Отсюда находим уравнение для функции $W(z)$:

$$z(z-1)W'' + (2z-1)W' + \left\{-\frac{\omega(\omega+2)}{4} - \frac{k^2}{4(z-1)} + \frac{m^2}{4z}\right\}W = 0.$$

Существует простая симметрия между уравнениями: они переходят друг в друга в результате формальных замен $V \Longleftrightarrow W$, $\omega \Longleftrightarrow -\omega$, $m \Longleftrightarrow -m$. Следовательно, без каких-либо вычислений можем написать уравнение для функции $V(z)$:

$$z(z-1)V'' + (2z-1)V' + \left\{-\frac{\omega(\omega-2)}{4} - \frac{k^2}{4(z-1)} + \frac{m^2}{4z}\right\}V = 0.$$

Решения уравнений строятся в гипергеометрических функциях:

$$W = W_0\, z^{|m|/2}(z-1)^{|k|/2} F(\alpha, \beta, \gamma; z),$$

$$V = V_0\, z^{|m|/2}(z-1)^{|k|/2} F(\alpha+1, \beta-1, \gamma; z),$$

$$\alpha = -n,\ \beta = n+1+|m|+|k|,\ \gamma = |m|+1,$$

$$\omega = 2n+|k|+|m|,\quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Относительный коэффициент между множителями V_0 и W_0 может быть найден с использованием системы уравнений первого порядка.

Литература

1. Редьков, В.М. Поля частиц в римановом пространстве и группа Лоренца / В.М. Редьков. - Белорусская наука, Минск, 2009. 486 стр.

А. В. Ивашкевич
(Институт физики им. Б.И. Степанова НАН Беларуси, Минск)
Науч. рук. **В. М. Редьков**, д-р. физ.-мат. наук

О РЕШЕНИЯХ СПИНОРНЫХ УРАВНЕНИЙ МАКСВЕЛЛА В ПРОСТРАНСТВЕ-ВРЕМЕНИ ШВАРЦШИЛЬДА

Будем исследовать спинорные уравнения Максвелла в метрике Шварцшильда [1]:

$$dS^2 = \varphi dt^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) - \frac{dr^2}{\varphi},\quad \varphi = 1 - \frac{1}{r}.$$

Подстановка для симметричного спинора $\xi(x)$, соответствующего электромагнитному тензору $F_{\alpha,\beta}$, выбирается в виде [1] (для краткости индексы j, m в функциях Вигнера опускаются)

$$\xi = e^{-i\varepsilon t}\begin{vmatrix} f\,D_{-1} & h\,D_0 \\ h\,D_0 & g\,D_{+1}\end{vmatrix},\ D_\sigma = D^{j}_{-m,-\sigma}(\phi,\theta,0);\ \ j=1,2,3,...;\ \ m=-j,...,j;$$

здесь f,g,h – неизвестные радиальные функции. После разделения переменных получаем систему из 4 уравнений, где только 3 являются независимыми. Затем вводим новые переменные, и из двух функций выделяем простые множители:

$$F = f+g,\quad G = f-g,\quad F = \frac{1}{r\sqrt{\varphi}}\bar{F},\quad G = \frac{1}{r\sqrt{\varphi}}\bar{G}.$$

При этом система из трех уравнений эквивалентна следующей:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{\varphi'}{\varphi}\frac{d}{dr}+\frac{\varepsilon^2}{\varphi^2}-\frac{j(j+1)}{r^2\varphi}\right)\bar{G}=0,\ \ \bar{F}=\frac{\varphi}{i\varepsilon}\frac{d}{dr}\bar{G},\ \ h=\frac{ia}{2\varepsilon}\frac{\sqrt{\varphi}}{r}G.$$

Основной функцией является $\bar{G}(r)$, остальные определяются через нее. Явный вид основного уравнения следующий:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r(r-1)}\frac{d}{dr}+\frac{\varepsilon^2 r^2}{(r-1)^2}-\frac{j(j+1)}{r^2}\frac{r}{r-1}\right)\bar{G}=0;$$

здесь имеем три особые точки: $r=0,1$ – регулярные, точка $r=\infty$ – нерегулярная ранга 2; это класс функций Гойна. Уравнение становится понятнее, если использовать другую переменную:

$$r_* = r+\ln(r-1),\quad r\to\infty, r_*\to+\infty;\quad r\to 1+0, r_*\to-\infty,$$

$$\left(\frac{d^2}{dr_*^2}+\varepsilon^2-U(r_*)\right)\bar{G}=0,\qquad U(r_*)=\varepsilon^2-\frac{j(j+1)}{r^2}\varphi\,;$$

на бесконечностях эффективный потенциал стремится к нулю. Это означает, что здесь имеем задачу шреденгеровского вида с потенциалом барьерного типа, спадающего около радиуса Шварцшильда ($r\to 1, r_*\to-\infty$) и на бесконечности ($r\to\infty, r_*\to+\infty$) к нулю.

С точки зрения квантовой механики это означает, что электромагнитное поле с энергией квантов ниже высоты барьера может туннелировать и уходить на пространственную бесконечность; также возможен обратный процесс проникновения электро-магнитного поля с энергией ниже высоты барьера к черной дыре.

Обратимся к построению точных решений уравнения в виде

$$\bar{G} = r^c (r-1)^a e^{br}\ g(r).$$

Фактически на основе принятой подстановки исследуются 8 вариантов решений. Находим уравнение для функции $g(r)$:

$$g'' + \left(\frac{2c}{r} + \frac{2a}{r-1} + 2b + \frac{1}{r(r-1)}\right)g' + \left[\frac{c(c-1)}{r^2} + \frac{a(a-1)}{(r-1)^2} + \frac{2ca}{r-1} - \right.$$
$$-\frac{2ca}{r} + \frac{2cb}{r} + \frac{2ab}{r-1} + b^2 + \frac{c}{r-1} - \frac{c}{r^2} - \frac{c}{r} + \frac{a}{r} + \frac{a}{(r-1)^2} -$$
$$\left. -\frac{a}{r-1} + \frac{b}{r-1} - \frac{b}{r} + \varepsilon^2 + \frac{2\varepsilon^2}{r-1} + \frac{\varepsilon^2}{(r-1)^2} + \frac{j(j+1)}{r} - \frac{j(j+1)}{r-1}\right]g = 0.$$

Приравнивая коэффициенты при $(r-1)^{-2}$ и r^{-2} к нулю, получаем $a = \pm i\varepsilon; c = 0,2;$ дополнительно требуем $b^2 + \varepsilon^2 = 0 \Rightarrow b = \pm i\varepsilon$. В результате уравнение упрощается:

$$g'' + \left(\frac{2a+1}{r-1} + \frac{2c-1}{r} + 2b\right)g' + \left[\frac{2ca + 2ab + c - a + b - j(j+1) + 2\varepsilon^2}{r-1} + \right.$$
$$\left. + \frac{-2ca + 2cb - c + a - b + j(j+1)}{r}\right]g = 0.$$

Математическая структура всех 8 вариантов этого уравнения одинаковая. Строим решения в виде степенных рядов. Удобно записать последнее уравнение коротко таким образом:

$$g'' + (p + \frac{p_1}{r-1} + \frac{p_2}{r})g' + (\frac{q_1}{r-1} + \frac{q_2}{r})g = 0.$$

Поскольку физический интерес представляет степенной ряд по переменной $x = r - 1$, то преобразуем уравнение к этой переменной (штрих обозначает производную d/dx):

$$g'' + (p + \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x+1})g' + (\frac{q_1}{x} + \frac{q_2}{x+1})g = 0.$$

Строим его решения в виде рядов: $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$. После необходимых вычислений получаем 3-членные рекуррентные соотношения для коэффициентов ряда:

$$n = 2,3,..., \qquad [p(n-1) + q_1 + q_2]c_{n-1} +$$
$$+[n(n-1) + (p + p_1 + p_2)n + q_1]c_n + [(n+1)n + p_1(n+1)]c_{n+1} = 0.$$

Возможные радиусы сходимости находим по методу Пуанкаре – Перрона. Для этого делим общее рекуррентное соотношение на $n^2 c_{n-1}$

$$\frac{1}{n^2}[p(n-1) + q_1 + q_2] + \frac{1}{n^2}[n(n-1) + (p + p_1 + p_2)n + q_1]\frac{c_n}{c_{n-1}} +$$
$$+\frac{1}{n^2}[(n+1)n + p_1(n+1)]\frac{c_{n+1}}{c_n}\frac{c_n}{c_{n-1}} = 0$$

и устремляем $n \to \infty$. В результате находим простое уравнение для величины, определяющей возможные радиусы сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{c_n}{c_{n-1}} = R, \quad R + R^2 = 0 \Rightarrow R_{conv} = \frac{1}{|R|} = 1, \infty .$$

Напоминаем, что полная функция строится в виде

$$\bar{G}(r) = r^c (r-1)^a e^{br} g(r) \quad \Rightarrow \quad \bar{G}(x) = (1+x)^c x^a e^{b(1+x)} g(x);$$

$$c = 0, 2; \quad a = -i\varepsilon, +i\varepsilon; \quad b = -i\varepsilon, +i\varepsilon; \quad x \in (0, +\infty).$$

Ниже перечислены 8 вариантов (они разбиты в пары комплексно сопряженных, и значит, линейно независимых решений):

$$c = 0, \quad a = +i\varepsilon, \quad b = +i\varepsilon, \quad \bar{G}_1 = x^{+i\varepsilon} e^{+i\varepsilon(1+x)} g_1(x),$$

$$c = 0, \quad a = -i\varepsilon, \quad b = -i\varepsilon, \quad \bar{G}_1^* = x^{-i\varepsilon} e^{-i\varepsilon(1+x)} g_1^*(x);$$

$$c = 0, \quad a = +i\varepsilon, \quad b = -i\varepsilon, \quad \bar{G}_2 = x^{+i\varepsilon} e^{-i\varepsilon(1+x)} g_2(x),$$

$$c = 0, \quad a = -i\varepsilon, \quad b = +i\varepsilon, \quad \bar{G}_2^* = x^{-i\varepsilon} e^{+i\varepsilon(1+x)} g_2^*(x);$$

$$c = 2, \quad a = +i\varepsilon, \quad b = +i\varepsilon, \quad \bar{G}_3 = (1+x)^2 x^{+i\varepsilon} e^{+i\varepsilon(1+x)} g_3(x),$$

$$c = 2, \quad a = +i\varepsilon, \quad b = -i\varepsilon, \quad \bar{G}_4 = (1+x)^2 x^{+i\varepsilon} e^{-i\varepsilon(1+x)} g_4(x);$$

$$c = 2, \quad a = -i\varepsilon, \quad b = +i\varepsilon, \quad \bar{G}_4^* = (1+x)^2 x^{-i\varepsilon} e^{+i\varepsilon(1+x)} g_4^*(x),$$

$$c = 2, \quad a = -i\varepsilon, \quad b = -i\varepsilon, \quad \bar{G}_3^* = (1+x)^2 x^{-i\varepsilon} e^{-i\varepsilon(1+x)} g_x^3(x).$$

Литература

1. Редьков, В.М. Тетрадный формализм, сферическая симметрия и базис Шредингера / В.М. Редьков. – Белорусская наука: Минск, 2011. – 339 с.

Е. В. Каленчак (БГУИР, Минск)
Науч. рук. **А. В. Чураков**, канд. мед. наук, доцент

ПОДХОДЫ К МОДЕЛИРОВАНИЮ МАГНИТНОГО ТРАНСПОРТА ЛЕКАРСТВ

Цель технологии таргентной доставки лекарств через сеть сосудов различного диаметра обеспечить в месте поражения необходимую концентрацию препарата, связанного с магнитными наночастицами, которыми управляют при помощи внешних магнитных полей.

Магнитные наночастицы отлично подходят для различных применений благодаря следующим особенностям: они являются нетоксичными и хорошо воспринимаются живыми организмами; могут быть