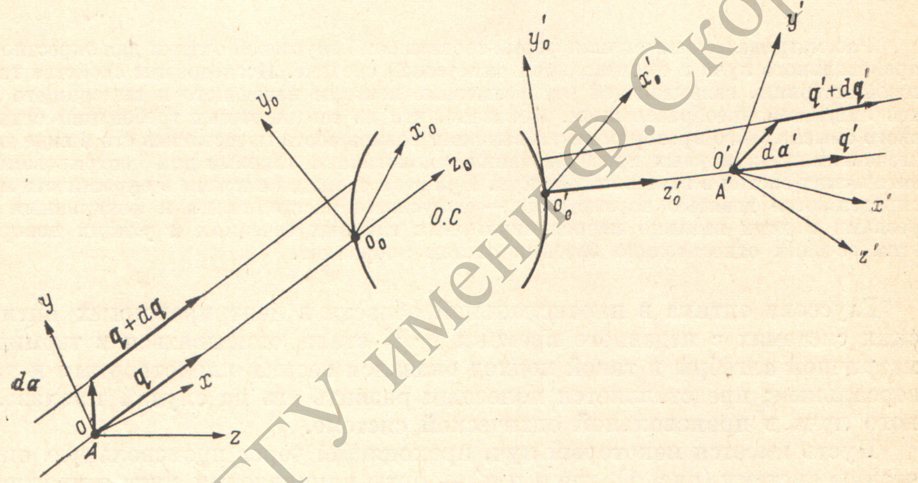


Рис. 1.

в пространстве предметов и изображений, для чего рассмотрим, как изменяется матрица $\mathbf{G}$ при изменении систем координат. Очевидно, что так как нас интересуют только дифференциалы луча, то без потери общности можно поместить начала $o$ и $o'$ на луч в точки $A$ и $A'$, тогда $\mathbf{a}=\mathbf{a}'=o$.

Любые изменения систем координат можно свести к последовательности следующих элементарных преобразований: параллельного смещения вдоль луча на расстояние $t$ (при этом ось $z$ совпадает с лучом); поворота вокруг оси $z$ на угол $\varphi$; поворота вокруг оси $x$ на угол $\beta$ (при этом ось $x$ нормальна лучу $\mathbf{q}$).

Очевидно, что при смещении системы координат вдоль луча на расстояние $t$ вектор линейного дифференциала луча $\mathbf{h}$ уменьшается на $\boldsymbol{\alpha} t$, вектор углового дифференциала $\boldsymbol{\alpha}$ остается без изменений. Это соответствует умножению четырехмерного вектора $d\mathbf{r}$ слева на матрицу «смещения» $\mathbf{T}$

$$d\mathbf{r}_t = \mathbf{T}d\mathbf{r}, \qquad (5)$$

где $\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{I}t \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$; $\mathbf{I}$ — единичная подматрица второго порядка, $d\mathbf{r}$ — вектор луча в старой системе, $d\mathbf{r}_t$ — в смещенной системе. Обратное преобразование описывается обратной матрицей $\mathbf{T}^{-1}$, причем, как нетрудно увидеть,

$$\mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{I}t \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix}.$$

Обращаясь к выражению (4) и делая в нем замену векторов $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$ на векторы $d\mathbf{r}_t$ и $d\mathbf{r}_t'$ в смещенных системах, получим

$$\mathbf{T}'^{-1}d\mathbf{r}_t' = \mathbf{G}\mathbf{T}^{-1}d\mathbf{r}_t \quad \text{или} \quad d\mathbf{r}_t' = \mathbf{T}'\mathbf{G}\mathbf{T}^{-1}d\mathbf{r}. \qquad (6)$$

Таким образом, смещение систем координат эквивалентно умножению гауссовой матрицы $\mathbf{G}$ справа на $\mathbf{T}^{-1}$, а слева на $\mathbf{T}'$.

Можно показать, что в общем случае, когда ось $z$ не совпадает с лучом, матрица $\mathbf{T}$ имеет вид

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & -(\mathbf{I} + \bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^T Z^{-2})\, t \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix}, \tag{6a}$$

где $\bar{\mathbf{q}}$ — двумерный вектор проекции луча $\mathbf{q}$ на плоскость $oxy$, $\bar{\mathbf{q}} = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$.

Поворот систем координат вокруг оси $z$ на угол $\varphi$ описывается умножением двумерных векторов $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\alpha}$ на ортогональные матрицы второго порядка $\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ или четырехмерных векторов $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$ на ортогональные матрицы четвертого порядка

$$d\mathbf{r}_\varphi = \mathbf{R}\, d\mathbf{r}; \quad d\mathbf{r}'_\varphi = \mathbf{R}'\, d\mathbf{r}', \tag{7}$$

где

$$\underset{4\times4}{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} \underset{2\times2}{\mathbf{R}} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \underset{2\times2}{\mathbf{R}} \end{pmatrix}; \quad \underset{4\times4}{\mathbf{R}'} = \begin{pmatrix} \underset{2\times2}{\mathbf{R}'} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \underset{2\times2}{\mathbf{R}'} \end{pmatrix}. \tag{7a}$$

Обращаясь к (4), получим, что поворот систем координат вокруг осей $z$, $z'$ соответствует умножению гауссовой матрицы $\mathbf{G}$ справа на матрицу поворота $\mathbf{R}^T$, а слева — на матрицу поворота $\mathbf{R}'$ (в силу ортогональности $\mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$)

$$\mathbf{G}_\varphi = \mathbf{R}'\mathbf{G}\mathbf{R}^T. \tag{8}$$

Рассмотрим поворот вокруг оси $x$. При этом повороте трехмерный вектор $d\mathbf{a}$ перемещается так, чтобы все время оставаться в плоскости $oxy$, откуда вытекает следующее матричное выражение для связи $d\mathbf{a}_\beta$ и $d\mathbf{a}$:

$$da_\beta = \begin{pmatrix} dx_\beta \\ dy_\beta \\ dz_\beta = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz = 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X = 0 \\ Y \\ Z \end{pmatrix} dt \right],$$

где $c = \cos\beta$, $s = \sin\beta$, $dt$ — расстояние между точками пересечений дифференциала луча с плоскостями $oxy$ и $ox_\beta y_\beta$. Решая эту систему уравнений, получим

$$dx_\beta = dx; \quad dy_\beta = dy \frac{Z}{-sY + cZ} = dy Z Z_\beta^{-1},$$

где $Z_\beta = -sY + cZ$ — проекция орта $\mathbf{q}$ основного луча на ось $z$ повернутой системы. Итак, изменение вектора $\mathbf{h} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ при повороте системы вокруг оси $x$ на угол $\beta$ можно записать в виде матричного произведения

$$\mathbf{h}_\beta = \mathbf{B}\mathbf{h},$$

где $B$ — диагональная матрица второго порядка: $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z Z_\beta^{-1} \end{pmatrix}$. Координаты трехмерного вектора $d\mathbf{q}$ при повороте вокруг $x$ изменяются следующим образом:

$$dq_\beta = \begin{pmatrix} dX_\beta \\ dY_\beta \\ dZ_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c & s \\ 0 & -s & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Но координата $dZ$ находится из условия (2): $dZZ + dYY = 0$. Подставляя в (9), получим

$$\begin{pmatrix} dX_\beta \\ dY_\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Z_\beta Z^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dX \\ dY \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{\alpha}_\beta = \mathbf{B}^{-1}\boldsymbol{\alpha}.$$

Переходя к четырехмерным векторам $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}'$, получаем, что при повороте систем вокруг осей $x$, $x'$ эти векторы умножаются на диагональные матрицы четвертого порядка

$$d\mathbf{r}_\beta = \mathbf{B}d\mathbf{r}, \quad d\mathbf{r}'_\beta = \mathbf{B}'d\mathbf{r}', \tag{10}$$

где

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & w & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & w^{-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & w' & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & w'^{-1} \end{pmatrix}, \quad w = ZZ_\beta^{-1}, \quad w' = Z'Z_\beta'^{-1}, \tag{11}$$

а гауссова матрица $\mathbf{G}$ умножается справа на $\mathbf{B}^{-1}$, а слева на $\mathbf{B}'$

$$\mathbf{G} = \mathbf{B}'\mathbf{G}\mathbf{B}^{-1}. \tag{12}$$

Легко убедиться в том, что ни одно из преобразований (6), (8), (12) не меняет определителя матрицы $\mathbf{G}$.

Рассмотрим теперь свойства гауссовой матрицы, определяемые оптической системой. Очевидно, что преобразование (4) должно подчиняться закону Малюса—Дюпена [3]. Как показал Герцбергер [4], закон Малюса—Дюпена есть частный случай более общего требования инвариантности оптического дифференциала

$$n'\left[\left(d\mathbf{a}'^T_{u_j} d\mathbf{q}'_{u_i}\right) - \left(d\mathbf{a}'^T_{u_i} d\mathbf{q}'_{u_j}\right)\right] = n\left[\left(d\mathbf{a}^T_{u_j} d\mathbf{q}_{u_i}\right) - \left(d\mathbf{a}^T_{u_i} d\mathbf{q}_{u_j}\right)\right], \quad i = 1, 4, \quad j = 1, 4, \tag{13}$$

где $d\mathbf{a}_{u_i}$, $d\mathbf{q}_{u_j}$ — производные векторов по всевозможным параметрам $u_i$, $u_j$, определяющим лучи; $n$, $n'$ — показатели преломления в пространствах предметов и изображений.

Запишем выражение (13) в матричном виде. Выберем в качестве параметров $u_i$, $u_j$, определяющих множество лучей, проекции четырехмерных векторов $d\mathbf{r}$, составленных из двумерных векторов $\mathbf{h}$, $\boldsymbol{\alpha}$. Тогда матрицы производных векторов $d\mathbf{a}_{u_j}$ и $d\mathbf{q}_{u_j}$ по параметрам будут состоять из единичных и нулевых матриц

$$\left.\begin{aligned} \underset{2\times4}{\mathbf{H}} &= (d\mathbf{a}_{u_i})_{i=1,\,4} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{2\times2}{\mathbf{I}} & \underset{2\times2}{\mathbf{O}} \end{pmatrix}, \\ \underset{2\times4}{\mathbf{A}} &= (d\mathbf{q}_{u_i})_{i=1,\,4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underset{2\times2}{\mathbf{O}} & \underset{2\times2}{\mathbf{I}} \end{pmatrix}. \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Используя эти обозначения, можно записать (13) в матричной форме, включающей в себя все возможные дифференциальные инварианты

$$n'[\mathbf{H}'^T\mathbf{A}' - \mathbf{A}'^T\mathbf{H}'] = n[\mathbf{H}^T\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{H}]. \tag{15}$$

В этом выражении левая и правая части представляют собой матрицы четвертого порядка. Рассмотрим правую часть равенства. Подставляя в нее (14), получим после матричных преобразований

$$n[\mathbf{H}^T\mathbf{A} - \mathbf{A}^T\mathbf{H}] = n\begin{pmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{I} & \mathbf{O} \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где $\mathbf{O}$ и $\mathbf{I}$ — подматрицы второго порядка.

Обращаясь теперь к левой части равенства (15), в силу линейности оператора (4), получаем с учетом (14)

$$\begin{pmatrix} \mathbf{H}' \\ \mathbf{A}' \end{pmatrix} = \mathbf{G}\begin{pmatrix} \mathbf{H} \\ \mathbf{A} \end{pmatrix} = \mathbf{G}\begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{pmatrix} = \mathbf{G}\underset{4\times4}{\mathbf{I}} = \mathbf{G}. \tag{17}$$

Следовательно, $\mathbf{H}' = (\mathbf{G}_{11}\mathbf{G}_{12})$, $\mathbf{A}' = (\mathbf{G}_{21}\mathbf{G}_{22})$, где $\mathbf{G}_{11}$, $\mathbf{G}_{12}$, $\mathbf{G}_{21}$, $\mathbf{G}_{22}$ — подматрицы второго порядка гауссовой матрицы $G$, записанной в блочном (клеточном) виде

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{21} & \mathbf{G}_{22} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Подставляя полученные выражения в левую часть инварианта (15), получим

$$n'(\mathbf{H}'^T\mathbf{A}' - \mathbf{A}'^T\mathbf{H}') = n' \begin{pmatrix} \mathbf{G}_{11}^T\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{21}^T\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{11}^T\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}^T\mathbf{G}_{12} \\ \mathbf{G}_{12}^T\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{22}^T\mathbf{G}_{11} & \mathbf{G}_{12}^T\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{22}^T\mathbf{G}_{12} \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Приравнивая левую (19) и правую (16) части и сравнивая их поблочно, получим четыре равенства, которым должна удовлетворять матрица $\mathbf{G}$

$$\left.\begin{array}{ll} \mathbf{G}_{11}^T\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{21}^T\mathbf{G}_{11} = \mathbf{O}, & \mathbf{G}_{11}^T\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}^T\mathbf{G}_{12} = \frac{n}{n'}\,\mathbf{I}, \\ \mathbf{G}_{12}^T\mathbf{G}_{21} - \mathbf{G}_{22}^T\mathbf{G}_{11} = -\frac{n}{n'}\,\mathbf{I}, & \mathbf{G}_{12}^T\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{22}^T\mathbf{G}_{12} = \mathbf{O}. \end{array}\right\} \tag{20}$$

Легко увидеть, что эти четыре равенства эквивалентны требованию симметричности четырех попарных произведений $\mathbf{G}_{11}^T\mathbf{G}_{21}$, $\mathbf{G}_{11}^T\mathbf{G}_{22}$, $\mathbf{G}_{21}^T\mathbf{G}_{12}$, $\mathbf{G}_{12}^T\mathbf{G}_{22}$, а также выполнению равенства $\mathbf{G}_{11}^T\mathbf{G}_{22} - \mathbf{G}_{21}^T\mathbf{G}_{12} = \frac{n}{n'}\mathbf{I}$. В каком случае произведение двух квадратных матриц, например, $\mathbf{A}^T$ и $\mathbf{B}$, симметрично? Приведем $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ в диагональную форму [5]

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}_A\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{V}_A, \quad \mathbf{B} = \mathbf{U}_B\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{V}_B,$$

где $\mathbf{U}_A$, $\mathbf{U}_B$, $\mathbf{V}_A$, $\mathbf{V}_B$ — ортогональны, $\mathbf{\Lambda}_A$, $\mathbf{\Lambda}_B$ — диагональны. Тогда

$$\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{V}_A^T\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{U}_A^T\mathbf{U}_B\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{V}_B, \quad \mathbf{B}^T\mathbf{A} = \mathbf{V}_B^T\mathbf{\Lambda}_B\mathbf{U}_B^T\mathbf{U}_A\mathbf{\Lambda}_A\mathbf{V}_A. \tag{21}$$

Если $\mathbf{A}^T\mathbf{B}$ — симметрично, то $\mathbf{A}^T\mathbf{B} = \mathbf{B}^T\mathbf{A}$. Как следует из (21), для этого необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{U}_A = \mathbf{U}_B$, $\mathbf{V}_A = \mathbf{V}_B$, т. е. чтобы матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ были получены из некоторых диагональных матриц $\mathbf{\Lambda}_A$ и $\mathbf{\Lambda}_B$ умножением слева и справа на одинаковые ортогональные матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$. Но всякую ортогональную матрицу можно рассматривать как матрицу поворота системы координат на некоторый угол. Анализируя симметричность произведений всех пар подматриц (18), в соответствии с (20) приходим к выводу, что ортогональные матрицы $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$, диагонализирующие подматрицы $\mathbf{G}_{11}$, $\mathbf{G}_{12}$, $\mathbf{G}_{21}$, $\mathbf{G}_{22}$, должны быть одинаковы у всех подматриц. В соответствии с (8) это значит, что гауссова матрица системы $\mathbf{G}$ может быть приведена к форме, состоящей из диагональных подматриц, путем поворота систем координат в пространстве предметов и изображений вокруг осей $z$, $z'$ на некоторые углы $\varphi$, $\varphi'$

$$\mathbf{G} = \mathbf{R}'\mathbf{G}_0\mathbf{R}^T, \tag{22}$$

где $\mathbf{R}$, $\mathbf{R}'$ — ортогональные матрицы поворота вокруг осей $z$, $z'$ вида (7а), $\mathbf{G}_0$ — матрица, составленная из диагональных подматриц второго порядка,

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} x_{11} & 0 & x_{12} & 0 \\ 0 & y_{11} & 0 & y_{12} \\ x_{21} & 0 & x_{22} & 0 \\ 0 & y_{21} & 0 & y_{22} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

При этом условия (20) требуют выполнения двух равенств

$$x_{11}x_{22} - x_{21}x_{12} = \frac{n}{n'}, \quad y_{11}y_{22} - y_{21}y_{12} = \frac{n}{n'}. \tag{24}$$

Из (23) и (24) следует, что определитель матрицы $G$ всегда равен $(n/n')^2$.

Введем перестановку в четырехмерных векторах $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$, а именно представим их в таком виде, чтобы первая пара их элементов соответствовала «$x$»-проекциям двумерных векторов $\mathbf{h}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, а вторая пара — «$y$»-проекциям

$$d\mathbf{r}_p = \begin{pmatrix} dx \\ -dX \\ dy \\ -dY \end{pmatrix}; \quad d\mathbf{r}'_p = \begin{pmatrix} dx \\ -dX \\ dy \\ -dY \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Это соответствует умножению прежних векторов $d\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}'$ слева на матрицу перестановки

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Гауссова матрица $\mathbf{G}_0$ при этом должна умножиться слева и справа на матрицу $\mathbf{P}$, при этом она приобретает диагонально-клеточный вид

$$\mathbf{G}_0 = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} \\ x_{21} & x_{22} & & \\ \multicolumn{2}{c}{\mathrm{O}} & y_{11} & y_{12} \\ & & y_{21} & y_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{G}_x & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathbf{G}_y \end{pmatrix}, \tag{26}$$

а преобразование (4) распадается на два независимых преобразования отдельно для $x$- и $y$-проекций векторов $\mathbf{h}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, с гауссовыми матрицами этих преобразований $\mathbf{G}_x$ и $\mathbf{G}_y$, размерности $2 \times 2$, т. е. точно так же, как для систем с двумя плоскостями симметрии

$$\begin{pmatrix} dx' \\ dX' \end{pmatrix} = \mathbf{G}_x \begin{pmatrix} dx \\ dX \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} dy' \\ dY' \end{pmatrix} = \mathbf{G}_y \begin{pmatrix} dy \\ dY \end{pmatrix}. \tag{27}$$

Определители матриц $\mathbf{G}_x$ и $\mathbf{G}_y$, как следует из (24), равны $n/n'$.

Если кроме поворота вокруг осей $z$, $z'$, необходимого для приведения матрицы $\mathbf{G}$ к виду (23), еще повернуть системы координат вокруг осей $x$, $x'$ так, чтобы оси $z$, $z'$ совпали с основным лучом, и поместить начала этих систем в точки пересечения луча с первой и последней поверхностями системы (как показано на рис. 1, системы $o_0x_0y_0z_0$ и $o'_0x'_0y'_0z'_0$), то элементы матриц $\mathbf{G}_x$ и $\mathbf{G}_y$ приобретут тот же смысл, что и гауссовой матрицы второго порядка для центрированных систем, а именно [1, 2]

$$\mathbf{G}_x = \begin{pmatrix} \dfrac{s'_{F_x}}{f'_x} & \dfrac{f_x f'_x - s'_{F_x} s_{F_x}}{f'_x} \\ \dfrac{1}{f'_x} & -\dfrac{s_{F_x}}{f'_x} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{G}_y = \begin{pmatrix} \dfrac{s_{F_y}}{f'_y} & \dfrac{f_y f'_y - s'_{F_y} s_{F_y}}{f'_y} \\ \dfrac{1}{f'_y} & -\dfrac{s_{F_y}}{f'_y} \end{pmatrix},$$

где $f_x$, $f'_x$, $f_y$, $f'_y$, $s_{F_x}$, $s'_{F_x}$, $s_{F_y}$, $s'_{F_y}$ — фокусные расстояния и фокальные отрезки вдоль главного луча в двух взаимно перпендикулярных сечениях, причем из (24) следует, что $f_x/f'_x = f_y/f'_y = -n/n'$.

Назовем гауссову матрицу, соответствующую такому выбору координат в пространстве предметов и изображений, собственной гауссовой матрицей данной системы для данного луча. Гауссова матрица для любого другого выбора систем координат получается из собственной умножением слева и справа на нужную последовательность матриц $\mathbf{T}^{-1}$, $\mathbf{R}^T$, $\mathbf{B}^{-1}$, $\mathbf{T}'$, $\mathbf{R}'$, $\mathbf{B}'$.

Итак, из оптического смысла преобразования (4) вытекает, что оно полностью определяется девятью параметрами — фокусными расстояниями и фокальными отрезками в двух взаимно перпендикулярных сечениях и углами поворота этих сечений $\varphi$, $\varphi'$ относительно базовых систем координат в пространствах предметов и изображений.

«Оптические» свойства гауссовой матрицы $\mathbf{G}$ позволяют легко найти обратную ей матрицу $\mathbf{G}^{-1}$ обратного преобразования. Представляя $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}^{-1}$ в блочном (клеточном) виде, перемножая их и пользуясь определением $\mathbf{G}\mathbf{G}^{-1}=\mathbf{I}$ и свойствами (20), легко получить

$$\mathbf{G}^{-1}=\frac{n'}{n}\begin{pmatrix} \mathbf{G}_{22}^{T} & -\mathbf{G}_{12}^{T} \\ -\mathbf{G}_{22}^{T} & \mathbf{G}_{11}^{T} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Обращение собственной гауссовой матрицы $\mathbf{G}_0$, представленной в диагонально-клеточном виде (26), выполняется тривиально.

Определение матриц $\mathbf{G}$ и $\mathbf{G}_0$ в реальной системе может производиться расчетом хода четырех дифференциалов луча, т. е. лучей, бесконечно

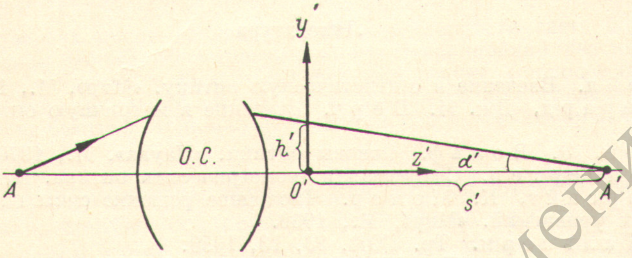


Рис. 2.

близких к данному [6]. Пусть $d\mathbf{r}_1, \ldots, d\mathbf{r}_4$ — четырехмерные векторы (1) этих лучей в пространстве предметов, а $d\mathbf{r}'_1, \ldots, d\mathbf{r}'_4$ — в пространстве изображений, полученные в результате расчета. Тогда из (4) получаем

$$(d\mathbf{r}'_1 \ldots d\mathbf{r}'_4)=\mathbf{G}\,(d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_4) \quad \text{или} \quad \mathbf{G}=(d\mathbf{r}'_1 \ldots d\mathbf{r}'_4)\,(d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_4)^{-1}.$$

Удобнее всего выбрать входные координаты лучей так, чтобы матрица $(d\mathbf{r}_1 \ldots d\mathbf{r}_4)$ была бы единичной, в этом случае $\mathbf{G}=(d\mathbf{r}'_1 \ldots d\mathbf{r}'_4)$. По известной матрице $\mathbf{G}$ для произвольного выбора систем координат собственная матрица $\mathbf{G}_0$ получается преобразованиями (6), (8), (12), приводящими системы координат к нужному виду и диагонализирующими подматрицы $\mathbf{G}_{ij}$.

В заключение рассмотрим гауссово изображение какой-либо точки на луче в пространстве предметов. Поместим начало системы координат в пространстве предметов в эту точку, тогда $\mathbf{h}=\mathbf{o}$, в пространстве изображений система координат может быть выбрана произвольно. Из (4) получаем

$$\begin{pmatrix}\mathbf{h}' \\ \boldsymbol{\alpha}'\end{pmatrix}=\mathbf{G}\begin{pmatrix}\mathbf{o} \\ \boldsymbol{\alpha}\end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathbf{h}'=\mathbf{G}_{12}\boldsymbol{\alpha}, \quad \boldsymbol{\alpha}'=\mathbf{G}_{22}\boldsymbol{\alpha}.$$

Исключая $\boldsymbol{\alpha}$, получим выражения, связывающие линейные и угловые дифференциалы луча в пространстве изображений

$$\mathbf{h}'=\mathbf{S}'\boldsymbol{\alpha}' \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\alpha}'=\mathbf{S}'^{-1}\mathbf{h}', \tag{29}$$

где $\mathbf{S}'=\mathbf{G}_{12}\mathbf{G}_{22}^{-1}$ — симметрическая матрица второго порядка.

В обычной гауссовой оптике для параксиальной области центрированных систем $h'$ и $\alpha'$ не векторы, а скаляры, они связаны соотношениями

$$h'=s'\alpha', \quad \alpha'=s'^{-1}h', \tag{30}$$

где $s'$ — продольное расстояние от $O'$ до гауссового изображения $A'$ точки $A$ (рис. 2), причем первым из соотношений (30) удобно пользоваться, если

$A'$ находится на «конечном расстоянии» от $O'$, а вторым — «на бесконечности» (понимаемой в обобщенном смысле [7]). По аналогии с этим логично матрицу $\mathbf{S}'$ (или $\mathbf{S}'^{-1}$ для «бесконечно удаленного» изображения $A'$) рассматривать как матрицу обобщенных продольных расстояний, определяющих положение «гауссового изображения» $A'$ точки $A$ в окрестности данного луча относительно начала $o'$. В общем случае это «изображение» $A'$ не является стигматическим. Заметим, что из (6а) следует, что, строго говоря, матрицей продольных расстояний должна считаться не $\mathbf{S}'$, а $(\mathbf{I}+\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^T Z^{-2})^{-1}\mathbf{S}'$, поскольку в случае стигматического изображения $A'$ именно последняя матрица равна $s'\mathbf{I}$, где $s'$ — расстояние вдоль луча от $o'$ до $A'$, но это строгое определение менее удобно.

Если ось $z'$ направлена вдоль луча, то $(\mathbf{I}+\bar{\mathbf{q}}\bar{\mathbf{q}}^T Z^{-2})=\mathbf{I}$, в этом случае собственные числа матрицы $\mathbf{S}'$ есть расстояния от $o'$ до изображений $A'_m$, $A'_s$ точки $A$ в двух взаимно перпендикулярных главных сечениях бесконечно узкого пучка, собственные векторы матрицы $\mathbf{S}'$ образуют ортогональную матрицу поворота на угол $\varphi'$ между плоскостью $o'x'z'$ и одним из главных сечений.

### Литература


[1] Э. О' Нейл. Введение в статистическую оптику. «Мир», М., 1966.
[2] А. Джерард, Дж. М. Бёрч. Введение в матричную оптику. «Мир», М., 1978.
[3] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1970.
[4] М. Герцбергер. Современная геометрическая оптика. ИЛ, М., 1962.
[5] Дж. Форсайт, К. Молер. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. «Мир», М., 1969.
[6] Д. Ю. Гальперн. Тр. ГОИ, *26*, 13, 1959.
[7] С. А. Родионов. Тр. ЛИТМО, вып. 75, 13, 1974.


Поступило в Редакцию 11 марта 1980 г.