получаем:

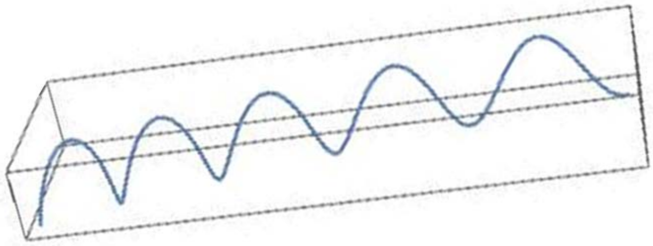

Рисунок 2 – Траектория движения частицы в случае $|a| < \dfrac{cE_y}{H_z}$

Заключение. Работа посвящена моделированию движения заряженных частиц во внешнем электромагнитном поле. В ходе работы продемонстрирована процедура решения уравнений движения с последующим моделированием движения при различных параметрах.

Литература

1. Ландау, Л.Д. Теоретическая физика: учебное пособие для вузов в 10 томах: Т. 2. Теория поля / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – Москва: Физматлит. – 2006. – 586 с.

2. Медведев, Б.В. Начала теоретической физики / Б.В. Медведев. – Москва: Наука. – 1977. – 496 с.

3. Савельев И.В. Основы теоретической физики: учебник: в 2 томах. Т. 1. Механика. Электродинамика / И.В. Савельев. – Санкт-Петербург: Издательство «Лань». – 2005. – 430 с.

А. В. Ивашкевич

(Институт физики имени. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск)

Науч. рук. **В. М. Редьков**, д-р. физ.-мат. наук

ЦИЛИНДРИЧЕСКИ СИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В СФЕРИЧЕСКОМ ПРОСТРАНСТВЕ РИМАНА

Выполним разделение переменных в спинорных уравнениях Максвелла в цилиндрических координатах $x^{\alpha} = (t, r, \phi, z)$, $r \in [0, +\pi/2]$, $\phi \in [-\pi, +\pi]$, $z \in [-\pi, +\pi]$ сферического пространства:

$$dS^2 = dt^2 - dr^2 - \sin^2 r\, d\phi^2 - \cos^2 r\, dz^2.$$

Тетрада и соответствующие коэффициенты вращения Риччи [1] такие (приводим только отличные от нуля коэффициенты Риччи)

$$e_{(\alpha)\beta} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\cos r \end{vmatrix}, \quad \gamma_{122} = \frac{\cos r}{\sin r}, \quad \gamma_{313} = \frac{\sin r}{\cos r}.$$

Спинорные уравнения Максвелла [1] ($\xi(x)$ – симметричный спинор 2 ранга; используем обозначения $\Sigma^{0j} = (1/2)\sigma^j, \Sigma^{12} = -(i/2)\sigma^3$ и т. д.)

$$\left[\sigma^c e^{\alpha}_{(c)}\partial_\alpha + \sigma^c (\frac{1}{2}\Sigma^{ab} \otimes I + I \otimes \frac{1}{2}\Sigma^{ab})\gamma_{abc}\right]\xi = 0,$$

принимают вид (пусть $\Pi_2 = \sigma^2 \otimes I + I \otimes \sigma^2$ и $\Pi_3 = \sigma^3 \otimes I + I \otimes \sigma^3$)

$$\left[\partial_t + \sigma^1\partial_r - \frac{i\sigma^2\Pi_3}{2}\frac{\cos r}{\sin r} - \frac{i\sigma^3\Pi_2}{2}\frac{\sin r}{\cos r} + \frac{\sigma^2\partial_\phi}{\sin r} + \frac{\sigma^3\partial_z}{\cos r}\right]\xi = 0.$$

Используем для спинора ξ подстановку

$$\xi(t,r,\phi,z) = e^{-i\omega t} e^{im\phi} e^{ikz} \begin{vmatrix} f(r) & h(r) \\ h(r) & g(r) \end{vmatrix}.$$

Получаем систему из 4 уравнений для 3 функций:

$$(\frac{d}{dr} + \frac{m}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r})h + (-i\omega + \frac{ik}{\cos r}) f = 0,$$

$$(\frac{d}{dr} - \frac{m}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r})h + (-i\omega - \frac{ik}{\cos r}) g = 0;$$

$$(\frac{d}{dr} + \frac{m}{\sin r} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{1}{2}\frac{\sin r}{\cos r})g + \frac{1}{2}\frac{\sin r}{\cos r} f + (-i\omega + \frac{ik}{\cos r})h = 0,$$

$$(\frac{d}{dr} - \frac{m}{\sin r} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{1}{2}\frac{\sin r}{\cos r}) f + \frac{1}{2}\frac{\sin r}{\cos r} g + (-i\omega - \frac{ik}{\cos r})h = 0.$$

Складываем и вычитаем уравнения внутри каждой пары (при этом вводим новые переменные $F = f + g, G = f - g$), в результате получаем

$$\frac{ik}{\cos r}F - i\omega G + \frac{2m}{\sin r}h = 0,$$

$$\frac{ik}{\cos r}G - i\omega F + 2(\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r})h = 0,$$

$$-\frac{2ik}{\cos r}h - \frac{m}{\sin r}F + (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r} - \frac{\sin r}{\cos r})G = 0,$$

$$2i\omega h + \frac{m}{\sin r}G - (\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r})F = 0.$$

Из первого, второго и четвертого уравнений выражаем функции $\omega G, \omega F, 2i\omega h$ и подставляем их в третье уравнение. В результате приходим к тождеству $0 \equiv 0$. Следовательно, в предыдущей системе независимыми являются только 3 уравнения:

$$\frac{ik}{\cos r}F - i\omega G + \frac{2m}{\sin r}h = 0,$$

$$\frac{ik}{\cos r}G - i\omega F + 2\left(\frac{d}{dr} - \frac{\sin r}{\cos r}\right)h = 0,$$

$$2i\omega h + \frac{m}{\sin r}G - \left(\frac{d}{dr} + \frac{\cos r}{\sin r}\right)F = 0.$$

Выделим простые множители из двух функций $F = \sin^{-1} r\,\bar{F}, h = \cos^{-1} r\,\bar{h}$; дальше используем обозначение $2i\bar{h} = \bar{H}$. В результате система уравнений примет вид

$$\omega G = \frac{k\bar{F} - m\bar{H}}{\cos r \sin r},$$

$$\frac{\omega k}{\cos r}G - \frac{\omega^2}{\sin r}\bar{F} - \frac{\omega}{\cos r}\frac{d\bar{H}}{dr} = 0,$$

$$\omega^2 \frac{1}{\cos r}\bar{H} + \frac{\omega m}{\sin r}G - \frac{\omega}{\sin r}\frac{d\bar{F}}{dr} = 0.$$

С помощью первого уравнения исключаем ωG:

$$\frac{1}{\cos r}\left(\omega\frac{d}{dr} + \frac{km}{\cos r \sin r}\right)\bar{H} + \frac{1}{\sin r}\left(\omega^2 - \frac{k^2}{\cos^2 r}\right)\bar{F} = 0,$$

$$\frac{1}{\sin r}\left(\omega\frac{d}{dr} - \frac{km}{\sin r \cos r}\right)\bar{F} + \frac{1}{\cos r}\left(-\omega^2 + \frac{m^2}{\sin^2 r}\right)\bar{H} = 0.$$

Введем переменную $\sin r = \sqrt{z},\ z \in [0, 1]$, тогда предыдущая система записывается так:

$$\left(2\omega\frac{d}{dz} + \frac{km}{z(1-z)}\right)\bar{H} + \frac{\omega 2 - k^2 - \omega^2 z}{z(1-z)}\bar{F} = 0,$$

$$\left(2\omega\frac{d}{dz} - \frac{km}{z(1-z)}\right)\bar{F} + \frac{m^2 - \omega^2 z}{z(1-z)}\bar{H} = 0.$$

Пользуясь методом исключения будем получать два дифференциальных уравнения 2-го порядка с 4-мя особыми точками: $\bar{H},\ z = 0, 1, \infty, (1 - k^2/\omega^2),\ \bar{F},\ z = 0, 1, \infty, m^2/\omega^2$. Однако, есть возможность привести задачу к анализу уравнений только с тремя особыми точками, для этого в введем новые функции $\bar{H} = V + W,\ \bar{F} = V - W$, тогда складывая и вычитая уравнения предыдущей системы получим

$$\left(4\omega\frac{d}{dz} + \frac{\omega^2 - k^2 + m^2 - 2\omega^2 z}{z(1-z)}\right)V - \frac{\omega^2 - (k+m)^2}{z(1-z)}W = 0,$$

$$\left(4\omega\frac{d}{dz} - \frac{\omega^2 - k^2 + m^2 - 2\omega^2 z}{z(1-z)}\right)W + \frac{\omega^2 - (k-m)^2}{z(1-z)}V = 0.$$

Отсюда находим уравнение для функции $W(z)$:

$$z(z-1)W'' + (2z-1)W' + \left\{ -\frac{\omega(\omega+2)}{4} - \frac{k^2}{4(z-1)} + \frac{m^2}{4z} \right\} W = 0.$$

Существует простая симметрия между уравнениями: они переходят друг в друга в результате формальных замен $V \Longleftrightarrow W$, $\omega \Longleftrightarrow -\omega$, $m \Longleftrightarrow -m$. Следовательно, без каких-либо вычислений можем написать уравнение для функции $V(z)$:

$$z(z-1)V'' + (2z-1)V' + \left\{ -\frac{\omega(\omega-2)}{4} - \frac{k^2}{4(z-1)} + \frac{m^2}{4z} \right\} V = 0.$$

Решения уравнений строятся в гипергеометрических функциях:

$$W = W_0\, z^{|m|/2}(z-1)^{|k|/2} F(\alpha, \beta, \gamma; z),$$

$$V = V_0\, z^{|m|/2}(z-1)^{|k|/2} F(\alpha+1, \beta-1, \gamma; z),$$

$$\alpha = -n,\ \beta = n+1+|m|+|k|,\ \gamma = |m|+1,$$

$$\omega = 2n+|k|+|m|,\quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Относительный коэффициент между множителями V_0 и W_0 может быть найден с использованием системы уравнений первого порядка.

Литература

1. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. - Белорусская наука, Минск, 2009. 486 стр.

А. В. Ивашкевич
(Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск)
Науч. рук. **В. М. Редьков**, д-р. физ.-мат. наук

О РЕШЕНИЯХ СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА

Будем исследовать спинорные уравнения Максвелла в метрике Шварцшильда [1]:

$$dS^2 = \varphi dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{\varphi},\quad \varphi = 1 - \frac{1}{r}.$$

Подстановка для симметричного спинора $\xi(x)$, соответствующего электромагнитному тензору $F_{\alpha,\beta}$, выбирается в виде [1] (для краткости индексы j, m в функциях Вигнера опускаются)