

НОВЫЕ КРИТЕРИИ АССОЦИАТИВНОСТИ l -АРНОЙ ОПЕРАЦИИ $\eta_{s, \sigma, k}$

А.Д. Русаков, М.В. Селькин

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

NEW CRITERIA OF ASSOCIATIVITY OF l -ARY OPERATION $\eta_{s, \sigma, k}$

A.D. Rusakou, M.V. Selkin

F. Scorina Gomel State University

Получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s, \sigma, k}$ для некоторых конкретных подстановок.

Ключевые слова: полиадическая операция, группоид, полугруппа, группа, ассоциативность.

The new criteria of associativity of the operation $\eta_{s, \sigma, k}$ are found for some specific substitutions.

Keywords: polyadic operation, groupoid, semigroup, group, associativity.

Введение

Полиадическая операция $\eta_{s, \sigma, k}$ была определена в [1]. Если в определении операции $\eta_{s, \sigma, k}$ положить $n = 2$, то получим определение l -арной операции $[]_{l, \sigma, k}$, которая первоначально была определена в [2]. Подробному изучению операции $[]_{l, \sigma, k}$ и некоторых её обобщений посвящена книга [3]. При

$k = m - 1$, $l = m$, $\sigma = (12 \dots m - 1)$, $A = S_n$ операция $[]_{l, \sigma, k}$ совпадает с m -арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени S_n^{m-1} симметрической группы S_n , а при $A = GL_n(C)$ и тех же k , l и σ операция $[]_{l, \sigma, k}$ совпадает с m -арной операцией Э. Поста, определенной в [4] на декартовой степени $GL_n^{m-1}(C)$ полной линейной группы $GL_n(C)$. Таким образом, и операция $[]_{l, \sigma, k}$ и обе отмеченные операции Э. Поста являются частными случаями операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

В данной статье получены новые критерии ассоциативности операции $\eta_{s, \sigma, k}$ для некоторых конкретных подстановок, в частности для циклических подстановок

1 Предварительные сведения

Напомним, что n -арную операцию η n -арного группоида $\langle A, \eta \rangle$ называют ассоциативной, если в нём выполняется каждое из следующих $n - 1$ тождеств

$$\begin{aligned} & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \\ & = [x_1[x_2 \dots x_{n+1}]x_{n+2} \dots x_{2n-1}], \\ & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \\ & = [x_1x_2[x_3 \dots x_{n+2}]x_{n+3} \dots x_{2n-1}], \\ & \dots \\ & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \\ & = [x_1 \dots x_{n-2}[x_{n-1} \dots x_{2n-2}]x_{2n-1}], \\ & [[x_1 \dots x_n]x_{n+1} \dots x_{2n-1}] = \end{aligned}$$

$$= [x_1 \dots x_{n-1}[x_n \dots x_{2n-1}]].$$

Если в $\langle A, \eta \rangle$ выполняется последнее тождество, то n -арную операцию η называют полуассоциативной.

Теорема 1.1 [1]. Если n -арная операция η – ассоциативна, подстановка σ из S_k удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ ассоциативна.

В [5] доказано, что неравенство $\sigma^l \neq \sigma$ и наличие в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$ идемпотента a и отличного от него элемента b такого, что

$$\eta(\underbrace{a \dots a}_{n-1}b) \neq a, \quad (1.1)$$

является достаточным условием неполуассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$.

Теорема 1.2 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество

$$\begin{aligned} & \eta_{s, \sigma, k}(\eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_l)x_{l+1} \dots x_{2l-1}) = \\ & = \eta_{s, \sigma, k}(x_1 \dots x_{l-1}\eta_{s, \sigma, k}(x_l \dots x_{2l-1})), \end{aligned} \quad (1.2)$$

то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Заметим, что ранее в [6] было доказано, что для неполуассоциативности l -арной операции $\eta_{s, \sigma, k}$ достаточно наличия в n -арной полугруппе $\langle A, \eta \rangle$, содержащей более одного элемента, левой нейтральной последовательности и выполнение условия $\sigma^l \neq \sigma$.

Теоремы 1.1 и 1.2 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.3 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

Напомним, что n -арный группоид $\langle A, \eta \rangle$ называют n -арным группоидом с левым сокращением, если для любых $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, a, b \in A$ из

$$\eta(x_1 \dots x_{n-1}a) = \eta(x_1 \dots x_{n-1}b)$$

следует $a = b$.

Теорема 1.4 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k , удовлетворяющая условию $\sigma^l \neq \sigma$. Тогда в l -арном группоиде $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ не выполняется тождество (1.2), то есть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является полуассоциативной, а значит и ассоциативной.

Теоремы 1.1 и 1.4 позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 1.5 [5]. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной;
- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является полуассоциативной;
- 3) подстановка σ^{l-1} – тождественная.

2 Основные результаты

Теорема 2.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}; \quad (2.1)$$

- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{td + r \mid t = 0, 1, 2, \dots, ; r = 2, \dots, d\}. \quad (2.2)$$

Доказательство. Множество всех натуральных чисел $l \geq 2$ может быть представлено в виде объединения двух непересекающихся подмножеств, присутствующих в (2.1) и (2.2).

Так как подстановка σ имеет порядок d , то для всех l из (2.1) верно равенство $\sigma^l = \sigma$, а для всех l из (2.2) верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$.

- 1) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (2.1). Тогда l принадлежит множеству из (2.2), и верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 1.3 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ – неассоциативна, что противоречит её ассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (2.1), то верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по

теореме 1.1 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной.

- 2) Пусть l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной и предположим, что натуральное $l \geq 2$ не принадлежит множеству из (2.2). Тогда l принадлежит множеству из (2.1) и верно равенство $\sigma^l = \sigma$. Поэтому по теореме 1.1 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ – ассоциативна, что противоречит её неассоциативности.

Если теперь l принадлежит множеству из (2.2), то верно неравенство $\sigma^l \neq \sigma$. Поэтому по теореме 1.3 l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной. $\square$

Заметим, что в доказательстве теоремы 2.1 вместо теоремы 1.1, может быть использована и теорема 1.3.

Так как любой цикл длины k из S_k имеет порядок k , то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.1. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + 1 \mid t = 1, 2, \dots, \}; \quad (2.3)$$

- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда

$$l \in \{tk + r \mid t = 0, 1, 2, \dots, ; r = 2, \dots, k\}. \quad (2.4)$$

Полагая в следствии 2.1 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1). Тогда:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

- 2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Так как для всякого идемпотента a n -арной группы $\langle A, \eta \rangle$ и отличного от него элемента b верно (1.1), то следующая теорема получается из теоремы 2.1, если в ней n -арную полугруппу заменить n -арной группой.

Теорема 2.2. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

- 1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

- 2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Следующие два следствия можно извлечь как из теоремы 2.2, так и из следствий 2.1 и 2.2 соответственно.

Следствие 2.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Следствие 2.4. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Если в теореме 2.1 положить $d = 2$, то множество всех l в (2.1) совпадает с множеством всех нечётных чисел без единицы, а множество всех l в (2.2) совпадает с множеством всех чётных чисел. Если при этом учесть, что порядок любой транспозиции равен двум, то из теоремы 2.1 вытекает

Следствие 2.5. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1); σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Аналогично, из теоремы 2.2 или из следствия 2.5 вытекает

Следствие 2.6. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Полагая в следствиях 2.5 и 2.6 $\sigma = (12)$, получим ещё два следствия.

Следствие 2.7. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – n -арная полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что верно (1.1). Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Следствие 2.8. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неодноэлементная n -арная группа, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Замечание 2.1. Если в приведённых выше утверждениях этого раздела положить $n = 2$, то получим новые утверждения, отличающиеся от прежних только тем, что в них вместо операции $\eta_{s, \sigma, k}$ будет присутствовать операция $[]_{l, \sigma, k}$. Например, теоремам 2.1 и 2.2 соответствуют следующие два следствия.

Следствие 2.9. Пусть A – полугруппа, обладающая идемпотентом a и отличным от него элементом b таким, что $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Следствие 2.10. Пусть A – неединичная группа, σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Так как всякая регулярная полугруппа обладает идемпотентом, то следствие 2.9 позволяет сформулировать

Следствие 2.11. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Следствие 2.12. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Следствие 2.13. Пусть A – регулярная полугруппа, в которой для некоторого её идемпотента a и отличного от него элемента b верно $ab \neq a$. Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $[]_{l, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Случай n -арных группоидов с левым сокращением. Следующая теорема доказывается аналогично теореме 2.1, при этом вместо теоремы 1.3 используется теорема 1.5.

Теорема 2.3. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

Из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.14. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – цикл длины k из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Полагая в следствии 2.14 $\sigma = (12 \dots k)$, получим

Следствие 2.15. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.3);

2) l -арная операция $\eta_{s, (12 \dots k), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.4).

Если в теореме 2.3 положить $d = 2$, то из теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.16. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – транспозиция из S_k . Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Полагая в следствии 2.15 $k = 2$ или в следствии 2.16 $\sigma = (12)$, получим

Следствие 2.17. Пусть $\langle A, \eta \rangle$ – неоднородная n -арная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом. Тогда:

1) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – нечётное, большее единицы;

2) l -арная операция $\eta_{s, (12), k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l – чётное.

Замечание 2.2. Если в теореме 2.3 и следствиях из неё положить $n = 2$, то получим новые утверждения, отличающиеся от прежних только тем, что в них вместо операции $\eta_{s, \sigma, k}$ будет присутствовать операция $[]_{l, \sigma, k}$. Например, теореме 2.3 соответствует

Следствие 2.18. Пусть A – неоднородная полугруппа с левым сокращением, обладающая идемпотентом; σ – подстановка из S_k порядка d . Тогда:

1) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.1);

2) l -арная операция $[]_{l, \sigma, k}$ не является ассоциативной тогда и только тогда, когда l такое же, как в (2.2).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гальмак, А.М. О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.
2. Гальмак, А.М. Многочестные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. Гальмак, А.М. Многочестные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. Post, E.L. Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. Гальмак, А.М. О непотассоциативности полиадического группоида $\langle A^k, \eta_{s, \sigma, k} \rangle$ / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – 2017. – № 2. – С. 38–48.
6. Русаков, А.Д. О непотассоциативности полиадической операции $\eta_{s, \sigma, k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 68–72.

Поступила в редакцию 05.11.17.