*Проблемы физики, математики и техники*, № 2 (35), 2018

**МАТЕМАТИКА**

УДК 512.542

# НЕКОТОРЫЕ КРИТЕРИИ НЕПРОСТОТЫ КОНЕЧНЫХ ГРУПП

**Э.М. Пальчик, С.Ю. Башун**

*Полоцкий государственный университет*, *Новополоцк*

# SOME CRITERIA FOR THE NONSIMPLICITY OF FINITE GROUPS

**E.M. Palchik, S.Yu. Bashun**

*Polotsk State University*, *Novopolotsk*

Пусть $|G|=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$, где $p_i$ – простые числа, $p_i \neq p_j$ для $i \neq j$. Пусть $\pi(G)=\{p_1,...,p_n\}$, $s \in \pi(G)$ и пусть $\mathfrak{T}$ – множество некоторых силовских подгрупп группы *G*, взятых по одной для каждого $p_i \in \pi(G)\setminus\{s\}$, $i=\overline{1,n-1}$. Доказывается, что если каждая подгруппа из множества $\mathfrak{T}$ нормализует неединичную *s*-подгруппу из *G*, $s>3$, то *G* имеет разрешимую нормальную подгруппу *R* и *s* делит $|R|$.

***Ключевые слова***: *конечная группа*, *силовская подгруппа*, *s-разрешимая группа*.

Let $|G|=\prod_{i=1}^{n} p_i^{\alpha_i}$, where $p_i$ are prime numbers, $p_i \neq p_j$ for $i \neq j$. Let $\pi(G)=\{p_1,...,p_n\}$, $s \in \pi(G)$ and let $\mathfrak{T}$ is the set of some Sylow subgroups of the group *G*, that are taken one at a time for every $p_i \in \pi(G)\setminus\{s\}$, $i=\overline{1,n-1}$. It is proved that if every subgroup from the set $\mathfrak{T}$ normalises some non-identity *s*-subgroup from *G*, $s>3$, then *G* has solvable normal subgroup *R* and *s* divide $|R|$.

***Keywords***: *finite group*, *Sylow subgroup*, *s-solvable group*.

## Введение

В настоящей работе используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в [1]–[3]. Некоторые обозначения приводятся для удобства чтения ниже. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Пусть $\pi$ – некоторое множество простых чисел. Символом $\pi'$ будем обозначать множество тех простых чисел, которые не принадлежат $\pi$. Для натурального числа $n$ через $\pi(n)$ обозначим множество его простых делителей, а для конечной группы $G$ через $\pi(G)$ – множество $\pi(|G|)$. Группа *G*, для которой $\pi(G)\subseteq\pi$, называется $\pi$-группой. Под $\pi$-разрешимой группой будем понимать конечную группу, каждый индекс композиционного ряда которой либо не делится ни на одно из простых чисел из $\pi$, либо совпадает с некоторым числом из $\pi$.

***Определение* 0.1.** *Пусть G – конечная группа и* $\pi\subset\pi(G)$. *Без ограничения общности будем считать, что* $\pi(G)=\{p_1,...,p_k\}$ *и* $\pi=\{p_1,...,p_i\}$ *для* $i<k$. *Для каждого* $i+1\le j\le k$ *выберем по одной силовской* $p_j$*-подгруппе* $G_{p_j}$ *группы* $G$. *Кроме того, пусть в группе* $G$ *существует некоторая* $\pi$*-холлова подгруппа* $G_\pi$. *Тогда* $\mathfrak{T}:=\{G_{p_{i+1}},...,G_{p_k}\}$, $\mathfrak{S}:=\{G_\pi\}\cup\mathfrak{T}$ *и* $\mathfrak{T}$ *называется* $\pi'$*-частью множества* $\mathfrak{S}$.

***Определение* 0.2.** *Пусть* $G$, $\pi$ *и* $\mathfrak{S}$ *как в определении* 0.1.

*Множество* $\mathfrak{S}$ *назовем* $s'$*-специальной силовской системой группы* $G$ (*кратко*: $\mathfrak{S}$ *есть* $s'CC$*-система*), *если* $\pi=\{s\}$ *и каждая подгруппа из* $s'$*-части* $\mathfrak{T}$ *множества* $\mathfrak{S}$ *нормализует некоторую неединичную s-подгруппу группы* $G$ (*не обязательно лежащую в* $G_s$).

Целью этой работы является доказательство следующих двух теорем.

***Теорема* 0.1.** *Пусть* $G$ *– конечная неразрешимая группа с* $s'CC$*-системой*, $s\ge 3$. *Пусть* $L^*:=L(G)$ *– слой группы* $G$, $1\neq S$ *– наибольшая s-подгруппа в* $G$, *которую нормализует некоторая силовская* 2*-подгруппа группы* $G$. *Тогда*:

(1) *если все компоненты группы G являются простыми группами лиева типа с полями определения одной и той же характеристики* $r\neq s$ *и порядки их делятся на* $s$, *то либо* $O_s(G)\neq 1$, *либо* $[S,L^*]=1$;

(2) *если* $s=3$, *все компоненты группы* $G$ *являются простыми спорадическими группами или изоморфны группам из множества* $A^*$ (*см. обозначения ниже*) *и их порядки делятся на* 3, *то либо* $O_3(G)\neq 1$, *либо* $[S,L^*]=1$;

(3) *если* $s>3$, *все компоненты группы* $G$ *являются простыми спорадическими группами*

*или изоморфны группам из множества* $\{A_n \mid n \geq s\}$ *и их порядки делятся на* $s$, *то* $O_s(G) \neq 1$, *либо* $[S, L^*] = 1$;

(4) *если все компоненты группы G являются простыми спорадическими* $s'$*-группами или изоморфны* $s'$*-группам из множества* $\{A_n \mid n \geq 5\}$, *то* $O_s(G) \neq 1$ *или* $[S, L^*] = 1$;

(5) *если все компоненты группы G являются простыми* $s'$*-группами, то* $[S', L^*] = 1$.

***Теорема* 0.2.** *Пусть* $G$ *– конечная группа с* $s'CC$*-системой,* $s > 3$. *Если* $s = 3$, *то пусть группа* $G$ $cf(B)$*-свободна, где* $B \in A_n^0$ *(см. обозначения ниже). Тогда* $G$ *имеет разрешимую нормальную подгруппу* $R(G)$ *и* $s$ *делит* $|R(G)|$.

## 1 Определения, обозначения и предварительные результаты

Ниже для удобства чтения приводим некоторые, в том числе и стандартные, определения и обозначения, используемые при доказательстве теорем.

Пусть $p$ – некоторое простое число, а $\pi$ – некоторое множество простых чисел. Группа называется $\pi$-замкнутой, если у неё есть нормальная $\pi$-холловая подгруппа, (в частности, $p$-замкнутая группа – группа с нормальной силовской $p$-подгруппой) и называется $p$-нильпотентной, если у неё $p$-дополнение является нормальной подгруппой. Запись $G \in E_\pi$ для конечной группы $G$ означает, что группа $G$ имеет холлову $\pi$-подгруппу. Под компонентой $L$ группы $G$ будем понимать субнормальную квазипростую подгруппу группы $G$ такую, что $L' = L$ и $L/Z(L)$ – простая группа. Через $F(G)$ $(F^*(G))$ будет обозначаться подгруппа (обобщенная подгруппа) Фиттинга группы $G$, через $L(G)$ – слой группы $G$ – центральное произведение всех компонент группы $G$ $(F^*(G) = F(G)L(G))$. Пусть $G$ – группа лиева типа, тогда $m$-делитель группы $G$ – простой делитель числа $|G|$, который не делит порядка ни одной собственной параболической подгруппы группы $G$. $\Phi_G$ $(\Gamma_G)$ – группа полевых (графовых) автоморфизмов группы $L$ лиева типа.

Положим

$$\mathfrak{M} := \{L_2(q), Sz(q), U_3(q), {}^2G_2(q) \mid q > 3\}$$

и

$$\mathfrak{N} := \{A_5(2), C_3(2), D_4(2), {}^2A_3(2)\}.$$

Через $e(q,t)$ обозначим наименьшее натуральное число $e$, такое, что $q^e \equiv 1 \pmod{t}$, где $t$ – нечетное простое число, $q$ – целое число и $(q,t) = 1$ ($t$ – примитивный простой делитель числа $q^e - 1$). $e(q,2) = 1$, если 4 делит $q-1$, и $e(q,2) = 2$, если 4 не делит $q-1$. $n_\pi$ – наибольший делитель $m$ числа $n$ такой, что $\pi(m) \subseteq \pi$. $cf(A)$-свободная группа – это конечная группа, у которой нет композиционных факторов, изоморфных группе $A$. Также будем иметь ввиду, что $A_n^0$ – множество знакопеременных групп, у которых число $n$ удовлетворяет условиям: $n > 26$, $n = 4k+3$, 3 делит $n$. Также $A^* := \{A_n \mid n \geq 5\} \setminus A^0$.

***Лемма* 1.1.** *Пусть p – простое число и m,n – натуральные числа,* $n > 2$. *Если* $t$ *– простой примитивный делитель числа* $p^n - 1$ *и* $t$ *делит* $p^m - 1$, *то* $n$ *делит* $m$.

*Доказательство.* Существует натуральное число $k$ такое, что $kn \leq m$, но $(k+1)n > m$. Тогда $[m/kn] = 1$, $t$ делит число $p^{kn}$ $(p^{m-kn} - 1)$. Из $(t,p) = 1$ следует противоречие с определением числа $t$, если $m \neq kn$. □

***Лемма* 1.2.** (1) *Пусть t есть m-делитель группы* $G \in Chev(q)$ *и G – простая группа,* $q = r^f$. *Тогда нетривиальная t-подгруппа группы G не может нормализовать нетривиальную r-подгруппу группы G.*

(2) *Пусть группа* $G$ *имеет* $s'CC$*-систему для* $s \geq 3$, $s \in \pi(G)$. *Тогда* $G$ *– не простая группа, если* $G \notin A^0$.

*Доказательство.* (1). Предположим, что $t$-подгруппа $T \neq 1$ группы $G$ нормализует $r$-подгруппу $R \neq 1$ группы $G$. По теореме Бореля – Титса [4, теорема 3.1.3] имеем $T \subseteq N_G(R) \subseteq P$, $R \subseteq O_r(P)$, где $P$ – параболическая подгруппа группы $G$. Но тогда $t$ делит $|P|$, что противоречит определению $m$-делителя группы $G$. Этим (1) доказано.

(2). Докажем утверждение методом от противного.

Предположим, что $G$ – простая группа лиева типа над полем $GF(q)$, $q = r^f$. Из [2, теорема 4.254] следует, что $r = s$. По условию леммы подгруппы $G_t$ из $\mathfrak{T}$ (определение 0.1) нормализуют неединичные $s$-подгруппы. Тогда по (1) группа $G$ не имеет $m$-делителей. По [5, лемма 3] группа $G$ изоморфна группе из $\mathfrak{N}$. Но $r = s \geq 3$. Противоречие.

Предположим, что $G$ – знакопеременная группа. По [6, теорема 2] $G_2 \notin \mathfrak{T}$, либо $n \equiv 3 \pmod{4}$. Пусть $n = 4k+3$. Если 3 не делит $n$, то $G_3 \cong X_3$, где $X \cong A_{4k+2}$. Кроме того $G_2 \cong X_2$. Но в подгруппе $X$ группы $G$ по теореме 2 в [6] $G_2$ не нормализует 3-подгруппу. Поэтому 3 делит $n$. У групп $A_n$ с $n \leq 26$ нет $3'CC$ -систем (проверяется непосредственно). Например, у группы $G = A_{15}$

нет холловых $\{3,7\}$-подгрупп, 7 не делит $|GL(5,3)|$, $7^2$ не делит $|C_G(y)|$, если $y^3=1$ (это следует из [4, лемма 5.2.2(d)]).

Предположим, что $G$ – простая спорадическая группа. По [6, теорема 3] $G_2 \notin \mathfrak{T}$, либо $G \in \{M_{11}, Ly\}$. Но в группе $G=M_{11}$ имеем $G_{11} \notin \mathfrak{T}$ [7, с. 183], а в группе $G=Ly$ имеем $G_{67} \notin \mathfrak{T}$. В самом деле, по [7, с. 191, 192] $G_3$ содержит единственную элементарную абелеву подгруппу $E$ порядка $3^5$, $|N_G(E)|=3^7\cdot 2^5$. Если $G_{67}$ нормализует 3-подгруппу $S_0 \neq 1$, то $G_{67}$ нормализует и элементарную абелеву подгруппу $S \neq E$. Пусть $G_{67} \leftthreetimes S = A$. $C_A(G_{67}) = G_{67}$ [7, с. 192]. Поэтому $G_{67} \subseteq GL_n(3)$, $n \le 4$. Но 67 не делит $|GL_n(3)|$ с $n \le 7$. Противоречие. □

***Лемма* 1.3.** *Пусть группа* $L \cong {}^2G_2(q)$, $q = 3^{2m+1} > 3$.

(1) *Пусть $t$ – $m$-делитель группы $L$. Тогда $t$ можно выбрать из множества* $\pi(q^2-q+1)$ *со свойствами* $t>3$ *и* $e(q,t)=6$.

(2) *Пусть группа $G$ имеет вид* $\langle y\rangle \leftthreetimes L$, *где* $q=3^f$, $q_0 = 3^{f_1}$, $f=3f_1$, $y \in \Phi_L$, $y^3=1$. *Тогда $G$ не имеет* $3'CC$*-систем.*

*Доказательство.* (1) Из доказательства леммы 1.3 в [5] следует, что существует $m$-делитель $t$ группы $L$ из множества $\pi(q^2-q+1)$. По [8, теорема 4.2] получаем $t$ не делит $q-1$. Если $e(q,t)\neq 6$, то по лемме 1.1 имеем $e(q,t)\in\{2,3\}$. Если $e(q,t)=3$, то $t$ делит $q^3-1$ и $t$ делит $q^3+1$. Следовательно, $t=2$. Если $e(q,t)=2$, то $t$ делит $q^2-1$, $t$ делит $q^2-q+1$, $t$ делит $-q+2$. Тогда $t$ делит $(q+1-q+2)=3$. Во всех случаях $t$ не больше 3. Этим случай (1) доказан.

(2) Если $G$ имеет $3'CC$-систему, то по лемме 1.2 (1) получаем, что группа $L_t = G_t$ нормализует подгруппу группы $G$ порядка 3 вне $L$. Не нарушая общности, можно считать, что $L_t$ нормализует $\langle y\rangle$. Тогда $[y, L_t]=1$, $L_t \subseteq C_G(y) =: C$. Пусть $C^* := C\cap L$, $C^0 := O^{3'}(C^*)$. Из леммы Фраттини [1, теорема I.7.8] и леммы 1.2 (1) следует, что $L_t \subset C^0$. По [4, предложение 4.9.1 (a)] $C^0 \cong {}^2G_2(3^{f_1})$. Поскольку $t$ есть $m$-делитель и группы $C^0$, $t$ делит $q_0^3+1$, имеем, что $t$ делит $q_0^6-1$, а это противоречит (1) ввиду $e(q,t)=6$ и $q_0^6<q^6$. Этим случай (2) доказан. □

***Лемма* 1.4** [9, лемма 11.1]. *Пусть $H$ – некоторая подгруппа конечной группы $G$. Среди подгрупп, порождающих вместе с $H$ всю группу $G$, выберем наименьшую по включению подгруппу $L$. Тогда* $H\cap L \subseteq \Phi(L)$.

***Лемма* 1.5.** *Пусть $G$, $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{T}$ из определений* 0.1, 0.2. *Если каждая подгруппа из $\mathfrak{T}$ нормализует некоторую неединичную $s$-подгруппу из $G$, то существует фиксированная силовская подгруппа $G_s^*$ и набор $\mathfrak{T}^*$ такие, что подгруппы из $\mathfrak{T}^*$ нормализуют нетривиальные $s$-подгруппы из $G_s^*$.*

*Доказательство.* Пусть $G_t \in \mathfrak{T}$ и существует $\{s,t\}$-подгруппа $G_t \leftthreetimes T$, где $s$-подгруппа $T\neq 1$. Если $T \not\subseteq G_s$, то по теореме Силова $T \subseteq G_s^g$ для некоторого элемента $g\in G$. Тогда $gTg^{-1}\subseteq G_s$ и группа $gG_tg^{-1}$ нормализует $s$-подгруппу $gTg^{-1}$, лежащую в $G_s$. Формируем множество $\mathfrak{T}^*$, состоящее из групп $gG_tg^{-1}$ для подходящих элементов $g\in G$. □

Следующая лемма вытекает из [9, следствие 4.1.4].

***Лемма* 1.6.** *Пусть $G$ – конечная группа,* $1\neq M \lhd G$, $M\subseteq \Phi(G)$. *Если $G/M$ есть $p$-замкнутая или $p$-нильпотентная группа, то и $G$ соответственно есть $p$-замкнутая или $p$-нильпотентная группа.*

***Лемма* 1.7.** *Пусть группа $G$ имеет вид $\langle z\rangle \leftthreetimes L$, где $L$ – простая группа лиева типа с полем определения $GF(q)$, $q=r^f$, $z^s=1$, где $s$ – простые числа, $s\neq r$, $s\ge 3$. Если $z$ есть диагональный, или полевой, или графо-полевой автоморфизм порядка 3 группы $L$,* $C := C_G(z)$, $C^* := C\cap L$, *то* $G_r = L_r \not\subseteq C$.

*Доказательство.* Если $z\in Outdiag(L)$, то интерпретируем $L$ как $O^{r'}(C_{\overline{X}}(\sigma))$ для эндоморфизма Стейнберга $\sigma$ подходящей полупростой алгебраической группы $\overline{X}$ над алгебраическим замыканием $\overline{F}_r$ поля $F_r$ из $r$ элементов. Из теоремы 2.5.1(b) и леммы 2.5.6 в [4] получаем, что $C_{<z>}(C_r)=1$.

Если $z\in\Phi_L$ или $z$ – графо-полевой автоморфизм группы $L$ и $L\cong^d \Sigma(q)$, то по [4, предложение 4.9.1 (a)] $C^0 = O^{r'}(C^*) \cong^d \Sigma(q^{1/s})$ [4, определение 2.2.4]. Но тогда $|L_r| > |C_r^*| = |C_r|$. □

***Лемма* 1.8** [10, лемма 6]. *Пусть $G$ – одна из групп:*

$L_n(q)$, $n\ge 3$;

$PSp_{2n}(q)$, $n\ge 3$;

$P\Omega_{2n+1}(q)$, $n\ge 2$;

$P\Omega_{2n}^{\pm}(q)$, $n\ge 4$;

$U_n(q)$, $n\ge 3$, *при этом $G$ не из $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$.*

*Положим* $b(G) := q^n - 1$ *при* $G = L_n(q)$, $b(G) := q^{2n} - 1$ *при* $G \in \{PSp_{2n}(q)$, $P\Omega_{2n+1}(q)$, $P\Omega_{2n}^-(q)$, $U_n(q)$ *с нечетным n*, $b(G) := q^{2(n-1)} - 1$ *при* $G \in \{U_n(q)$ *с четным n*; $P\Omega_{2n}^+(q)\}$. *Тогда*

(1) *каждый примитивный простой делитель t числа* $b(G)$ *является m-делителем группы G*;

(2) *каждый m-делитель t группы G является примитивным делителем числа* $b(G)$.

***Лемма* 1.9.** *Пусть* $G = \langle y \rangle \leftthreetimes L$, *где* $L$ *– простая группа лиева типа с полем определения* $GF(q)$ *характеристики* $s \geq 3$, $q = s^f$, $f = f_1 \cdot s$, $y \in \Phi_L$, $y^s = 1$, *или* $y$ *– графо-полевой автоморфизм порядка* $s = 3$ *группы L. Пусть t есть m-делитель группы* $L$, $C = C_G(y)$, $C^* = C \cap L$, $C^0 = O^{s'}(C^*)$. *Тогда* $L_t \nsubseteq C$. *В частности*, $G$ *не имеет* $s'CC$*-систем.*

*Доказательство.* По [4, теорема 7.1.4] $F^*(C^*) = F^*(C^0)$ – простая группа и $C_G(C^0) = \langle y \rangle = F(C)$. По [4, предложение 4.9.1 (а)]

$$\text{если } L = {}^d\Sigma(q), \text{ то } C^0 \cong {}^d\Sigma(q_0),\ q_0 = s^{f_1}, \quad (1.1)$$

где символ ${}^d\Sigma(q)$ приведен в [4, определение 2.2.4].

Если $t$ есть $m$-делитель в $G$, то по [4, теорема 3.1.3] он является и $m$-делителем в $C^0$. Предположим, что $L_t \subseteq C$. По лемме 1.2 (1) подгруппа $L_t$ не может нормализовать нетривиальных $s$-подгрупп в $L$. Поэтому $L_t \leftthreetimes \langle y \rangle = L_t \times \langle y \rangle$ и $L_t \subset C$, $L_t \subset C^*$. Так как $L_s \subset C^0 \lhd C^*$, то из леммы 1.4, леммы Фраттини [1, лемма I.7.8] и лемм 1.6 и 1.2(1) следует, что $L_t \subset C^0$.

Рассмотрим все возможности для $L$ и $C^0$ согласно (1.1).

1. $L \cong L_n(q)$, $C^0 \cong L_n(q_0)$. Если $n > 2$, то по лемме 1.8 имеем $e(q,t) = n = e(q_0,t)$. Противоречие. Если $n = 2$, то рассуждения аналогичны.

2. $L \cong U_n(q)$, $C^0 \cong U_n(q_0)$, $n > 2$. По лемме 1.8 имеем $e(q,t) = 2n = e(q_0,t)$ или $e(q,t) = 2(n-1) = e(q_0,t)$. Противоречие.

3–6. $L$ изоморфна одной из групп: $PSp_{2n}(q)$ при $n > 2$, $P\Omega_{2n+1}(q)$ при $n > 1$, $P\Omega_{2n}^+(q)$ при $n > 3$, $P\Omega_{2n}^-(q)$ при $n > 3$. Соответственно $C^0$ изоморфна одной из групп: $PSp_{2n}(q_0)$, $P\Omega_{2n+1}(q_0)$, $P\Omega_{2n}^+(q_0)$, $P\Omega_{2n}^-(q_0)$. Эти случаи исключаются аналогично случаям 1 и 2 с использованием леммы 1.8.

7. $L = C_2(q)$, $C^0 \cong G_2(q_0)$. Из строения параболических подгрупп группы $L$ [8, табл. 4.1, с. 127] и определения $m$-делителя $t$ группы следует, что

$$t \text{ не делит } q^2 - 1. \quad (1.2)$$

Поэтому $t$ делит

$$(q^6 - 1) = (q^2 - 1)(q^4 + q^2 + 1) =$$
$$= (q^2 - 1)(q^2 - q + 1)(q^2 + q + 1),$$

где $|L|_{s'} = (q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Отсюда следует, что $e(q,t) = 6$ или 3. Но тогда $t$ не делит $q_0^6 - 1$, следовательно, $t$ не делит $q_0^3 - 1$, так как $q^3 - 1 = s^{3f_1 s} - 1 > s^{6f_1} - 1 = q_0^6 - 1$ ввиду $s \geq 3$. Поэтому группа $G$ вида $\langle y \rangle \leftthreetimes G_2(q)$ не может иметь $s'CC$-систем для $s \geq 3$.

8. $L \cong F_4(q)$, $C^0 \cong F_4(q_0)$. В этом случае имеем $|L|_{s'} = (q^{12} - 1)(q^8 - 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Из строения параболических подгрупп группы $L$ [8, теорема 4.4] и определения $m$-делителя $t$ следует, что

$$t \text{ не делит } (q^2 - 1)(q^4 - 1)(q^6 - 1). \quad (1.3)$$

Поэтому $t$ делит $q^{12} - 1$ или $t$ делит $q^8 - 1$. Отсюда следует, что $e(q,t) = 12$ или 8. В самом деле, если $t$ делит $q^{12} - 1$ и $t$ – не примитивный делитель числа $q^{12} - 1$, то $t$ – примитивный делитель числа $q^n - 1$ с $n < 12$. По лемме 1.1 получаем, что $n$ делит 12. Тогда $n \in \{2,3,4,6\}$. Но это противоречит (1.3). Поэтому $e(q,t) = 12$.

Если $t$ делит $q^8 - 1$ и $e(q,t) \neq 8$, то $e(q,t) = m < 8$ и $m = 2, 4$. Противоречие с (1.3). Тогда $t$ не делит $q_0^{12} - 1$ и $t$ не делит $q_0^8 - 1$. В самом деле, если $e(q,t) = 8$, то $s^{8f_1 s} - 1 > s^{12f_1} - 1$ ввиду $s \geq 3$. Противоречие.

9–11. $L$ не изоморфна группам ${}^2B_2(q)$, ${}^2G_2(q)$, ${}^2F_4(q)$ ввиду того, что $s \geq 3$ не делит $q$ и по лемме 1.3.

12. $L \cong {}^3D_4(q)$, $C^0 \cong {}^3D_4(q_0)$. Тогда $|L|_{s'} = (q^8 + q^4 + 1)(q^6 - 1)(q^2 - 1)$. Из строения параболических подгрупп группы $L$ (см. [8, теорема 4.3]) и определения $m$-делителя $t$ следует, что

$$t \text{ не делит } q^6 - 1. \quad (1.4)$$

Поэтому $t$ делит

$$(q^8 + q^4 + 1) = (q^4 - q^2 + 1)(q^4 + q^2 + 1)$$

и поэтому $t$ делит $q^4 - q^2 + 1$. Так как $t$ делит $(q^{12} - 1) = (q^4 - 1)(q^8 + q^4 + 1)$, то $e(q,t) = 12$. В самом деле, если $e(q,t) \neq 12$, то $e(q,t) = n < 12$ и по лемме 1.1 получаем, что $n$ делит 12. Значит, $n \in \{2,3,4,6\}$, но $n \notin \{2,3,6\}$ по (1.4). Если $t$ делит $q^4 - 1$, то $t$ делит $q^2 + 1$ ввиду (1.4). Кроме того, $t$ делит $(-(q^2 + 1) + (q^4 - q^2 + 1)) = q^4 - 2q^2$, $t$ делит $q^2 - 2$, $t$ делит 3. Но $t > 3$ по [10, лемма 4].

Поэтому $t$ не делит $q^4-1$, $e(q,t)=12$ и $t$ не делит $q_0^{12}-1$. Противоречие.

13. $L\cong E_6(q)$, $C^0\cong E_6(q_0)$. Тогда
$$|L|_{s'}=(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^6-1)(q^5-1)(q^2-1).$$
В $L$ имеются параболические подгруппы, порядки которых делятся на
$$(q^5-1)(q^2-1)(q^4-1)(q^6-1)(q^8-1)$$
(см. [8, с. 169, 171]) и на
$$(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)$$
(см. [2, с. 76]). По определению $m$-делителя отсюда следует, что

$t$ не делит
$$(q^2-1)(q^3-1)(q^4-1)(q^5-1)(q^6-1)(q^8-1). \qquad (1.5)$$

Поэтому $t$ делит $(q^{12}-1)(q^9-1)$. Если $t$ делит $q^{12}-1$ и $e(q,t)=n<12$, то $n$ делит 12 по лемме 1.1. Тогда $n\in\{2,3,4,6\}$, что противоречит (1.5). Поэтому если $t$ делит $q^{12}-1$, то $e(q,t)=12$. Если $t$ делит $q^9-1$ и $e(q,t)=m<9$, то $m=3$ по лемме 1.1. Это противоречит (1.5). Итак, либо $e(q,t)=9$, либо $e(q,t)=12$. В любом случае $t$ не делит $(q_0^{12}-1)(q_0^8-1)$ ввиду $s\geq 3$, $q=s^{9f_1s}$, $q_0\leq s^{12f_1}$. Противоречие.

14. $L\cong {}^2E_6(q)$, $C^0\cong {}^2E_6(q_0)$. По [5, с. 53]

$t$ не делит
$$(q^2-1)(q^3+1)(q^4-1)(q^5+1)(q^6-1)(q^4+1). \qquad (1.6)$$

Учитывая значение числа $|L|_{s'}$ (см. [2, с. 145]), получаем, что $t$ делит $(q^{12}-1)(q^9+1)$. Если $t$ делит $q^{12}-1$ и $e(q,t)=n<12$, то по лемме 1.1 $n\in\{2,3,4,6,\}$. Это противоречит (1.6). Поэтому $e(q,t)=12$.

Если $t$ делит $q^9+1$, то $t$ делит $q^{18}-1$ и, если $e(q,t)=n<18$, то по лемме 1.1 $n\in\{2,3,6,9\}$. Это невозможно ввиду (1.6) и $t>2$. Поэтому $e(q,t)=18$. Даже если $e(q,t)=12$, то $t$ не делит $q_0^{18}-1$, так как $s^{12f_1s}-1>s^{18f_1}-1$ и $s\geq 3$. Противоречие.

15. $L\cong E_7(q)$, $C^0\cong E_7(q_0)$. По [2, с. 76] в $L$ есть параболические подгруппы, порядки которых делятся на $|E_6(q)|$ и на $|A_6(q)|$. Поэтому
$$t \text{ не делит } (q^{12}-1)\cdot\prod_{i=2}^{9}(q^i-1). \qquad (1.7)$$

Исходя из значения числа $|L|$, получаем, что $t$ делит $(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{10}-1)$. Если $t$ делит $q^{18}-1$ и $e(q,t)=n<18$, то по лемме 1.1 имеем $n\in\{2,3,6,9\}$, что противоречит (1.7). Поэтому $e(q,t)=18$. Если $t$ делит $q^{14}-1$, то, аналогично, $e(q,t)=14$. Если $t$ делит $q^{10}-1$, то опять по (1.7) и лемме 1.1 имеем $e(q,t)=10$. В любом из этих случаев $t$ не делит $q_0^k-1$, $k\in\{10,14,18\}$, ввиду $s\geq 3$. Противоречие.

16. $L\cong E_8(q)$, $C^0\cong E_8(q_0)$. По [2, с. 76] и [8, с. 176] группа $L$ имеет параболические подгруппы, порядки которых делятся на $|E_6(q)|$, $|E_7(q)|$, $|A_7(q)|$. По определению $m$-делителя $t$ получаем

$t$ не делит
$$\prod_{i=1}^{10}(q^i-1)(q^{12}-1)(q^{14}-1)(q^{18}-1). \qquad (1.8)$$

Исходя из значения числа $|L|$ (см. [2, с. 145]), получаем, что $t$ делит $(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{20}-1)$. Если $t$ делит $q^{30}-1$ и $e(q,t)=n<30$, то по лемме 1.1 имеем $n\in\{2,3,5,6,10\}$, что противоречит (1.8). Если $t$ делит $q^{24}-1$ и $e(q,t)=m<24$, то $m\in\{2,4,6,8,12\}$, что противоречит (1.8). Если $t$ делит $q^{20}-1$ и $e(q,t)l<20$, то, как и выше, $l\in\{2,4,5,10\}$, что, опять же противоречит (1.8). Итак, $e(q,t)=20$, или 24, или 20. В любом случае, $t$ не делит $q_0^{30}-1=s^{30f_1}-1$, поскольку $q^{20}-1=s^{20f_1s}-1>s_0^{30f_1}-1$ ввиду $s\geq 3$. Противоречие. □

***Лемма* 1.10.** *Пусть группа* $G=L_1\times\ldots\times L_n$, *где* $L_i$ *– изоморфные простые группы,* $1\leq i\leq n$. *Пусть* $G_t$ *нормализует s-подгруппу* $S\neq 1$ *из* $G_s$, $\{s,t\}\subseteq\pi(G)$. *Тогда и в каждой компоненте* $L_i$, $1\leq i\leq n$, *группы* $G$ *подгруппа* $L_i\cap G_t$ *нормализует s-подгруппу* $L_i\cap S\neq 1$.

*Доказательство.* Пусть $L:=L_1\times\ldots\times L_{n-1}$, $M:=L_n$. Предположим, что $L\cap S=:S_0\neq 1$. Тогда $(S\leftthreetimes G_t)\cap L=S_0\leftthreetimes L_t$. Поэтому к подгруппе $L\subset G$ можно применить предположение индукции и получить, что компонента $L_1$ удовлетворяет заключению леммы. Из изоморфизма компонент следует утверждение для всех $L_i$, $1\leq i\leq n$.

Если $L\cap S=1$, то пусть $\overline{G}:=G/L\cong$ $\cong L_n=M$. В группе $\overline{G}$ есть подгруппа $\overline{S}\leftthreetimes\overline{G}_t\cong S\leftthreetimes M_t$, где $M_t=G_t\cap M$. Из изоморфизма компонент следует утверждение. □

***Лемма* 1.11.** *Пусть группа* $G=G_sM$, *где* $M\lhd G$. *Если* $S$ *есть s-подгруппа группы* $G$, *которую нормализует подгруппа* $G_t=M_t$, $t\neq s$ *и* $S\nsubseteq M$, *то в* $S$ *есть подгруппа* $S^*\neq 1$ *такая, что* $S=(S\cap M)\cdot S^*$ *и* $[S^*,M_t]=1$.

*Доказательство.* Рассмотрим подгруппу $X=S\leftthreetimes M_t$ группы $G$. $X\cap M=S_0\leftthreetimes M_t$, где

$S_0 = S \cap M \lhd S$. Поэтому $S_0 \lhd X$. $M_t S_0 \lhd X$. По лемме Фраттини [1, теорема I.7.8]

$$X = M_t S_0 \cdot N_X(M_t).$$

Поэтому $|S / S_0|$ делит $|N_X(M_t)|$. По леммам 1.4, 1.6 и по [1, теорема VI.4.6] $S = S_0 \cdot S_1$, где $S_1 \subseteq N_X(M_t)_s$. Поэтому

$$[S_1, M_t] \subseteq [S, M_t] \subset S \cap M = S_0.$$

Поэтому $S_0 \cdot S_1 M_t / S_0 \cong S_1 M_t / S_0 \cap S_1 M_t$ – нильпотентная группа. Пусть $S_0 \cap S_1 M_t =: S_{00} S_1 M_t$. По лемме 1.4 в группе $S_1 M_t$ есть подгруппа $N$ такая, что $S_1 M_t = N S_{00}$ и $N \cap S_{00} \subseteq \Phi(N)$. По лемме 1.6 получаем, что $N$ – нильпотентная группа. Тогда $[N_s, M_t] = 1$ и $N_s S_0 = S_1 S_0 = S$. □

***Лемма* 1.12.** *Пусть неразрешимая группа $G = G_s \cdot F^*(G)$ и подгруппа $G_t$, $t \ne s$, нормализует подгруппу $S \subseteq G_s$. Если $S \nsubseteq F^*(G)$, то $S$ нормализует все простые неабелевы компоненты $L$ группы $F^*(G)$, для которых $L \cap G_t \ne 1$.*

*Доказательство.* Пусть $M$ – минимальная нормальная неразрешимая подгруппа группы $G$, $t$ делит $|M|$, $M = L_1 \times \ldots \times L_k$, где $L_i \cong L_1 = L$ для всех $1 \le i \le k$. Предположим, что в группе $G_s M$ выполняется $S \nsubseteq M$. По лемме 1.11 в $S$ существует подгруппа $S^* \ne 1$ такая, что

$$[S^*, M_t] = 1 = [S^*, M_t \cap L] = [S^*, L_t],$$

$S = (S \cap M) \cdot S^*$. Пусть $1 \ne y \in S^*$. Если $y \notin N_G(L)$, то $L_t = L_t^y \subset L \cap L^y$, что невозможно. Поэтому $y \in N_G(L)$, $S^* \subseteq N_G(L)$, $S \cap M \subseteq N_G(L)$, $S \subseteq N_G(L)$. □

***Лемма* 1.13.** *Пусть группа $G$ имеет вид $G_s \leftthreetimes L$, где $L$ – простая неабелева группа, $s \ge 3$, $s$ не делит $|L|$. Если $F(G) \ne G_s$, то $L$ – группа лиева типа над полем $GF(r)$ для некоторого простого числа $r$ и $G_s / F(G)$ – циклическая группа. В частности, если $G$ имеет $s'CC$-систему с $s \ge 3$, то $O_s(G) \ne 1$.*

*Доказательство.* Пусть $Q := F(G)$ и $Q \subset G_s$. Тогда $Q = C_G(L)G$, $G_s / Q$ изоморфна подгруппе группы $Out(L)$. Так как $s \ge 3$, то по [3, (7–3)] получаем, что $M$ – группа лиева типа над полем $GF(r)$. По [3, (7–13) (1)] $G_s / Q$ – циклическая группа. Поэтому, если $Q = O_s(G) = 1$, то $G_s$ – циклическая группа и она имеет точно по одной подгруппе каждого порядка. Тогда все подгруппы из множества $\mathfrak{T}$ нормализуют единственную подгруппу $T \ne 1$ наименьшего порядка. Поэтому $[T, L] = 1$, $T \lhd G$. □

***Лемма* 1.14.** *Пусть $G = \langle y \rangle \leftthreetimes L$, где $L$ – простая группа лиева типа с полем определения $GF(q)$ характеристики $r$, $q = r^f$, $y \in \Gamma_L$, $y^3 = 1$. Пусть $C = C_G(y)$, $C^* = C \cap L$, $C^0 = O^{r'}(C^*)$. Пусть $t$ есть $m$-делитель группы $L$. Тогда $G$ не имеет $3'CC$-систем, так как*

*(1) $r = 3$, $L_t \nsubseteq C$, если $L \cong {}^3D_4(q)$; $L_2 \nsubseteq C$, если $L \cong D_4(q)^a$;*

*(2) $r \ne 3$, $L_r \nsubseteq C$.*

*Доказательство.* (1). По [4, предложение 4.9.2] $L \in \{D_4(q)^a, {}^3D_4(q)\}$, где

$$D_4(q)^a = D_4(q) / Z(D_4(q)), \ C^* \cong G_2(q).$$

Если $L = {}^3D_4(q)$, то $e(q,t) = 12$ (пункт 12 в доказательстве леммы 1.9). Но для $C^*$ $e(q,t) \le 6$ (пункт 7 в доказательстве леммы 1.9). Противоречие.

Если $L = D_4(q)^a$, то $|L_2| \ne |C_2^*| = |G_2(q)_2|$ (по [6, теорема 4 (г)] $L_2 \in \mathfrak{T}$ нормализует 3-подгруппу вне $L$). Противоречие. Этим (1) доказано.

(2). Пусть теперь $r \ne 3$, $q \equiv \varepsilon = \pm 1 (\operatorname{mod} 3)$. Если $L_r \subseteq C$, то и $L_r \subseteq C^0$. По [3, (9–1)] $L \in \{D_4^a, {}^3D_4(q)\}$. В обоих случаях $|L_r| = r^{12f}$. В то же время по [4, табл. 4.7.3A] $|C_r^0| < q^7 = r^{7f}$. Поэтому предположение $L_r \subseteq C$ неверно. □

***Лемма* 1.15.** *Пусть группа*

$$G = (M_1 \times \ldots \times M_n).G_s,$$

*где $M_i$ – простые неабелевы группы для всех $i = \overline{1,n}$ имеет $s'CC$-систему, $s > 2$. Тогда*

$$F(G) = O_s(G) = F \ne 1.$$

*Доказательство.* Используем индукцию по порядку группы. Пусть $G_s = S$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{X}$ – множества, удовлетворяющие заключению леммы 1.5. Пусть $X = \{T_j \ne 1$ $s$-группы, $j = 1, \ldots, |\mathfrak{X}|\}$, $M = M_1 \times \ldots \times M_n$.

Пусть $\langle T_j / T_j \in \mathfrak{X} \rangle = Q$, $j = \overline{1, |\mathfrak{X}|}$. Тогда группа $QM$ удовлетворяет условию. Если $Q \subset S$, то по индуктивному заключению $F(QM) \ne 1$. Тогда $F(QM) \lhd QM \lhd G$ и все доказано. Поэтому пусть $Q = S$. По лемме 1.12 тогда $M_j \lhd G$ для всех $i = \overline{1,n}$. Рассмотрим группу $SM_i$. Если $SM_i \subset G$, то по индуктивному заключению $R = O_s(SM_i) \ne 1$. Тогда

$$C = C_G(M_i) \supseteq \langle R, M_1 \times \ldots \times M_{i-1} \times M_{i+1} \times \ldots \times M_n \rangle,$$

$C \subset G$, $CS \subset G$ $(C \lhd G)$. По индуктивному заключению $O_s(CS) = D \ne 1$. Если $D \cap C = D_0 \ne 1$, то $D_0 \lhd C \lhd G$ и все доказано. Поэтому пусть $D \cap C = 1$. Группа $X = S(M_2 \times \ldots \times M_i \times \ldots \times M_n)$ имеет порядок меньший, чем $|G|$. По индуктивному заключению $O_s(X) = E \neq 1$. Тогда $[E, M_i] = 1$. Так как $C_s = R$, то $E \subseteq R$. Тогда $[E, M] = 1$ и $1 \neq E \subseteq O_s(G)$.

Пусть далее $SM_i = G = SM$. По лемме 1.13 можно считать, что $s$ делит $|M|$. По леммам 1.2 (2) и 1.10 можно считать, что $S \nsubseteq M$, и что хотя бы один элемент $T \in \mathfrak{X}$ удовлетворяет условию $T \cap M = 1$. Тогда для некоторой подгруппы $M_t \in \mathfrak{T}$ имеем $[T, M_t] = 1$. Пусть $1 \neq y \in T$, $y^s = 1$ и $y$ есть $s$-автоморфизм группы $M$. Из [2, теоремы 4.239 и 4.240] следует, что $M$ – группа лиева типа (ввиду $s > 2$ ).

Если $M \in Chev(s)$, то пусть $t$ – $m$-делитель группы $M$. Это противоречит леммам 1.9 и 1.14.

Если $M \in Chev(r)$, $r \neq s$, то пусть $t = r$. Имеем противоречие с леммой 1.7. □

***Лемма* 1.16.** *Пусть $G$ – конечная неразрешимая группа с $s'CC$-системой $s \in \pi(G)$, $s \geq 3$ и силовская 2-подгруппа нормализует неабелеву $s$-подгруппу $S \neq 1$. Если все компоненты группы G есть простые $s'$-группы и $S \nsubseteq L(G)$, то*

$$[S', L(G)] = 1.$$

*Доказательство.* По лемме 1.12 группа $S$ нормализует все компоненты $L$ группы $X$. По лемме 1.13, если $S \neq F(SL) = F$, то $S / F$ – циклическая группа и $S' \subseteq F$. Из произвольного выбора $L$ и $[S', L] = 1$ следует, что $[S', L(G)] = 1$. □

***Лемма* 1.17.** *Пусть группа $G = L_1 \times ... \times L_n$, где $L_i \cong L_1$ для всех $1 \leq i \leq n$, $L_1$ – простая неабелева группа. Пусть $s \in \pi(L_1)$, $s > 3$. Тогда в группе G имеется силовская подгруппа $G_t$, $t \neq s$, которая не нормализует неединичных s-подгрупп. Если $s = 3$, то предыдущее утверждение также верно когда $L_1$ – простая группа лиева типа, простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества $A^*$.*

*Доказательство.* Предположим противное, что для всех $t \in \pi(G) \setminus \{s\}$ найдется $t$-подгруппа $G_t$, которая нормализует неединичную $s$-подгруппу из $G$. Тогда из леммы 1.5 следует, что в $G$ имеется $s'CC$-система такая, что её силовские $s'$-подгруппы $G_t$ нормализуют неединичные $s$-подгруппы из подгруппы $G_s$. Из $L_1 \lhd\lhd G$ и леммы 1.10 следовало бы, что и группа $L_1$ имела бы $s'CC$-систему ( $L_1 \cap G_t$ есть силовская подгруппа в $L_1$). Это противоречило бы лемме 1.2 (2). □

***Лемма* 1.18.** *Пусть $G = G_s L$, где $L$ – простая нормальная неабелева группа, $s \in \pi(L)$. Если $G$ имеет $s'CC$-систему с $s > 3$, то $F(G) = O_s(G) \neq 1$. Это верно и когда $s = 3$, $L$ – простая группа лиева типа, простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества $A^*$.*

*Доказательство.* Предположим, что $F(G) = F = 1$. Тогда $C_G(L) = 1$ и группа $\overline{G} = G_s L / L$ изоморфна $s$-подгруппе группы $Out(L)$. Заметим, что по лемме 1.2 (2) имеем $\overline{G} \neq 1$. Так как $s \geq 3$, то по [3, (7–3)] группа $L$ является простой группой лиева типа над полем $GF(r)$ для некоторого простого числа $r$.

Предположим, что $r \neq s$. По условию подгруппа $L_r$ из $\mathfrak{T}$ нормализует $s$-подгруппу $S \neq 1$ такую, что $S \cap L = 1$ (в противном случае $L_r$ содержится в группе вида $(S \leftthreetimes L_r) \cap L$, что противоречит теореме 4.254 в [2]). Тогда $[S, L_r] = 1$. Элемент $y \neq 1$ порядка $s$ из $S$ индуцирует автоморфизм группы $L$. По [3, (7–3)] и [4, теорема 2.5.12] $y \in Outdiag(L)$, или $y \in \Phi_L$, или $s = 3$ и $y$ – графовый или графо-полевой автоморфизм группы $L$. Но по леммам 1.7 и 1.15 $[y, L_r] \neq 1$. В случае $G \cong D_4(q) / Z(D_4(q))$ и $y \in \Gamma_L$ по лемме 1.15 группа $G$ не имеет $3'CC$-систем. Противоречие.

Предположим, что $r = s$. По [3, (7–3)] и [4, теорема 2.5.12 (c)] имеем $y \in \Phi_L$ или $s = 3$ и $y \in \Gamma_L$, или $y$ – графо-полевой автоморфизм группы $L$. Но тогда по леммам 1.9 и 1.15 группа $G$ не имеет $s'CC$-систем для $s \geq 3$. Противоречие.

Поэтому предположение о том, что $F(G) = 1$ неверно. □

***Лемма* 1.19.** *Пусть имеют место условия леммы 1.18. Тогда $F(G)$ есть наибольшая s-подгруппа, которую нормализует $L_r \subset L$ – группа лиева типа над полем $GF(r)$, или $L_t \subset L$ – группа лиева типа над полем $GF(s)$, где t – m-делитель группы L. Кроме того, $F(G) \cong G_s / L_s$, если $L$ – простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества $A^*$.*

*Доказательство.* Пусть $Q := F(G)$ и $QL \neq G$. Тогда $\overline{G} := G / QL \subseteq Out(L)$, $\overline{G} \neq 1$. Пусть $L$ – группа лиева типа над полем $GF(r)$ по [3, (7–3)].

1. Предположим, что $r \neq s$. Пусть $L_r$ нормализует наибольшую $s$-подгруппу $S$ в $G$, $Q \subseteq S$. По [2, теорема 4.254] имеем $S \cap L = 1$. Предположим, что $Q \subset S$. Пусть $R \subseteq S$ и $Q \subset R$, $|R : Q| = s$. Тогда $R / Q$ – подгруппа группы автоморфизмов группы $LQ / Q =: \overline{L}$. Положим

$\overline{R} := R/Q = \langle \overline{y} \rangle$. Из $[S, L_r] = 1$ следует, что $[\overline{y}, \overline{L}_r] = 1$. Это противоречит леммам 1.7 и 1.15. Поэтому $S = Q$.

2. Предположим, что $r = s$. Сохраняем обозначения из пункта 1. Тогда $\overline{y} \in \Phi_{\overline{L}}$, или $\overline{y} \in \Gamma_{\overline{L}}$, или $\overline{y}$ – графо-полевой автоморфизм группы $\overline{L}$ по [3, (7–3)] и [4, теорема 2.5.12 (c)]. По [5, лемма 3] $G$ имеет *m*-делитель $t$. Из леммы 1.2 (1) следует, что $L_t \in \mathfrak{T}$ нормализует наибольшую *s*-подгруппу $S$ такую, что $S \cap L = 1$, $Q \subseteq S$. Если $Q \subset S$, то из $[S, L_t] = 1$ следует $[\overline{y}, \overline{L}_t] = 1$. Это противоречит леммам 1.9 и 1.15. Поэтому $Q = S$.

Если $L$ – простая группа лиева типа или простая спорадическая группа или знакопеременная группа из множества $A^*$, то из теорем 4.239 и 4.240 в [2] и теорем 2 и 3 в [6] следует, что $QL = Q \times L = G$. □

## 2 Доказательство теоремы 0.1

Для дальнейшего нам удобно определить следующее условие.

***Условие*** (ω). *Пусть G – неразрешимая группа с* $s'CC$*-системой,* $s \geq 3$. *Множества* $\mathfrak{S}$, $G_s$ *и* $\mathfrak{T}$ *выбраны в соответствии с заключением леммы* 1.5. *Пусть* $G = G_s \cdot F$, *где* $F = M_1 \times \ldots \times M_n$, *где* $M_i$ *– минимальные нормальные неразрешимые подгруппы группы G,* $s \in \pi(M_i)$ *для* $1 \leq i \leq n$. *Пусть L – произвольная простая компонента группы G. Пусть силовская* 2*-подгруппа* $G_2$ *из* $\mathfrak{T}$ *нормализует наибольшую s-подгруппу* $S \neq 1$ *из* $G_s$. *Пусть силовская r-подгруппа* $G_r$ *из* $\mathfrak{T}$ *нормализует наибольшую s-подгруппу* $S^{(r)}$, *если L – группа лиева типа над полем* $GF(r)$. *Пусть силовская t-подгруппа* $G_t \in \mathfrak{T}$ *нормализует наибольшую s-подгруппу* $S^{(t)}$ *из* $G_s$, *если L – группа лиева типа над полем* $GF(s)$, *t – m-делитель группы L. Условимся группу G называть* (ω)*-группой.*

***Лемма* 2.1.** *Пусть G есть* (ω)*-группа. Если все её компоненты только простые группы лиева типа и имеют поле определения одной и той же характеристики* $r \neq s$, *то* $1 \neq S^{(r)} \subseteq F(G)$. *В частности,* $S \cap F(G) \neq 1$.

*Доказательство.* Пусть $G_r \cap L = L_r$ (ввиду $L \lhd\lhd G$). $L_r$ нормализует $S^{(r)}$ и по [2, теорема 4.254] $S^{(r)} \cap L = 1$. Пусть $1 \leq i \leq n$ и $L \subseteq M_i = M$. Тогда подгруппа $S^{(r)}M$ существует и по лемме 1.10 имеем $M \cap S^{(r)} = 1$. Тогда по лемме 1.12 существует и подгруппа $S^{(r)}L$. По лемме 1.19 получаем $S^{(r)} = F(S^{(r)}L)$. Тогда $[S^{(r)}, L] = 1$. Так как $L$ – произвольная компонента группы $G$, то $S^{(r)}$ централизует все компоненты группы $G$ и поэтому $S^{(r)} \subseteq F(G)$. Ясно, что $S^{(r)} \subseteq S$. □

***Лемма* 2.2.** *Пусть G есть* (ω)*-группа. Если* $s = 3$ *и все её компоненты являются простыми спорадическими группами или знакопеременными группами из множества* $A^*$, *то* $F(G) \neq 1$, $S \subseteq F(G)$. *Если* $s > 3$ *и все её компоненты являются простыми спорадическими группами или знакопеременными группами* $A_n$, $n \geq 5$, *то* $F(G) \neq 1$, $S \subseteq F(G)$.

*Доказательство.* Пусть $L$ – компонента группы $G$, $1 \leq i \leq n$ и $L \subseteq M_i =: M$. Тогда подгруппа $SM$ существует. Если $S \cap M \neq 1$, то по лемме 1.10 и в $L$ имеется подгруппа $L_2 \cap M_2$, которая нормализует нетривиальную s-подгруппу. Но по [9, теоремы 2 и 3] и лемме 1.2 (2) это невозможно ввиду $s \geq 3$. Поэтому $S \cap M = 1 = S \cap L$. По лемме 1.12 подгруппа $SL$ существует. Из теорем 4.239 и 4.240 в [2] следует, что $C_S(L) = S$. Поэтому $[S, L] = 1$. В силу произвольного выбора подгруппы $L$ получаем $[S, F] = 1$. □

Приступим к доказательству непосредственно теоремы 0.1.

Пусть $L^* := L(G)$, $F^*(G) = F(G) \cdot L^*$. По условиям теоремы $Z(L^*) = 1$, $S$ – наибольшая *s*-подгруппа из $G$, которую нормализует $G_2$.

Предположим, что $s$ делит порядки всех компонент группы $G$.

Предположим, что $s$ не делит $|F(G)|$. Пусть $X := G_s L^*$. Ясно, что $X$ есть (ω)-группа. По леммам 2.1 и 2.2 имеем

$$F(X) \cap O_s(X) =: Q \neq 1.$$

Так как $Q \lhd X$, то $[Q, L(G)] = 1$. Заключения (1)–(3) доказаны.

Предположим теперь, что компоненты группы $G$ являются $s'$-группами. Пусть $L^* = M_1 \times \ldots \times M_n$, где $M_i$ – минимальные нормальные подгруппы группы $G$, $1 \leq i \leq n$. Пусть $M := M_i = L_1 \times \ldots \times L_k$, где $L_j \cong L_1 =: L$ для всех $1 \leq j \leq k$. Предположим, что $S \subset F^*(G) = F(G) \times L^*$. Если $S \cap F(G) \neq 1$, то все доказано. Если $S \cap F(X) = 1$, то $s$ делит $|F(G)S \cap L^*|$, что невозможно. Поэтому $S \not\subseteq F^*(G)$. Так как компоненты группы $G$ имеют четный порядок, то по лемме 1.12 группа $S$ нормализует все компоненты группы $G$. Поэтому подгруппа $SL$ существует и $S \not\subseteq L$. По леммам 1.13 и 1.14 получаем

$S = F(SL)$, если $L$ является простой спорадической группой или знакопеременной группой $A_m$, $m \geq 5$. Если компонент, являющихся простыми группами лиева типа нет, то $[S, L] = 1$ влечет $[S, L^*] = 1$, ввиду произвольного выбора $L$. Заключение (4) доказано.

Если же в $L^*$ есть компоненты, являющиеся простыми группами лиева типа, то по леммам 1.14 и 1.16 получаем $[S', F^*] = 1$. Заключение (5) доказано. □

В связи с леммой 1.2 (2) остался открытым вопрос: пусть $G$ группа из множества $A_n^0$, имеет ли она $3'CC$ -систему?

**3 Доказательство теоремы 0.2**

Непростота группы следует из леммы 1.2 (2).

Пусть $M$ – минимальная нормальная подгруппа группы $G$. Используем индукцию по порядку группы. Пусть $G_s = S$.

Если $M$ – разрешимая группа и $s$ не делит $|M|$, то группа $\overline{G} = G/M$ удовлетворяет условию. Применение индукции к группе $\overline{G}$ дает нам результат для $\overline{G}$ и $G$.

Поэтому впредь считаем, что $R = R(G) = 1$.

Пусть $M = L_1 \times ... \times L_m$, где $L_i \cong L_1$ для $i = \overline{2, m}$ и $L_1$ – простая неабелева группа. Очевидно, что подгруппа $SM$ удовлетворяет условию. По лемме 1.15 $O_s(SM) = F \neq 1$. Пусть $L(G) = L$ – слой группы $G$. Из $R = 1$ следует, что $Z(L) = 1$. То есть $L(G)$ есть произведение всех минимальных нормальных подгрупп типа $M$, $L = N_1 \times ... \times N_k$, где $N_1 = M$. По лемме 1.15 имеем $O_s(SL) \neq 1$. Если $F^*(G) = L$, то имеем противоречие с [2, предложение 1.27] . Поэтому $F^*(G) = F(X)L$ и $F(X) \neq 1$, что исключено выше. □

**Заключение**

Рассмотрены критерии непростоты конечных групп, связанных с перестановочностью силовских подгрупп группы, взятых по одной для каждого простого числа, делящего порядок группы, с неединичными $s$-подгруппами группы, где $s$ – простое число, делящее порядок группы.

Отметим, что в теореме 0.2 условия слабее условий теорем 2 (i) и 1 из [11] для $s > 3$, но заключение $O_s(G) \neq 1$ теоремы 1 из [11] сильнее заключения $s$ делит $|R(G)|$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen / B. Huppert // Berlin – Springer, 1967. – 793 c.

2. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985.

3. *Gorenstein*, *D.* The local structure of the finite groups of characteristic 2 type / D. Gorenstein, R. Lyons // Memories AMS. – 1983. – Vol. 42, № 276. – P. 1–731.

4. *Gorenstein*, *D.* The classification of the finite simple groups / D. Gorenstein, R. Lyons, R. Solomon // Math. Surveys and Monographs (AMS. Providence R.I.). – 1998. – Vol. 40, № 3. – 419 p.

5. *Тютянов*, *В.Н.* Тройные факторизации в конечных группах / В.Н. Тютянов, Л.А. Шеметков // Доклады НАН Беларуси. – 2002. – Т. 46, № 4. – С. 52–55.

6. *Кондратьев*, *А.С.* 2-сигнализаторы конечных простых групп / А.С. Кондратьев, В.Д. Мазуров // Алгебра и логика. – 2003. – Т. 42, № 5. – С. 594–623.

7. *Сыскин*, *С.А.* Абстрактные свойства простых спорадических групп / С.А. Сыскин // Успехи матем. наук. – 1980. – Т. 35, № 5(215). – С. 181–212.

8. *Wilson*, *R.* The Finite simple groups / R. Wilson. – London: Springer-Verlag. – 2009.

9. *Шеметков*, *Л.А.* Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М.: Наука. – 1978.

10. *Пальчик*, *Э.М.* Конечные простые группы с факторизацией $G = G_\pi B$, $2 \notin \pi$ / Э.М. Пальчик // Труды Института математики и механики УрО РАН. – 2014. – Т. 20, № 2. – С. 242–249.

11. *Aschbacher*, *M.* On a conjecture of Quillen and a lemma of Robinson / M. Aschbacher, P. Kledman // Arch. Math. – 1990. – Vol. 55, № 3. – P. 209–217.

*Поступила в редакцию* 21.12.17.