МАТЕМАТИКА

УДК 517.925

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ НАЛИЧИЯ СВОЙСТВА ПЕНЛЕВЕ У СИСТЕМЫ ДВУХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОЙ СТЕПЕНИ

В.М. Пецевич, В.А. Пронько

Гродненский государственный университет им. Я. Купалы

NECESSARY CONDITIONS FOR THE SYSTEM OF TWO SECOND DEGREE DIFFERENTIAL EQUATIONS TO HAVE PAINLEVÉ PROPERTY

V.M. Petsevich, V.A. Pronko

Y. Kupala Grodno State University

Получены необходимые условия принадлежности исследуемой системы к системам типа Пенлеве.

Ключевые слова: *система обыкновенных дифференциальных уравнений*, *свойство Пенлеве*, *подвижные критические особые точки*, *метод малого параметра*.

Necessary conditions for the system in the title to be Painlevé type system were given.

Keywords: *system of the ordinary differential equations*, *Painleve's property*, *movable critical singularities*, *method of small parameter*.

1 Предварительные результаты

В работе, на предмет отсутствия подвижных критических особых точек, будем рассматривать систему двух дифференциальных уравнений

$$x'^2 = A_2 \cdot y^2 + A_1 \cdot y + A_0, \quad y'^2 = B_2 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + B_0, \tag{1.1}$$

где $x' = \dfrac{dx}{dt}$, $y' = \dfrac{dy}{dt}$, A_i, $i = \overline{0,2}$, − полиномы по x с аналитическими по t коэффициентами, B_j, $j = \overline{0,2}$, − полиномы по y с аналитическими по t коэффициентами,

$$A_2 \neq 0,\ B_2 \neq 0, \tag{1.2}$$

и правые части не являются одновременно полными квадратами. Запись $P \neq 0$, здесь и далее означает, что коэффициенты полинома P одновременно не обращаются в нуль в некоторой области D.

Пенлеве-анализ дифференциальной системы (1.1) в частных случаях проводился, например, в [1]–[5]. Были получены необходимые и достаточные условия отсутствия подвижных критических особых точек у решений исследованных там дифференциальных систем.

В данной работе найдем необходимые условия отсутствия подвижных критических особых точек для дифференциальной системы (1.1) в общем случае.

2 Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциальной системы второго порядка

Пусть $A_2 = \sum_{i=0}^{m_2} a_{2i} x^i$, $A_1 = \sum_{i=0}^{m_1} a_{1i} x^i$, $A_0 = \sum_{i=0}^{m_0} a_{0i} x^i$,

$$B_2 = \sum_{i=0}^{n_2} b_{i2} y^i,\ B_1 = \sum_{i=0}^{n_1} b_{i1} y^i,\ B_0 = \sum_{i=0}^{n_0} b_{i0} y^i.$$

Вводя в (1.1) малый параметр по формулам

$$x = \varepsilon^p X,\ y = Y,\ t = t_0 + \varepsilon^r \tau,$$

получим

$$\begin{gathered} \left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = \sum_{i=0}^{m_2} a_{2i} X^i Y^2 \varepsilon^{ip-2p+2r} + \\ + \sum_{i=0}^{m_1} a_{1i} X^i Y \varepsilon^{ip-2p+2r} + \sum_{i=0}^{m_0} a_{0i} X^i \varepsilon^{ip-2p+2r}, \\ \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = \sum_{i=0}^{n_2} b_{i2} Y^i X^2 \varepsilon^{2r+2p} + \\ + \sum_{i=0}^{n_1} b_{i1} Y^i X \varepsilon^{2r+p} + \sum_{i=0}^{n_0} b_{i0} Y^i \varepsilon^{2r}. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Рассмотрим случаи.

Если $m_2 \geq m_1$, $m_2 \geq m_0$, $m_2 > 4$, то в (2.1) положим $p = -2$, $r = m_2 - 2$. При $\varepsilon = 0$ получим упрощенную дифференциальную систему

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = a_{2m_2} X^{m_2} Y^2 + \lambda_{21} a_{1m_1} X^{m_1} Y + \lambda_{20} a_{0m_0} X^{m_0}, \quad \left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = 0, \tag{2.2}$$

где $m_2 > 4$,

$$\lambda_{21} = \begin{cases} 1, \text{ если } m_2 = m_1; \\ 0, \text{ если } m_2 > m_1, \end{cases} \quad \lambda_{20} = \begin{cases} 1, \text{ если } m_2 = m_0; \\ 0, \text{ если } m_2 > m_0. \end{cases}$$

Если $m_1 \geq m_2$, $m_1 \geq m_0$, $m_1 > 4$, то в (2.1) положим $p = -2$, $r = m_1 - 2$. При $\varepsilon = 0$ получим упрощенную дифференциальную систему

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = \lambda_{12} a_{2m_2} X^{m_2} Y^2 + a_{1m_1} X^{m_1} Y + \lambda_{10} a_{0m_0} X^{m_0},$$

$$\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = 0, \qquad (2.3)$$

где $m_1 > 4$,

$$\lambda_{12} = \begin{cases} 1, \text{ если } m_1 = m_2; \\ 0, \text{ если } m_1 > m_2, \end{cases} \quad \lambda_{10} = \begin{cases} 1, \text{ если } m_1 = m_0; \\ 0, \text{ если } m_1 > m_0. \end{cases}$$

Если $m_0 \ge m_2$, $m_0 \ge m_1$, $m_0 > 4$, то в (2.1) положим $p = -2$, $r = m_0 - 2$. При $\varepsilon = 0$ получим упрощенную дифференциальную систему

$$\left(\frac{dX}{d\tau}\right)^2 = \lambda_{02} a_{2m_2} X^{m_2} Y^2 + \lambda_{01} a_{1m_1} X^{m_1} Y + a_{0m_0} X^{m_0},$$

$$\left(\frac{dY}{d\tau}\right)^2 = 0, \qquad (2.4)$$

где $m_0 > 4$,

$$\lambda_{02} = \begin{cases} 1, \text{ если } m_0 = m_2; \\ 0, \text{ если } m_0 > m_2, \end{cases} \quad \lambda_{01} = \begin{cases} 1, \text{ если } m_0 = m_1; \\ 0, \text{ если } m_0 > m_1. \end{cases}$$

Решения систем (2.2)–(2.4) имеют подвижные критические особые точки [6].

Учитывая, что переменные x и y входят в систему (1.1) симметрично, заключаем, что для отсутствия подвижных критических особых точек у решений дифференциальной системы необходимо требовать, чтобы $n_2 \le 4$, $n_1 \le 4$, $n_0 \le 4$.

Таким образом, имеет место

***Лемма* 2.1.** *Для того, чтобы дифференциальная система* (1.1) *имела свойство Пенлеве необходимо, чтобы степени полиномов* A_i, $i = \overline{0,2}$, *по переменной x и степени полиномов* B_j, $j = \overline{0,2}$, *по переменной y были не выше* 4.

3 Необходимые условия наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения второго порядка второй степени

Изучение системы (1.1) на предмет отсутствия подвижных критических особых точек очень часто приводит к изучению уравнения второго порядка второй степени вида

$$\left(x'' - E\left(x', x, t\right)\right)^2 = F\left(x', x, t\right), \qquad (3.1)$$

где E, F – рациональные функции от x', x с аналитическими по t коэффициентами.

Основные результаты по отысканию необходимых условий, а в некоторых случаях и достаточных, содержатся в работах [7], [8]. Приведем некоторые из них.

***Лемма* 3.1** [7], [8]**.** *Для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения* (3.1) *необходимо, чтобы* $E\left(x', x, t\right)$, $F\left(x', x, t\right)$ *были полиномами по* x' *степени не выше* 2 *и* 4 *соответственно, коэффициенты которых являются рациональными по x функциями с аналитическими по t коэффициентами, т. е.*

$$E\left(x', x, t\right) = E_2\left(x, t\right) x'^2 + E_1\left(x, t\right) x' + E_0\left(x, t\right),$$
$$F\left(x', x, t\right) = F_4\left(x, t\right) x'^4 + F_3\left(x, t\right) x'^3 +$$
$$+ F_2\left(x, t\right) x'^2 + F_1\left(x, t\right) x' + F_0\left(x, t\right).$$

***Лемма* 3.2** [8]. *Пусть* $x' = \mu\left(x, t\right)$ *– нуль нечетной кратности* $F\left(x', x, t\right)$ *в котором* $E\left(x', x, t\right)$ *голоморфна. Тогда для наличия свойства Пенлеве у дифференциального уравнения* (3.1) *необходимо, чтобы решения дифференциального уравнения* $x' = \mu\left(x, t\right)$ *были особыми для* (3.1).

***Лемма* 3.3** [8]. *Если* (3.1) *имеет свойство Пенлеве, то нули* $F\left(x', x, t\right)$ *вида* $x = \gamma\left(t\right)$ *должны быть четной кратности, при условии, что* $E\left(x', x, t\right)$ *голоморфна в этих нулях.*

Уравнение

$$\left(x'' - E_2\left(x\right) \cdot x'^2\right)^2 = F_4\left(x\right) \cdot x'^4 \qquad (3.2)$$

инвариантно относительно замены переменных $\left(t, x\right) \to \left(t_0 + \varepsilon t, x\right)$ и, следовательно, является упрощенным в смысле Пенлеве для (3.1).

Пусть $x = x_0$ является полюсом хотя бы одной из функций E_2, F_4. Поскольку подстановка $X = x - x_0$, не изменяя существенно уравнение, изменяет рассматриваемый полюс функции на $X = 0$, то можно принять, что x_0 равно нулю. Таким образом, функции E_2, F_4 могут быть записаны в виде

$$E_2 = \frac{e_{2,-m}}{x^m} + \frac{e_{2,-m+1}}{x^{m-1}} + \ldots + e_{2,0} + \ldots,$$
$$F_4 = \frac{f_{4,-n}}{x^n} + \frac{f_{4,-n+1}}{x^{n-1}} + \ldots + f_{4,0} + \ldots, \qquad (3.3)$$

где $\left|e_{2,-m}\right| + \left|f_{4,-n}\right| \ne 0$.

Уравнение (3.2) заменим системой

$$x' = y, \ \left(y' - E_2\left(x\right) \cdot y^2\right)^2 = F_4\left(x\right) \cdot y^4. \qquad (3.4)$$

В (3.4) введем малый параметр λ по формулам $x = \lambda^p X$, $y = \lambda^q Y$. В результате получим

$$X' = \lambda^{q-p} Y,$$

$$\left(Y' - \lambda^{q-mp}\left(\frac{e_{2,-m}}{X^m} + O\left(\lambda^p\right)\right) \cdot Y^2\right)^2 = \qquad (3.5)$$

$$= \lambda^{2q-np}\left(\frac{f_{4,-n}}{X^n} + O\left(\lambda^p\right)\right) \cdot Y^4.$$

Пусть выполняется хотя бы одно из неравенств $m > 1$, $n > 2$. Рассмотрим случаи.

1. Если $n > 2m$, то, полагая $p = 2$, $q = n$, при $\lambda = 0$ упрощенная система примет вид

$$X' = 0, \ Y'^2 = \frac{f_{4,-n}}{X^n} \cdot Y^4,$$

из которой имеем $X = X_0$, $Y = \dfrac{\alpha}{t - t_0}$, где t_0, X_0 –

здесь и далее, произвольные постоянные интегрирования, $\alpha = \mp\sqrt{\dfrac{X_0^n}{f_{4,-n}}}$.

Разлагая решения системы (3.5) по степеням λ, получим

$$X = X_0 + \lambda^{n-2} X_1 + \lambda^{n-1} X_2 + \ldots,$$
$$Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \ldots$$

Для нахождения X_1 будем иметь уравнение $\dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{\alpha}{t - t_0}$, из которого находим, что

$$X_1 = \alpha \ln\left(t - t_0\right) + C,$$

где C − здесь и далее, постоянная интегрирования. Следовательно X_1, а потому и X, имеют подвижную логарифмическую точку ветвления в рассматриваемом случае.

2. Если $n < 2m$, то, полагая $p = 2$, $q = 2m$, при $\lambda = 0$ упрощенная система примет вид $X' = 0,\ Y' - \dfrac{e_{2,-m}}{X^m} \cdot Y^2 = 0$, из которой имеем $X = X_0$, $Y = \dfrac{\alpha}{t - t_0}$, где $\alpha = -\dfrac{X_0^m}{e_{2,-m}}$.

Разлагая решения системы (3.5) по степеням λ, получим

$$X = X_0 + \lambda^{2m-2} X_1 + \lambda^{2m-1} X_2 + \ldots,$$
$$Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \ldots$$

Для нахождения X_1 будем иметь уравнение $\dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{\alpha}{t - t_0}$, из которого находим, что

$$X_1 = \alpha \ln\left(t - t_0\right) + C.$$

Следовательно X_1, а потому и X, имеют подвижную логарифмическую точку ветвления в рассматриваемом случае.

3. Если $n = 2m$, то, полагая $p = 2$, $q = 2m$, при $\lambda = 0$ упрощенная система примет вид $X' = 0,\ Y' - \dfrac{e_{2,-m}}{X^m} \cdot Y^2 = \pm\sqrt{f_{4,-2m}} \cdot \dfrac{Y^2}{X^m}$, из которой имеем $X = X_0$, $Y = \dfrac{\alpha}{t - t_0}$, где $\alpha = -\dfrac{X_0^m}{e_{2,-m} \pm \sqrt{f_{4,-2m}}}$.

Разлагая решения системы (3.5) по степеням λ, получим

$$X = X_0 + \lambda^{2m-2} X_1 + \lambda^{2m-1} X_2 + \ldots,$$
$$Y = Y_0 + \lambda Y_1 + \lambda^2 Y_2 + \ldots$$

Для нахождения X_1 будем иметь уравнение $\dfrac{dX_1}{dt} = \dfrac{\alpha}{t - t_0}$, из которого находим, что

$$X_1 = \alpha \ln\left(t - t_0\right) + C.$$

Следовательно X_1, а потому и X, имеют подвижную логарифмическую точку ветвления в рассматриваемом случае.

Таким образом, имеет место

Лемма 3.4. *При* $m > 1$ *или* $n > 2$ *общее решение дифференциального уравнения* (3.2), *где* E_2, F_4 *определяются соотношениями* (3.3), *имеет подвижные критические особые точки.*

Согласно лемме 3.4, для отсутствия подвижных критических особых точек у общего решения уравнения (3.2) необходимо, чтобы

$$E_2 = \frac{e_{2,-1}}{x} + e_{2,0} + e_{2,1} x + \ldots,$$
$$F_4 = \frac{f_{4,-2}}{x^2} + \frac{f_{4,-1}}{x} + f_{4,0} + f_{4,1} x + \ldots \tag{3.6}$$

Рассмотрим уравнение (3.2) в случае

$$\left|e_{2,-1}\right| + \left|f_{4,-2}\right| \neq 0. \tag{3.7}$$

Введем в (3.2) малый параметр λ по формуле $x = \lambda^2 X$. При $\lambda = 0$ имеем упрощенное дифференциальное уравнение

$$\left(X'' - e_{2,-1} \cdot \frac{X'^2}{X}\right)^2 = f_{4,-2} \cdot \frac{X'^4}{X^2}.$$

Интегрируя его, получим

$$X = \exp\left(C_1 t + C_2\right), \text{ если } \mu = 1;$$
$$X = \left(C_1 t + C_2\right)^{\frac{1}{1-\mu}}, \text{ если } \mu \neq 1,$$

где C_1, C_2 − постоянные интегрирования,

$$\mu = e_{2,-1} \pm \sqrt{f_{4,-2}}, \tag{3.8}$$

откуда $e_{2,-1} = 1 - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\delta} + \dfrac{1}{\gamma}\right)$, $\sqrt{f_{4,-2}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{1}{\gamma}\right)$, $\delta, \gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Следовательно, имеет место

Лемма 3.5. *Для отсутствия у решений дифференциального уравнения* (3.2) *в случае* (3.6), (3.7) *подвижных критических особых точек необходимо, чтобы было* $\mu = 1$, *либо* $\mu = 1 - \dfrac{1}{\gamma}$, $\gamma \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, *где* μ *определяется* (3.8).

Пусть $e_{2,-1} = 0$. Тогда, с учетом (3.6), где $f_{4,-2} \neq 0$, уравнение (3.2) запишем в виде

$$\left(x'' - \left(e_{2,0} + e_{2,1} x + \ldots\right) x'^2\right)^2 =$$
$$= \left(\frac{f_{4,-2}}{x^2} + \frac{f_{4,-1}}{x} + f_{4,0} + f_{4,1} x + \ldots\right) \cdot x'^4.$$

Введя малый параметр λ по формулам $x = \lambda X$, при $\lambda = 0$ получим упрощенное дифференциальное уравнение

$$X''^2 = f_{4,-2} \cdot \frac{X'^4}{X^2}.$$

В [8], непосредственным интегрированием, найдено общее решение этого уравнения, которое однозначно только при $f_{4,-2} = 0$.

Также F_4 не может иметь простой полюс при значении $x = x_0$, для которого E_2 голоморфна, поскольку в этом случае $x(t)$ должна допускать сходящееся разложение по возрастающим степеням $(t-t_0)^{\frac{1}{2}}$ в виде

$$x(t)=x_0+a_1\cdot(t-t_0)+h_0\cdot(t-t_0)^{\frac{3}{2}}+$$
$$+a_2\cdot(t-t_0)^2+h_1\cdot(t-t_0)^{\frac{5}{2}}+\ldots$$

В этом разложении x_0 и a_1 – постоянные интегрирования, и

$$h_0=\pm\frac{4}{3}\cdot a_1^{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{f_{4,-1}}\neq 0.$$

Следовательно, $x(t)$ имеет подвижную алгебраическую точку ветвления.

Таким образом

$$E_2=\sum\frac{\alpha_{2k}}{x-\beta_k}+\varphi_{20}+\varphi_{21}\,x+\ldots+\varphi_{2m}\,x^m,$$

$$F_4=\sum\frac{\eta_{4k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{4k}}{x-\beta_k}+$$
$$+\psi_{40}+\psi_{41}x+\ldots+\psi_{4n}x^n,$$

где $\alpha_{2k}\neq 0$ или $\alpha_{2k}=\eta_{4k}=\gamma_{4k}=0$.

Подставим полученные выражения для E_2, F_4 в (3.2) и выполним замену $x=\dfrac{1}{y}$. Получим

$$\left(y''+\left(\sum\frac{\alpha_{2k}}{y\left(1-y\beta_k\right)}-\right.\right.$$
$$\left.\left.-\frac{2}{y}+\frac{\varphi_{20}}{y^2}+\frac{\varphi_{21}}{y^3}+\ldots+\frac{\varphi_{2m}}{y^{m+2}}\right)y'^2\right)^2=$$
$$=\left(\sum\frac{\eta_{4k}}{y^2\left(1-y\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{4k}}{y^3\left(1-y\beta_k\right)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\psi_{40}}{y^4}+\frac{\psi_{41}}{y^5}+\ldots+\frac{\psi_{4n}}{y^{n+4}}\right)y'^4.$$

Согласно лемме 3.4, для отсутствия подвижных критических особых точек у решений дифференциального уравнения (3.2), необходимо требовать, чтобы $\varphi_{2i}=0$, $i=\overline{0,m}$, и $\psi_{4j}=0$, $j=\overline{0,n}$.

Таким образом, имеет место

***Лемма* 3.6.** *Для отсутствия у решений уравнения* (3.1) *подвижных критических особых точек необходимо, чтобы*

$$E_2\left(x,t\right)=\sum\frac{\alpha_{2k}\left(t\right)}{x-\beta_k\left(t\right)},$$

$$F_4\left(x,t\right)=\sum\frac{\eta_{4k}\left(t\right)}{\left(x-\beta_k\left(t\right)\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{4k}\left(t\right)}{x-\beta_k\left(t\right)},$$

причем, если $\alpha_{2k}\left(t\right)=0$, *то должно быть*

$$\eta_{4k}\left(t\right)=\gamma_{4k}\left(t\right)=0.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\left(x''-\left(E_2\left(x,t\right)x'^2+E_1\left(x,t\right)x'+E_0\left(x,t\right)\right)\right)^2=$$
$$=F_4\left(x,t\right)x'^4+F_3\left(x,t\right)x'^3+ \qquad (3.9)$$
$$+F_2\left(x,t\right)x'^2+F_1\left(x,t\right)x'+F_0\left(x,t\right),$$

где E_2, E_1, E_0, F_4, F_3, F_2, F_1, F_0 – рациональные функции по x с аналитическими по t коэффициентами. Пусть $x=h(t)$ при каждом t будет полюсом рассматриваемых функций. Поскольку подстановка $X=x-h(t)$, не изменяя существенно уравнение, изменяет указанный полюс в рассматриваемых функциях на $X=0$, то можно принять, что $h(t)$ тождественно равно нулю. Таким образом, с учетом доказанных выше лемм, уравнение (3.9) может быть записано в форме

$$\left(x''-\left[\frac{x'^2}{x}\left(e_{2,-1}+O(x)\right)+\frac{x'}{x^n}\left(e_{1,-n}+O(x)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{x^m}\left(e_{0,-m}+O(x)\right)\right]\right)^2=\frac{x'^4}{x^2}\left(f_{4,-2}+O(x)\right)+$$
$$+\frac{x'^3}{x^k}\left(f_{3,-k}+O(x)\right)+\frac{x'^2}{x^l}\left(f_{2,-l}+O(x)\right)+$$
$$+\frac{x'}{x^j}\left(f_{1,-j}+O(x)\right)+\frac{1}{x^i}\left(f_{0,-i}+O(x)\right).$$

Будем считать, что имеет место (3.7). Введем малый параметр по формулам $x=\lambda X$, $t=t_0+\lambda^r z$. В результате получим

$$\left(\ddot{X}-\left[\frac{\dot{X}^2}{X}\left(e_{2,-1}+O(\lambda)\right)+\lambda^{r-n}\frac{\dot{X}}{X^n}\left(e_{1,-n}+O(\lambda)\right)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\lambda^{2r-1-m}\frac{1}{X^m}\left(e_{0,-m}+O(\lambda)\right)\right]\right)^2=$$
$$=\frac{\dot{X}^4}{X^2}\left(f_{4,-2}+O(\lambda)\right)+\lambda^{r+1-k}\frac{\dot{X}^3}{X^k}\left(f_{3,-k}+O(\lambda)\right)+$$
$$+\lambda^{2r-l}\frac{\dot{X}^2}{X^l}\left(f_{2,-l}+O(\lambda)\right)+\lambda^{3r-1-j}\frac{\dot{X}}{X^j}\left(f_{1,-j}+O(\lambda)\right)+$$
$$+\lambda^{4r-2-i}\frac{1}{X^i}\left(f_{0,-i}+O(\lambda)\right), \qquad (3.10)$$

здесь точки обозначают производные по новой независимой переменной z.

Сравнивая выражения $r-n$, $2r-1-m$, $r+1-k$, $2r-l$, $3r-1-j$, $4r-2-i$ при $\lambda=0$ получим соответствующие упрощенные уравнения. Однако, все эти уравнения можно заменить одним

$$\left(\ddot{X}-\left[e_{2,-1}\cdot\frac{\dot{X}^2}{X}+e_{1,-n}\cdot\frac{\dot{X}}{X^n}+e_{0,-2n+1}\cdot\frac{1}{X^{2n-1}}\right]\right)^2=$$
$$=f_{4,-2}\cdot\frac{\dot{X}^4}{X^2}+f_{3,-n-1}\cdot\frac{\dot{X}^3}{X^{n+1}}+f_{2,-2n}\cdot\frac{\dot{X}^2}{X^{2n}}+ \qquad (3.11)$$
$$+f_{1,-3n+1}\cdot\frac{\dot{X}}{X^{3n-1}}+f_{0,-4n+2}\cdot\frac{1}{X^{4n-2}},$$

если считать

$$\left|e_{1,-n}\right|+\left|e_{0,-2n+1}\right|+ \\ +\left|f_{3,-n-1}\right|+\left|f_{2,-2n}\right|+\left|f_{1,-3n+1}\right|+\left|f_{0,-4n+2}\right|\neq 0. \quad (3.12)$$

В (3.11) выполним замену

$$\dot{X}X^{n-1}=\frac{1}{Y}. \quad (3.13)$$

Тогда, находя логарифмическую производную, получим

$$\frac{\ddot{X}}{\dot{X}}=-\frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{(n-1)\dot{X}}{X}. \quad (3.14)$$

В силу (3.13), (3.14) уравнение (3.11) запишется в виде

$$\left(\dot{X}\left(-\frac{\dot{Y}}{Y}-\frac{(n-1)\dot{X}}{X}\right)-\right. \\ \left.\left[e_{2,-1}\cdot\frac{\dot{X}^2}{X}+e_{1,-n}\cdot\frac{\dot{X}}{X^n}+e_{0,-2n+1}\cdot\frac{1}{X^{2n-1}}\right]\right)^2= \\ =f_{4,-2}\cdot\frac{\dot{X}^4}{X^2}+f_{3,-n-1}\cdot\frac{\dot{X}^3}{X^{n+1}}+f_{2,-2n}\cdot\frac{\dot{X}^2}{X^{2n}}+ \\ +f_{1,-3n+1}\cdot\frac{\dot{X}}{X^{3n-1}}+f_{0,-4n+2}\cdot\frac{1}{X^{4n-2}},$$

или

$$-\dot{Y}X^n=n-1+e_{2,-1}+e_{1,-n}\cdot Y+e_{0,-2n+1}\cdot Y^2\pm \\ \pm\sqrt{f_{4,-2}+f_{3,-n-1}\cdot Y+f_{2,-2n}\cdot Y^2+f_{1,-3n+1}\cdot Y^3+f_{0,-4n+2}\cdot Y^4}. \quad (3.15)$$

Уравнение (3.11) заменим системой

$$-\dot{Y}X^n=n-1+e_{2,-1}+e_{1,-n}\cdot Y+e_{0,-2n+1}\cdot Y^2\pm \\ \pm\sqrt{f_{4,-2}+f_{3,-n-1}\cdot Y+f_{2,-2n}\cdot Y^2+f_{1,-3n+1}\cdot Y^3+f_{0,-4n+2}\cdot Y^4}, \\ \dot{X}=\frac{1}{YX^{n-1}}. \quad (3.16)$$

Если $n>1$, то $n-1+\mu\neq 0$ в силу леммы 3.5. Поэтому уравнение

$$n-1+e_{2,-1}+e_{1,-n}Y+e_{0,-2n+1}Y^2\pm \\ \pm\sqrt{f_{4,-2}+f_{3,-n-1}Y+f_{2,-2n}Y^2+f_{1,-3n+1}Y^3+f_{0,-4n+2}Y^4}=0$$

относительно Y с постоянными коэффициентами имеет не меньше одного не равного нулю корня, например $Y=Y_1$. Тогда $Y=Y_1$ будет частным решением первого уравнения системы (3.16). Но второе уравнение системы имеет решение с подвижной критической особой точкой (поскольку $n>1$). Следовательно, уравнение (3.11) не обладает свойством Пенлеве. Итак, n должно равняться единице, и соответственно $m=1$, $k=2$, $l=2$, $j=2$, $i=2$. Таким образом, если E_1, E_0, F_3, F_2, F_1, F_0 имеют полюс $x=h(t)$, то для E_1, E_0 он должен быть первого порядка, а для F_3, F_2, F_1, F_0 – не выше второго порядка.

Рассмотрим уравнение (3.11) в случае $e_{2,-1}=0$, при этом $f_{4,-2}=0$ по лемме 3.6, т. е., когда $X=0$ является полюсом хотя бы для одной из функций E_1, E_0, F_3, F_2, F_1, F_0, но не является полюсом для E_2, F_4. Значит (3.11) примет вид

$$\left(\ddot{X}-\left[e_{1,-1}\cdot\frac{\dot{X}}{X}+e_{0,-1}\cdot\frac{1}{X}\right]\right)^2= \\ =f_{3,-2}\cdot\frac{\dot{X}^3}{X^2}+f_{2,-2}\cdot\frac{\dot{X}^2}{X^2}+f_{1,-2}\cdot\frac{\dot{X}}{X^2}+f_{0,-2}\cdot\frac{1}{X^2} \quad (3.17)$$

и будет эквивалентно системе

$$\dot{X}=\frac{1}{Y}, \\ \left(\dot{Y}+\left[e_{1,-1}\cdot\frac{Y}{X}+e_{0,-1}\cdot\frac{Y^2}{X}\right]\right)^2= \\ =f_{3,-2}\cdot\frac{Y}{X^2}+f_{2,-2}\cdot\frac{Y^2}{X^2}+f_{1,-2}\cdot\frac{Y^3}{X^2}+f_{0,-2}\cdot\frac{Y^4}{X^2}.$$

Введя в эту систему малый параметр λ по формулам $z=\lambda^2\tau$, $X=u$, $Y=\lambda^2 w$, получим

$$w\frac{du}{d\tau}=1, \\ \left(u\frac{dw}{d\tau}+e_{1,-1}w\lambda^2+e_{0,-1}w^2\lambda^4\right)^2= \\ =f_{3,-2}w\lambda^2+f_{2,-2}w^2\lambda^4+f_{1,-2}w^3\lambda^6+f_{0,-2}w^4\lambda^8. \quad (3.18)$$

Будем искать решение системы (3.18) в виде ряда по степеням λ:

$$u=u_0+\lambda u_1+\lambda^2 u_2+\ldots, \\ w=w_0+\lambda w_1+\lambda^2 w_2+\ldots \quad (3.19)$$

Подставляя (3.19) в (3.18), найдем системы уравнений для определения функций u_i, w_j. Из них получим, что $w_0=const$, $u_0=\dfrac{\tau-\tau_0}{w_0}$.

Далее, если $f_{3,-2}\neq 0$, то

$$w_1=\pm w_0\sqrt{f_{3,-2}w_0}\ln(\tau-\tau_0).$$

Следовательно, w_1 имеет подвижную логарифмическую точку ветвления. Поэтому требуем, чтобы $f_{3,-2}=0$. Тогда $w_1=const$.

Если $\left|e_{1,-1}\right|+\left|f_{2,-2}\right|\neq 0$, то

$$w_2=-w_0^2\left(e_{1,-1}\pm\sqrt{f_{2,-2}}\right)\ln(\tau-\tau_0).$$

Требуем, чтобы $e_{1,-1}=0$, $f_{2,-2}=0$. Тогда $w_2=const$.

Если $f_{1,-2}\neq 0$, то

$$w_3=\pm w_0^2\sqrt{f_{1,-2}w_0}\ln(\tau-\tau_0).$$

Следовательно, надо требовать, чтобы $f_{1,-2}=0$. Тогда $w_3=const$.

Если $\left|e_{0,-1}\right|+\left|f_{0,-2}\right|\neq 0$, то

$$w_4=-w_0^3\left(e_{0,-1}\pm\sqrt{f_{0,-2}}\right)\ln(\tau-\tau_0).$$

Значит, надо полагать, что $e_{0,-1}=0$, $f_{0,-2}=0$. Тогда $w_4=const$.

Таким образом, имеет место

***Лемма* 3.7.** *Для отсутствия у общего решения дифференциального уравнения* (3.1), *подвижных критических особых точек необходимо, чтобы полюс* $x=h(t)$ *для* E_2, E_1, E_0 *был первого порядка, а для* F_4, F_3, F_2, F_1, F_0 *– не выше второго порядка и полюсы функций* E_1, E_0, F_4, F_3, F_2, F_1, F_0 *совпадали с полюсами функции* E_2.

Следовательно, уравнение (3.9) может быть записано в виде

$$\left(x''-\left[\sum\frac{\alpha_{2k}}{x-\beta_k}\cdot x'^2+\right.\right.$$

$$+\left(\sum\frac{\alpha_{1k}}{x-\beta_k}+\varphi_{10}+\varphi_{11}x+\ldots+\varphi_{1m}x^m\right)\cdot x'$$

$$\left.\left.+\sum\frac{\alpha_{0k}}{x-\beta_k}+\varphi_{00}+\varphi_{01}x+\ldots+\varphi_{0n}x^n\right]\right)^2=$$

$$=\left(\sum\frac{\eta_{4k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{4k}}{x-\beta_k}\right)\cdot x'^4+$$

$$+\left(\sum\frac{\eta_{3k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{3k}}{x-\beta_k}+\right.$$

$$\left.+\psi_{30}+\psi_{31}x+\ldots+\psi_{3r}x^r\right)\cdot x'^3+$$

$$+\left(\sum\frac{\eta_{2k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{2k}}{x-\beta_k}+\right.$$

$$\left.+\psi_{20}+\psi_{21}x+\ldots+\psi_{2l}x^l\right)\cdot x'^2+$$

$$+\left(\sum\frac{\eta_{1k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{1k}}{x-\beta_k}+\right.$$

$$\left.+\psi_{10}+\psi_{11}x+\ldots+\psi_{1j}x^j\right)\cdot x'+$$

$$+\sum\frac{\eta_{0k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{0k}}{x-\beta_k}+\psi_{00}+\psi_{01}\,x+\ldots+\psi_{0i}\,x^i,$$

где коэффициенты – аналитические по t функции. Выполним замену $x=\dfrac{1}{y}$, получим

$$\left(y''-2\frac{y'^2}{y}+\left[\sum\frac{\alpha_{2k}}{y\left(1-y\beta_k\right)}\cdot y'^2-\right.\right.$$

$$-\left(\sum\frac{y\alpha_{1k}}{1-y\beta_k}+\varphi_{10}+\frac{\varphi_{11}}{y}+\frac{\varphi_{12}}{y^2}+\ldots+\frac{\varphi_{1m}}{y^m}\right)\cdot y'+$$

$$+\sum\frac{y^3\alpha_{0k}}{1-y\beta_k}+\varphi_{00}y^2+\varphi_{01}y+\varphi_{02}+$$

$$\left.\left.+\frac{\varphi_{03}}{y}+\frac{\varphi_{04}}{y^2}+\ldots+\frac{\varphi_{0m}}{y^{m-2}}\right]\right)^2=$$

$$=\left(\sum\frac{\eta_{4k}}{y^2\left(1-y\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{4k}}{y^3\left(1-y\beta_k\right)}\right)\cdot y'^4+$$

$$+\left(\sum\frac{\eta_{3k}}{\left(1-y\beta_k\right)^2}+\sum\frac{\gamma_{3k}}{y\left(1-y\beta_k\right)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\psi_{30}}{y^2}+\frac{\psi_{31}}{y^3}+\ldots+\frac{\psi_{3r}}{y^{r+2}}\right)\cdot y'^3+$$

$$+\left(\sum\frac{y^2\eta_{2k}}{\left(1-y\beta_k\right)^2}+\sum\frac{y\gamma_{2k}}{1-y\beta_k}+\right.$$

$$\left.+\eta_{20}+\frac{\psi_{21}}{y}+\frac{\psi_{22}}{y^2}+\frac{\psi_{23}}{y^3}+\ldots+\frac{\psi_{2l}}{y^l}\right)\cdot y'^2+$$

$$+\left(\sum\frac{y^4\eta_{1k}}{\left(1-y\beta_k\right)^2}+\sum\frac{y^3\gamma_{1k}}{1-y\beta_k}+\right.$$

$$+\psi_{10}y^2+\psi_{11}y+\psi_{12}+$$

$$\left.+\frac{\psi_{13}}{y}+\frac{\psi_{14}}{y^2}+\frac{\psi_{15}}{y^3}+\ldots+\frac{\psi_{1j}}{y^{j-2}}\right)\cdot y'+$$

$$+\sum\frac{y^6\eta_{0k}}{\left(1-y\beta_k\right)^2}+\sum\frac{y^5\gamma_{0k}}{1-y\beta_k}+$$

$$+\psi_{00}y^4+\psi_{01}y^3+\psi_{02}y^2+\psi_{03}y+$$

$$+\psi_{04}+\frac{\psi_{05}}{y}+\frac{\psi_{06}}{y^2}+\frac{\psi_{07}}{y^3}+\ldots+\frac{\psi_{0i}}{y^{i-4}}.$$

Таким образом, справедлива

***Теорема* 3.1.** *Для того, чтобы общее решение уравнения* (3.1) *имело свойство Пенлеве необходимо, чтобы оно имело вид*

$$\left(x''+\sum\frac{\alpha_{2k}}{x-\beta_k}\cdot x'^2+\left(\varphi_{11}\,x+\varphi_{10}+\sum\frac{\alpha_{1k}}{x-\beta_k}\right)\cdot x'+\right.$$

$$\left.+\varphi_{03}\,x^3+\varphi_{02}\,x^2+\varphi_{01}\,x+\varphi_{00}+\sum\frac{\alpha_{0k}}{x-\beta_k}\right)^2=$$

$$=\left(\sum\frac{\gamma_{4k}}{x-\beta_k}+\sum\frac{\eta_{4k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}\right)\cdot x'^4+$$

$$+\left(\psi_{30}+\sum\frac{\gamma_{3k}}{x-\beta_k}+\sum\frac{\eta_{3k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}\right)\cdot x'^3+$$

$$+\left(\psi_{22}\,x^2+\psi_{21}\,x+\psi_{20}+\right.$$

$$\left.+\sum\frac{\gamma_{2k}}{x-\beta_k}+\sum\frac{\eta_{2k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}\right)\cdot x'^2+$$

$$+\left(\psi_{14}x^4+\psi_{13}x^3+\psi_{12}x^2+\psi_{11}x+\psi_{10}+\right.$$

$$\left.+\sum\frac{\gamma_{1k}}{x-\beta_k}+\sum\frac{\eta_{1k}}{\left(x-\beta_k\right)^2}\right)\cdot x'+$$

$$+\psi_{06}x^6+\psi_{05}x^5+\psi_{04}x^4+\psi_{03}x^3+$$

$$+\psi_{02}x^2+\psi_{01}x+\psi_{00}+\sum\frac{\gamma_{0k}}{x-\beta_k}+\sum\frac{\eta_{0k}}{\left(x-\beta_k\right)^2},$$

где коэффициенты − аналитические по t функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мартынов*, *И.П.* Системы двух дифференциальных уравнений первого порядка и второй степени типа Пенлеве / И.П. Мартынов, В.М. Пецевич, В.А. Пронько // Дифференциальные уравнения. – 2000. – Т. 36, № 12. – С. 1712–1714.

2. *Детченя*, *Л.В.* Об одной системе двух дифференциальных уравнений второй степени со специальной правой частью со свойством Пенлеве / Л.В. Детченя, В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. – 2013. – № 3 (159). – С. 48−55.

3. *Пецевич*, В. М. Аналитические свойства решений системы двух дифференциальных уравнений второй степени относительно производной / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. − 2015. − № 1 (186). − С. 35−40.

4. *Пецевич*, В.М. Свойство Пенлеве для дифференциальной системы второго порядка / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Проблемы физики, математики и техники. – 2016. – № 1 (26). – С. 48–51.

5. *Пецевич*, В. М. Об одной системе второго порядка без подвижных многозначных особенностей / В.М. Пецевич, Д.Н. Шевченя // Веснік ГрДУ імя Янкі Купалы. Сер. 2. Матэматыка. − 2016. − Т. 6, № 3. − С. 29–34.

6. *Айнс*, *Э.Л.* Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс. − Харьков: ГНТИУ, 1939. − 719 с.

7. *Bureau*, *F.* Equations differentielles du second ordre en Y et du second degre en $\ddot{Y}$ dont l'integrale generale est a points critiques fixes / F. Bureau // Ann. di Math. – 1972. – Vol. 91. – P. 163–281.

8. *Cosgrove*, *C.M.* Painleve classification of a class of differential equations of the second order and second degree / C.M. Cosgrove, G. Scoufis // Stud. Appl. Math. − 1993. − Vol. 88. − P. 25−87.

Поступила в редакцию 13.04.18.