

## ВЛИЯНИЕ ПРОТЯЖЕННОСТИ АКТИВНОГО ЭЛЕМЕНТА И ЕГО ПОПЕРЕЧНОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ НА ДИФРАКЦИОННОЕ РАСЩЕПЛЕНИЕ ЧАСТОТ ВСТРЕЧНЫХ ВОЛН КОЛЬЦЕВОГО ЛАЗЕРА

*А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин и Е. Н. Тропкин*

Выведены соотношения для расчета дифракционного расщепления частот встречных волн кольцевого лазера с активным элементом, протяженным вдоль оси резонатора и ограниченным в поперечном направлении. В результате численного анализа полученных соотношений на основе решения интегрального уравнения резонатора с квадратичным фазовым и П-образным амплитудным корректорами показано, что учет протяженности активной среды не устраняет осцилляции дифракционного расщепления частот при перемещении активного элемента вдоль оси резонатора и усиливает контраст немоной зависимости амплитуды осцилляций от параметра конфигурации. При исследовании влияния поперечной неоднородности активной среды на дифракционное расщепление частот выявлен локальный характер дифракционных функционалов и показано, что в приближении слабой дифракции расщепление частот обусловлено дифракционными искажениями поля лишь в приосевой области, характерный размер которой не превосходит масштаба, не возмущенного дифракцией распределения.

В работе [1] на основе численного решения интегрального уравнения кольцевого резонатора, сформированного квадратичным фазовым и П-образным амплитудным корректорами, проанализировано нелинейное дифракционное расщепление частот встречных волн кольцевого лазера в зависимости от параметров резонатора. В результате анализа было установлено, что расщепление частот, как правило, осциллирует при перемещении активной среды вдоль оси резонатора и что существуют конфигурации резонатора, обладающие экстремальными по отношению к дифракционному расщеплению свойствами. Одним из основных ограничений, наложенных в [1] на схему расчета дифракционных эффектов, является предположение о том, что активный элемент представляет собой тонкий и безграничный в поперечном направлении слой. В этой модели дифракционное расщепление частот определяется локальными свойствами собственных колебаний резонатора в одной из его поперечных плоскостей (соответствующей расположению слоя активной среды), при этом нелинейная комбинация поперечных распределений встречных волн усредняется в безграничном интервале.

В настоящей работе указанные ограничения на модель активного элемента устранены и проанализировано влияние его протяженности и неоднородности в поперечном направлении на дифракционное расщепление частот. Проведенное обобщение теории позволяет приблизить схему расчета дифракционных явлений в кольцевом лазере к реальной экспериментальной ситуации, выявить границы применимости полученных в [1] результатов и прежде всего ответить на вопрос, в какой мере осцилляции дифракционного расщепления частот при перемещении активной среды и наличие экстремальных конфигураций [1] связаны с моделью тонкого слоя.

В основе расчетной схемы лежит соотношение для разности фаз дифракционных функционалов в приближении слабой дифракции, которое нетрудно получить, используя общие результаты [2]

$$\lambda_a - \lambda_b = \text{Im} \left\{ \frac{\langle\langle (\delta\Phi(x, y, z) - \delta\Psi^*(x, y, z))^2 \Phi_0^{*2}(x, y, z) \rangle\rangle}{\langle\langle |\Phi_0(x, y, z)|^4 \rangle\rangle} - \frac{\langle\langle (\delta\Phi(x, y, z) - \delta\Psi^*(x, y, z)) \Phi_0^*(x, y, z) |\Phi_0(x, y, z)|^2 \rangle\rangle^2}{\langle\langle |\Phi_0(x, y, z)|^4 \rangle\rangle^2} \right\}. \quad (1)$$

Здесь  $\Phi_0(x, y, z)$  — распределение собственного колебания не возмущенного дифракцией резонатора,  $\delta\Phi(x, y, z)$ ,  $\delta\Psi(x, y, z)$  — дифракционные компоненты распределений встречных волн. Угловые скобки означают усреднение по объему, занимаемому активной средой, причем внутренние скобки соответствуют усреднению по поперечным координатам ( $x, y$ ), а внешние — по продольной ( $z$ ).

Соотношение (1) отличается от аналогичного, содержащегося в [1], лишь дополнительным усреднением по продольной координате нелинейных комбинаций распределений.

Как и в работе [1], представим дифракционные компоненты встречных волн в виде суперпозиции собственных колебаний не возмущенного дифракцией резонатора

$$\left. \begin{aligned} \delta\Phi &= \sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(x, z) \varphi_0(y, z), \\ \delta\Psi &= \sum_{k=0}^{\infty} B_k \varphi_k^*(x, z) \varphi_0^*(y, z). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Здесь предполагается, что дифракция приводит к возмущению поперечного распределения лишь по одной из поперечных координат ( $x$ ), а в резонаторе отсутствует астигматизм. Собственные функции  $\varphi_k$  приведены в [1].

Подставляя разложения (2) в (1), получим

$$\lambda_a - \lambda_b = \text{Im} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (A_k - B_k^*) (A_l - B_l^*) \chi_{kl}, \quad (3)$$

$$\chi_{kl} = \frac{\left\langle \frac{1}{p} \langle \varphi_k \varphi_l \varphi_0^{*2} \rangle \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{p} \langle |\varphi_0|^4 \rangle \right\rangle} - \frac{\left\langle \frac{1}{p} \langle \varphi_k \varphi_0^* |\varphi_0|^2 \rangle \right\rangle \left\langle \frac{1}{p} \langle \varphi_l \varphi_0^* |\varphi_0|^2 \rangle \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{p} \langle |\varphi_0|^4 \rangle \right\rangle^2}, \quad (4)$$

где  $p$  — нормированный на  $\sqrt{L/k}$  ( $L$  — периметр резонатора,  $k$  — волновое число) масштаб поперечного распределения поля

$$p(\chi) = \sqrt{w^2 + \frac{\chi^2}{4w^2}}, \quad (5)$$

$\chi = (2z/L) - 1$  — нормированная продольная координата,  $w^2 = (1/2)\sqrt{(1+g)/(1-g)}$ ,  $g = 1 - (L/R)$  — параметр конфигурации резонатора ( $R$  — радиус кривизны эффективного сферического отражателя). Соотношение (4) получено в предположении однородности активной среды по одной из поперечных координат ( $y$ ) — усреднение во внутренних скобках здесь проводится лишь по координате  $x$ .

Рассмотрим вначале вопросы, связанные с влиянием протяженности активной среды на дифракционное расщепление частот. Предполагая при этом, что среда однородна в поперечном направлении (модель толстого слоя), получим, рассчитывая аналогично [1] интегралы нелинейного перекрытия

$$\chi_{kl} = \frac{(-1)^{\frac{k-l}{2}}}{\sqrt{2^{(k+l)} l! k!}} [(k+l-1)!! \gamma_{k+l} - (k-1)!! (l-1)!! \gamma_k \gamma_l], \quad (6)$$

где величины  $\gamma_k$  содержат информацию о протяженности активной среды

$$\gamma_k = \varepsilon_k \frac{\left\langle \frac{1}{p^2} e^{-ik\Omega} \right\rangle}{\langle 1/p^2 \rangle}. \quad (7)$$

Здесь

$$\Omega = \arctg \left( \chi \sqrt{\frac{1-g}{1+g}} \right) \quad (8)$$

характеризует набег фазы собственного колебания при распространении в кольцевом резонаторе,

$$\varepsilon_k = \begin{cases} 1, & k - \text{четно,} \\ 0, & k - \text{нечетно.} \end{cases} \quad (9)$$

Вычисляя интегралы, содержащиеся в (7), нетрудно получить простое соотношение для  $\gamma_k$

$$\gamma_k = e^{-ik\bar{\Omega}} \frac{\sin k \frac{\Delta}{2}}{k \frac{\Delta}{2}}, \quad (10)$$

где

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} (\Omega(\chi_1) + \Omega(\chi_2)), \quad (11)$$

$$\Delta = \Omega(\chi_2) - \Omega(\chi_1), \quad (12)$$

$\chi_1, \chi_2$  — координаты граничных плоскостей активного элемента (предполагается, что распределение инверсии по продольной координате однородно внутри активного элемента). Переход к пределу  $\Delta \rightarrow 0$  в (10) приводит к результатам [1], полученным в приближении тонкого слоя.

Анализ соотношений (6), (10) показывает, что учет протяженности активной среды приводит к появлению обрезającego фактора при суммировании ряда (3), что ослабляет влияние высших компонент пространственного спектра собственного колебания открытого резонатора на дифракционное расщепление частот, причем обрезание тем эффективнее, чем больше набег фазы собственного колебания между граничными плоскостями активного элемента (12). Фазовый множитель в (10) аналогичен получаемому в модели тонкого слоя [1], однако асимметрия каустики в активном элементе приводит к тому, что эффективная фаза  $\bar{\Omega}$  отличается от значения фазы собственного колебания резонатора в плоскости, симметричной относительно границ активной среды. Таким образом, при перемещении активной среды вдоль оси резонатора осциллирующая зависимость расщепления частот несколько деформируется по сравнению с результатом, справедливым для тонкого слоя. Как следует из (8), эта деформация и обрезание тем существеннее, чем сильнее проявляются фокусирующие свойства резонатора. Для резонаторов, обладающих слабофокусирующими свойствами, можно ожидать, что результаты, полученные в модели тонкого слоя, в значительной степени сохраняют свои особенности и в случае протяженной активной среды.

Перейдем к описанию результатов численного анализа дифракционного расщепления частот в кольцевом лазере с протяженной активной средой. На рис. 1 представлена зависимость разности фаз дифракционных функционалов  $\lambda_a - \lambda_b$  от продольной координаты толстого слоя активной среды  $\bar{\chi} = (1/2)(\chi_1 + \chi_2)$  для различных значений толщины активного элемента  $\Delta\chi = (\chi_2 - \chi_1)$ . Изображенные кривые соответствуют конфокальной конфигурации резонатора ( $g=0$ ), отношение диаметра П-образного корректора

к диаметру невозмущенного распределения в плоскости корректора ( $c$ ) выбрано равным 2. Амплитудный корректор совмещен с фазовым. Нетрудно убедиться в том, что учет протяженности активной среды не изменяет осциллирующего характера зависимости, существенно уменьшая амплитуду осцилляций. Характерную толщину слоя ( $\Delta\chi$ ), при которой проявляется протяженность среды, можно сопоставить с интервалом между нулями

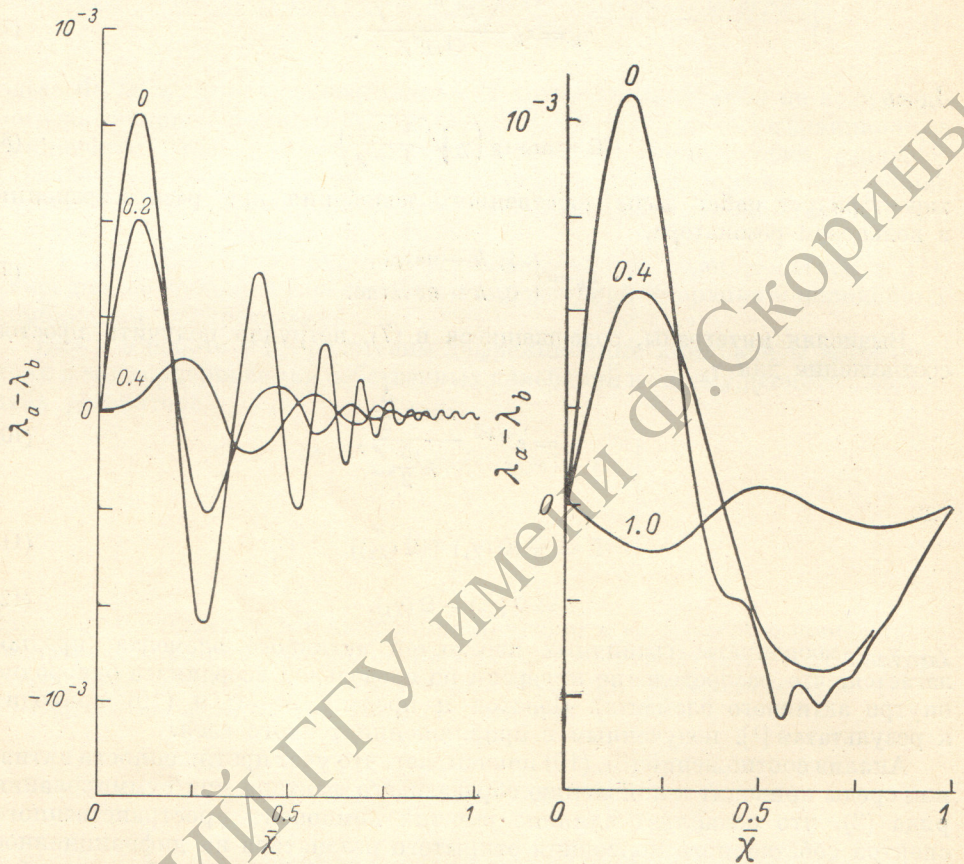


Рис. 1. Разность фаз дифракционных функционалов в зависимости от продольной координаты слоя активной среды  $\bar{\chi}$  для различных значений толщины слоя  $\Delta\chi$ .  
 $g=0, c=2$ .

Рис. 2. Разность фаз дифракционных функционалов в зависимости от продольной координаты слоя активной среды  $\bar{\chi}$  для различных значений толщины слоя  $\Delta\chi$ .  
 $g=0.5, c=2$ .

осциллирующей зависимости в модели тонкого слоя. Этот результат остается справедливым и для других конфигураций резонатора. Так, для  $g=0.5$  существенное ослабление расщепления частот и видоизменение зависимости проявляются при  $\Delta\chi=1$  (рис. 2).

Как и в работе [1], обратимся к анализу максимальной амплитуды осцилляций  $\max |\lambda_a - \lambda_b|$  в зависимости от параметра конфигурации  $g$ .

Как видно из рис. 3, наиболее существенное ослабление расщепления частот при учете протяженности активной среды соответствует таким конфигурациям резонатора, для которых сама величина расщепления минимальна (как отмечалось в [1], эти конфигурации близки к вырожденным, что особенно наглядно проявляется при ослаблении дифракции — увеличении параметра  $c$ ). Напротив, в области максимумов влияние протяженности активной среды значительно слабее. Это приводит к усилению кон-

траста представленных на рис. 3 зависимостей. Таким образом, протяженность активной среды лишь подчеркивает экстремальные свойства отдельных конфигураций резонатора.

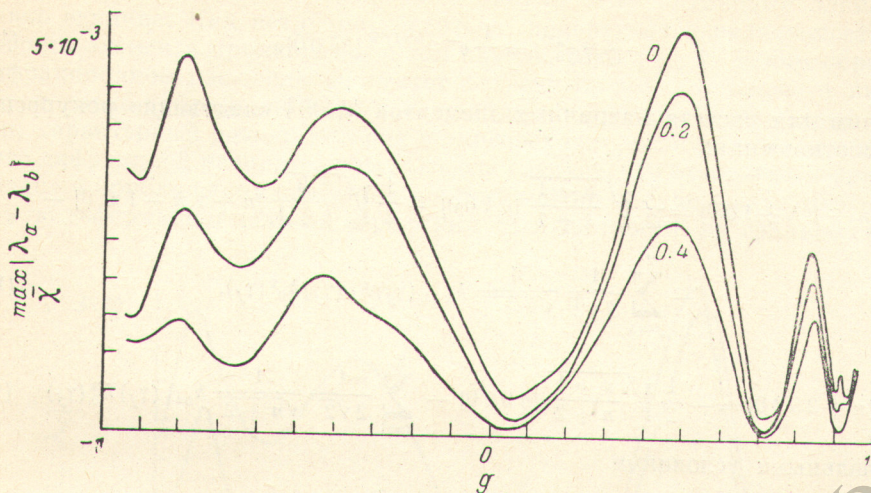


Рис. 3. Максимальное значение разности фаз дифракционных функционалов в зависимости от параметра конфигурации резонатора  $g$  для различных значений толщины слоя активной среды  $\Delta\chi$ .

Наконец, коснемся метода возмущений в расчете дифракционного расщепления частот [3]. На рис. 4 изображены кривые, полученные методом возмущений и являющиеся аналогами результатов, представленных на

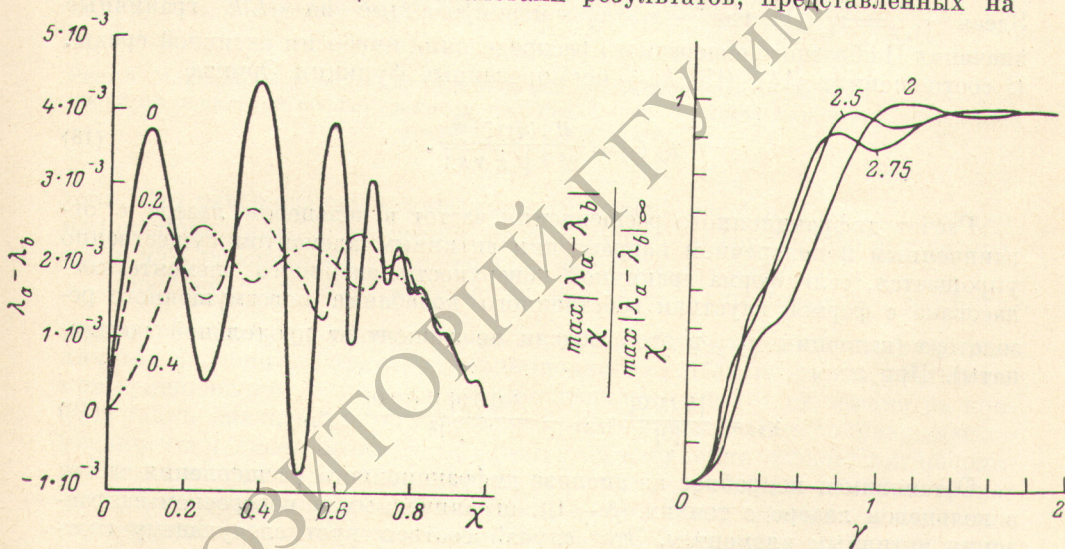


Рис. 4. Разность фаз дифракционных функционалов, рассчитанная методом возмущений, в зависимости от продольной координаты слоя активной среды  $\chi$  для различных значений толщины слоя  $\Delta\chi$ .

$c=2, G=0$ .

Рис. 5. Максимальное значение разности фаз дифракционных функционалов в зависимости от параметра поперечной неоднородности активного элемента  $\gamma$  для различных значений величины  $c$  ( $g=0$ ).

рис. 1. Как нетрудно убедиться, учет протяженности активной среды приводит к усилению несоответствия между точным и приближенным решениями. Для резонаторов с другими конфигурациями несоответствие во всяком случае не уменьшается.

Рассмотрим вопросы, связанные с поперечной ограниченностью активного элемента. Для этого воспользуемся П-образной моделью поперечной неоднородности активной среды. Представляя интегралы нелинейного перекрытия в виде

$$\langle \varphi_k \varphi_l \varphi_0^2 \rangle = \frac{1}{p} e^{-i(k+l)\varphi} [k l 0 0], \quad (13)$$

получим для расчета матричных элементов  $[k l 0 0]$  следующие рекуррентные соотношения:

$$[n+1 \ k+1 \ 0 \ 0] = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{k+1}} [n \ k \ 0 \ 0] - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k}{k+1}} [n+1 \ k-1 \ 0 \ 0] - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{k+1}} h_{k+1}(\gamma_j) h_k(\gamma_j) h_0^2(\gamma_j), \quad (14)$$

$$[n+2 \ 0 \ 0 \ 0] = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{n+1}{n+2}} [n \ 0 \ 0 \ 0] - \sum_{j=1}^2 \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{n+2}} h_{n+1}(\gamma_j) h_0^2(\gamma_j) \quad (15)$$

с начальными условиями

$$[0] \equiv [0 \ 0 \ 0 \ 0] = \frac{1}{\pi} \int_{-\gamma_1}^{\gamma_2} d\tau e^{-2\tau^2}, \quad (16)$$

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0] = \frac{1}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\pi} [e^{-2\gamma_1^2} - e^{-2\gamma_2^2}]. \quad (17)$$

Здесь  $\gamma_{1,2} = x_{1,2}/p$ , где  $-x_1, x_2$  — нормированные на  $\sqrt{L/k}$  граничные значения П-образного поперечного распределения инверсии активной среды. В соотношениях (14), (15)  $h_k$  — нормированные функции Эрмита

$$h_k(\gamma) = \frac{H_k(\gamma) e^{-\gamma^2/2}}{2^{k/2} \sqrt{\pi} \sqrt{k!}}. \quad (18)$$

Расчет дифракционного расщепления частот в кольцевом лазере с ограниченным в поперечном направлении активным элементом существенно упрощается, если форма граничной поверхности активного элемента согласована с формой каустики собственного колебания невозмущенного резонатора (величины  $\gamma_{1,2}$  в этой модели не зависят от продольной координаты). При этом

$$\chi_{k,l} = \frac{[k \ l \ 0 \ 0]}{[0]} \gamma_{k+l} - \frac{[k \ 0 \ 0 \ 0] [l \ 0 \ 0 \ 0]}{[0]^2} \gamma_k \gamma_l. \quad (19)$$

Остановимся подробнее на анализе дифракционного расщепления частот в кольцевом лазере с тонким ( $\Delta \rightarrow 0$ ), ограниченным в поперечном направлении активным элементом. Этот случай соответствует следующему соотношению для  $\chi_{k,l}$ :

$$\chi_{k,l} = e^{-i(k+l)\varphi(\chi)} \left( \frac{[k \ l \ 0 \ 0]}{[0]} - \frac{[k \ 0 \ 0 \ 0] [l \ 0 \ 0 \ 0]}{[0]^2} \right). \quad (20)$$

Предположим также, что поперечная неоднородность активного элемента симметрична относительно оси резонатора ( $\gamma_1 = \gamma_2 \equiv \gamma$ ).

Отметим вначале, что осциллирующий характер зависимости разности фаз дифракционных функционалов от продольной координаты активного элемента сохраняется и в случае его поперечной неоднородности. Рассмотрим поведение амплитуды этих осцилляций при изменении параметра поперечной неоднородности  $\gamma$  (рис. 5). Приведенные на этом рисунке кривые

соответствуют конфокальной конфигурации резонатора ( $g=0$ ) и различным значениям величины  $c$ , характеризующей степень дифракции. Разность фаз функционалов здесь нормирована так, что ее значение, соответствующее неограниченному в поперечном направлении активному элементу, равно единице. Как нетрудно убедиться, поперечная ограниченность активного элемента проявляется в том случае, если  $\gamma \leq 1$ . Таким образом, дифракционное расщепление частот встречных волн кольцевого лазера обусловлено дифракционными искажениями поля лишь в приосевой области, характерный размер которой не превосходит масштаба, не возмущенного дифракцией распределения. Отсюда следует, что при расчете функционалов в приближении слабой дифракции можно не учитывать дифракционную деформацию поля на периферии и, в частности, на границе свет-

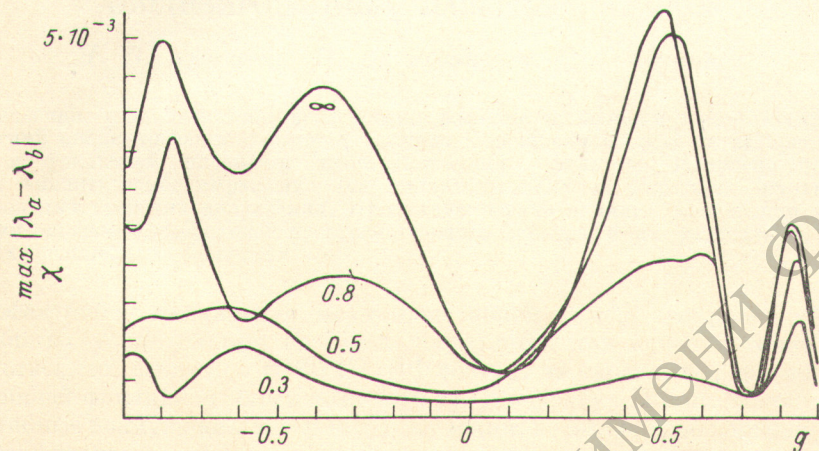


Рис. 6. Максимальное значение разности фаз дифракционных функционалов в зависимости от параметра конфигурации  $g$  для различных значений параметра поперечной неоднородности  $\gamma$  ( $c=2$ ).

ть. Это утверждение о локальном характере дифракционных функционалов справедливо, естественно, не только для конфокального резонатора, но и для резонаторов с произвольной конфигурацией.

Перейдем к анализу зависимости  $\max |\lambda_a - \lambda_b|$  от параметра конфигурации резонатора  $g$ . Представленные на рис. 6 кривые соответствуют различным значениям параметра неоднородности  $\gamma$ . Как нетрудно убедиться, при уменьшении  $\gamma$  зависимость расщепления частот от параметра конфигурации значительно сглаживается. Это сглаживание сопровождается увеличением числа осцилляций  $\lambda_a - \lambda_b$  при изменении продольной координаты активного элемента для таких конфигураций, которые ранее (в случае безграничного в поперечном направлении активного элемента) соответствовали локальным максимумам дифракционного расщепления частот.

В заключение заметим, во-первых, что поперечная неоднородность активного элемента, как показывают численные расчеты, не уменьшает погрешностей, к которым приводит применение метода возмущений в теории кольцевого лазера с открытым резонатором [3]. Во-вторых, подчеркнем, что анализ влияния поперечной неоднородности активного элемента на дифракционное расщепление частот выполнен здесь без учета деформации пространственной структуры поля самой неоднородностью активного элемента, что является в некоторой степени идеализацией, но вполне оправданной, так как она позволяет определить относительный вклад различных участков поперечного распределения поля на дифракционное расщепление частот.

### Литература

- [1] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин, Н. Г. Цигуро.  
Опт. и спектр., 47, 948, 1979.
- [2] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин. Опт. и спектр., 37, 317, 1974.
- [3] А. Я. Бирман, А. Ф. Савушкин, Е. Н. Тропкин, Н. Г. Цигуро.  
Опт. и спектр., 47, 1166, 1979.

Поступило в Редакцию 20 февраля 1980 г.

---

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ