



Учреждение образования  
“ГОМЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ ФРАНЦИСКА СКОРИНЫ”  
Кафедра теоретической физики

**ТЕХНИКА ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРОЦЕССОВ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ**

**Курс лекций**  
Специальность  
1-31 04 01 Физика (по направлениям)  
(1-31 04 01-02 производственная деятельность)

Материал составил  
**Андреев**  
**Виктор Васильевич,**  
кандидат физ.-мат.наук, доцент

Гомель, 2012



# СОДЕРЖАНИЕ

Список обозначений и сокращений . . . . .	5
ВВЕДЕНИЕ . . . . .	7
<b>1 Основные соотношения и определения.</b>	<b>9</b>
1.1 Система единиц $\hbar = c = 1$ . . . . .	9
1.2 Пространство Минковского . . . . .	13
1.2.1 Основные определения в пространстве Минковского . . . . .	13
1.2.2 Тензор Леви-Чивита в пространстве Минковского . . . . .	17
1.3 Базис пространства Минковского . . . . .	19
1.3.1 Изотропная тетрада . . . . .	20
1.3.2 Базис пространства Минковского и физические векторы . . . . .	21
1.4 Упражнения и задания к параграфам 1.2-1.3 . . . . .	23
1.5 Матрицы Дирака . . . . .	25
1.5.1 Основные свойства . . . . .	25
1.5.2 Представления матриц Дирака . . . . .	26
1.5.3 Произведения матриц Дирака . . . . .	27
1.5.4 Шпуры от произведения $\gamma$ -матриц . . . . .	29
1.5.5 Разложение четырехмерных матриц . . . . .	30
1.6 Упражнения и задания к параграфу 1.5 . . . . .	31
<b>2 Биспиноры Дирака</b>	<b>33</b>
2.1 Базисные спиноры . . . . .	33
2.2 Основные уравнения для базисных спиноров . . . . .	34
2.3 Уравнение Дирака . . . . .	35
2.4 Описание спиновых свойств фермионов . . . . .	37
2.4.1 Выбор вектора поляризации . . . . .	42
2.5 Проективные операторы уравнения Дирака . . . . .	43



2.6	Спиноры Дирака и базисные спиноры . . . . .	47
2.7	Явный вид базисных спиноров . . . . .	48
2.8	Вывод некоторых формул с помощью явного вида . . . . .	49
2.8.1	Коэффициенты разложения спиральных биспиноров по базисным . . . . .	50
<b>3</b>	<b>Основы СМ и правила Фейнмана</b> . . . . .	<b>53</b>
3.1	Дифференциальное сечение и ширина распада . . . . .	53
3.1.1	Эффективное сечение реакции взаимодействия . . . . .	53
3.1.2	Кинематика бинарных процессов . . . . .	56
3.1.3	Системы отсчета . . . . .	58
3.2	Постановка эксперимента в ФЭЧ . . . . .	62
3.3	Элементы теории электрослабого и сильного взаимодействия . . . . .	68
3.4	Диаграммы и правила Фейнмана . . . . .	76
3.4.1	Элементы диаграмм Фейнмана . . . . .	77
3.4.2	Правила Фейнмана . . . . .	79
3.5	Построение матричных элементов простейших процессов взаимодействия элементарных частиц. . . . .	88
3.5.1	Суммирование по поляризациям частиц . . . . .	89
3.6	Структура амплитуды с фермионами . . . . .	90
3.7	Упражнения и задания к параграфам 3.4-3.5 . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Методы вычисления наблюдаемых величин в реакциях элементарных частиц.</b> . . . .	<b>94</b>
4.1	Метод расчета квадратов матричных элементов процессов взаимодействия элементарных частиц. . . . .	94
4.2	Базовый матричный элемент . . . . .	96
4.3	Идея МБС . . . . .	97
4.4	“Строительные” блоки фейнмановских диаграмм . . . . .	100
4.4.1	Коэффициенты разложения спиноров Дирака . . . . .	101
4.4.2	Спинорные произведения . . . . .	102
4.5	Примеры расчетов на основе МБС . . . . .	104
4.5.1	Реакция $e^-e^+ \rightarrow W^+W^-$ . . . . .	105
4.5.2	Реакция $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$ . . . . .	109
	Список использованных источников . . . . .	114



РЕПОЗИТОРИЙ ГТУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ



## Список обозначений и сокращений

В работе используется естественная для релятивистской квантовой теории и физики элементарных частиц система единиц, в которой скорость света  $c$  и постоянная Планка  $\hbar$  равны единице т.е.  $c = \hbar = 1$ .

$i$  – мнимая единица ( $i^2 = -1$ )

$\mathbf{p} = (p_1, p_2, p_3)$  – трехмерный вектор с компонентами  $p_a$  ( $a = 1, 2, 3$ )

$p = (p_0, \mathbf{p})$  – четырехмерный вектор в пространстве Минковского с компонентами  $p^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2, 3$ )

$(\mathbf{p}\mathbf{k}) = p_1 k_1 + p_2 k_2 + p_3 k_3$  – скалярное произведение трехмерных векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$

$\mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = (p_i k_j)$  – матрица-диада, образованная из векторов  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{k}$

$p = |\mathbf{p}| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2}$  – модуль трехмерного вектора  $\mathbf{p}$

$\epsilon_{abc}$  – трехмерный символ Леви-Чивита

$(\mathbf{q}^\times)_{ab} = \epsilon_{abc} q_c$

$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$  – метрический тензор в пространстве Минковского

$(pk) = p^\mu k_\mu = p^\mu g_{\mu\nu} k^\nu = p_0 k_0 - (\mathbf{p}\mathbf{k})$  – скалярное произведение четырехмерных векторов  $p$  и  $k$

$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  – тензор Леви-Чивита для 4-мерного пространства,  $\epsilon^{0123} = 1$

$\gamma^\mu = (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$  – матрицы Дирака,  $\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3$

$\hat{p} = p_\mu \gamma^\mu = (\gamma p)$  – свертка 4-вектора  $p_\mu$  с матрицами Дирака  $\gamma^\mu$

$(p \cdot k)_{\alpha\beta} = (p_\alpha k_\beta)$  – четырехмерная матрица-диада, образованная из 4-векторов  $p$  и  $k$



$\delta_{C,A}$ –дельта-символ Кронекера;  $\delta(x)$ –одномерная дельта–функция Дирака

$\delta(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = \delta(p_1 - k_1) \delta(p_2 - k_2) \delta(p_3 - k_3)$ – трехмерная дельта–функция Дирака

$[A,B] = A B - B A$  –коммутатор операторов  $A$  и  $B$ .

$\omega_m(p) = \sqrt{p^2 + m^2}$ –энергия частицы с массой  $m$  и импульсом  $\mathbf{p}$

Для математических операций используются обозначения:

\*– комплексное сопряжение.

†– эрмитово сопряжение.

**Следует различать следующие термины:**

**Спинор**–двухкомпонентная функция  $\xi$

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$$

представляет собой пару комплексных чисел  $\xi_1, \xi_2$ .

**Спинор Дирака (или биспинор)**–четырёхкомпонентная функция  $\psi$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

представляет собой четверку комплексных чисел  $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \psi_4$ .



# ВВЕДЕНИЕ

## Раздел 1. Основные соотношения и определения.

**Тема 1.** Пространство Минковского. Система единиц ( $\hbar = c = 1$ ). Стандартные обозначения, верхние и нижние индексы. Базис пространства Минковского. Изотропная тетрада пространства Минковского. Тензор Леви-Чивита в пространстве Минковского. Базис пространства Минковского и физические векторы.

**Тема 2.** Матрицы Дирака. Матрицы Дирака. Основные свойства матриц Дирака. Произведения матриц Дирака. Вычисление следов от произведений матриц Дирака. Разложение четырехмерных матриц.

## Раздел 2. Элементы квантовой электродинамики и правила Фейнмана.

**Тема 3.** Дифференциальное сечение и ширина распада. Основные типы элементарных частиц. Чем характеризуются элементарные частицы в эксперименте? Постановка эксперимента в ФЭЧ: сечения рассеяния и ширины распадов. Кинематика бинарных процессов.

**Тема 4. Квантовая электродинамика.** Матрица рассеяния и наблюдаемые величин в квантовой теории поля. Основы квантовой электродинамики (КЭД). Взаимодействие в КЭД.

**Тема 5. Уравнение Дирака.** Уравнение Дирака. Проективные операторы и уравнение Дирака. Решение уравнения Дирака. Спиноры и биспиноры. Вектор поляризации фермиона спина  $1/2$ .

**Тема 6. Диаграммы и правила Фейнмана.** Вектор поляризации фотона. Вектор поляризации массивного бозона. Инвариантная теория возмущений (основные понятия). Диаграммы и правила Фейнмана для квантовой электродинамики. Построение



матричных элементов простейших процессов взаимодействия элементарных частиц.

### **Раздел 3. Методы вычисления наблюдаемых величин в реакциях элементарных частиц.**

**Тема 7. Методы расчета наблюдаемых величин в экспериментах ФЭЧ.** Метод расчета квадратов матричных элементов процессов взаимодействия элементарных частиц. Методы непосредственного расчета матричных элементов процессов с участием фермионов спина  $1/2$ . Классификация методов расчета матричных элементов. Шпуровой метод расчета матричных элементов. Спирная техника вычисления матричных элементов.

**Тема 8. Метод базисных спиноров** Метод базисных спиноров. Явный вид базисных спиноров. Компьютерные программы для автоматического вычисления процессов взаимодействия. Основы работы в FeynArts, FeynCalc. Расчет наблюдаемых для бинарных реакций.

В этой книге мы используем метрический тензор  $g$  и тензор Леви-Чивита  $\epsilon$  такие же, как и в программных комплексах FeynArts/FormCalc [1, 2] и FeynCalc [3].

Характерной особенностью современной релятивистской квантовой физики является

- ◇ использование системы единиц  $\hbar = c = 1$ , которая часто дополняется системой СГС и “рационализированными” единицами Хевисайда-Лоренца
- ◇ введение и использование ковариантных обозначений для четырехмерных величин и их комбинаций



# Раздел 1

## Основные соотношения и определения.

*Тема 1. Система единиц  $\hbar = c = 1$ . Пространство Минковского. Стандартные обозначения, верхние и нижние индексы. Тензор Леви-Чивита в пространстве Минковского. Базис пространства Минковского. Изотропная тетрада пространства Минковского. Базис пространства Минковского и физические векторы.*

Данный раздел содержит информацию о пространстве Минковского и о матрицах Дирака, а также необходимые соотношения, которые могут быть использованы при вычислениях матричных элементов. При желании подготовленный читатель может ее пропустить.

### 1.1 Система единиц $\hbar = c = 1$

Как отмечено в книге Л.Б.Окуня [4]: “Разумно выбранные единицы при описании некоторого круга явлений представляют собой могучий инструмент науки. Используя адекватные единицы, легко провести размерный анализ явления, оценить по порядку величины его характерный масштаб, выявить его связь с другими, на первый взгляд далекими явлениями.”

В квантовой теории поля и в физике элементарных частиц характерная скорость частиц достаточно часто близка к скорости света т.е.  $v_{\text{хар.}} \sim c$ . Это означает, что эти разделы физики имеют



дело с квантовыми релятивистскими явлениями и поэтому в качестве единицы действия и скорости удобно выбрать квант действия  $\hbar$  и скорость света  $c$  соответственно. Естественным продолжением такого построения является положение, что действие и скорость безразмерны, а константы  $\hbar$  и  $c$  равными единице т.е.

$$\hbar = c = 1 . \quad (1.1.1)$$

В следствие (1.1.1) изменятся размерности физических величин.

Так, скорость  $v$ , действие  $S$  и угловой момент  $J$  становятся безразмерными величинами:  $[v] = [S] = [J]$ . Размерности пространственных координат  $r$  и временной координаты  $t$  одинаковы так как ( $r = vt$ ). Используя физические законы можно получить, что размерности энергии, импульса и массы  $m$  совпадают:  $[E] = [\mathbf{p}] = [m]$ .

Квантовомеханическое соотношение  $E = \hbar\omega \sim \frac{\hbar}{t}$  приводит к тому, что

$$[E] = [\mathbf{p}] = [m] = [r^{-1}] = [t^{-1}] .$$

Следуя аналогичным рассуждениям, можно найти, что сила  $\mathbf{F} \sim \frac{\mathbf{p}}{t} \rightarrow [\mathbf{F}] = [m^2]$ .

**Таким образом, все физические величины, имеющие отличную от нуля размерность в единицах  $\hbar = c = 1$  можно измерять в единицах энергии или массы (или длины).**

Отдельной заметки заслуживает вопрос: Каковы размерности заряда  $e$ , электрического  $\mathbf{E}$  и магнитного  $\mathbf{H}$  полей?

Для ответа на этот вопрос для описания электродинамических



явлений удобнее использовать систему единиц СГС и “рационализованные” единицы измерения электрического заряда (единицы Хевисайда-Лоренца). В этой системе единиц уравнения Максвелла принимают вид (“рационализация” Хевисайда: в уравнениях Максвелла отсутствует множитель  $4\pi$ ):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\}, \quad (1.1.2)$$

а закон Кулона для зарядов  $Q_1 = q_1 e$  и  $Q_2 = q_2 e$ , где  $e$  – элементарный заряд, равный заряду электрона, т.е.  $e = -|e|$ , а  $q_1$  и  $q_2$  – безразмерные числа запишется следующим образом:

$$|\mathbf{F}| = \frac{e^2 q_1 q_2}{4\pi \mathbf{r}^2} = \alpha_{em} \frac{q_1 q_2}{\mathbf{r}^2}, \quad (1.1.3)$$

где  $\alpha_{em}$  постоянная тонкой структуры ( $\alpha_{em} = \frac{1}{137,03599911}$ )

Поскольку  $[\mathbf{F}] = [\mathbf{r}^{-2}] \rightarrow [e]_{\text{сгс}} = 1$  т.е. элементарный заряд  $e$  – безразмерная величина.

Используя другие электродинамические соотношения можно показать, что  $[\mathbf{E}]_{\text{сгс}} = [\mathbf{D}]_{\text{сгс}} = [\mathbf{H}]_{\text{сгс}} = [\mathbf{B}]_{\text{сгс}} = [m^2] = [\mathbf{r}^{-2}]$ .

В качестве **естественной** единицы измерения энергии в системе отсчета  $\hbar = c = 1$  принято использовать **электронвольт (эВ)** и производные единицы

$$1 \text{ КэВ} = 10^9 \text{ эВ}, \quad 1 \text{ МэВ} = 10^6 \text{ эВ}, \quad 1 \text{ ГэВ} = 10^9 \text{ эВ},$$



## Определение 1.1

**Электронвольт** – это кинетическая энергия, которую приобрел электрон, пройдя расстояние между двумя точками с разностью потенциалов в 1 Вольт.

Для удобства при переходе к другим единицам измерения имеются **коэффициенты пересчета**. Так например,

$$\begin{aligned}m_e &= 0,510998910 \text{ МэВ} , \\1 \text{ МэВ}^{-1} &= 197,3269631 \text{ Ферми} , \\1 \text{ эВ} &= 1,78266181 \times 10^{-36} \text{ грамм} = 1,60217653 \times 10^{-19} \text{ Дж} , \\1 \text{ эВ}^{-1} &= 6,58211915 \times 10^{-16} \text{ сек} , \\1 \text{ ГэВ}^{-2} &= 0,389379323 \text{ миллибарн} .\end{aligned}\tag{1.1.4}$$

Далее, практически везде будем использовать систему единиц  $\hbar = c = 1$ , дополненную системой единиц СГС и “рационализированными” единицами измерения электрического заряда (единицы Хевисайда-Лоренца).

### Упражнение 1.

Найти классический радиус электрона в метрах, который в избранной нами системе единиц определяется соотношением

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi m_e} ,\tag{1.1.5}$$

где  $e$  – заряд электрона, а  $m_e$  – масса электрона:  $m_e = 0,510998910 \text{ МэВ}$ .

### Упражнение 2.

Найти томпсоновское сечение рассеяния  $\sigma_T$  в миллибарнах и  $\text{см}^2$ :

$$\sigma_T = \frac{8}{3\pi} r_e^2 .\tag{1.1.6}$$



## 1.2 Пространство Минковского

Пространство Минковского – четырёхмерное псевдоевклидово пространство, предложенное Германом Минковским (1908)<sup>1</sup> в качестве геометрической интерпретации пространства-времени в специальной теории относительности; каждому событию соответствует точка пространства Минковского, в лоренцевых (или галилеевых) координатах три координаты которой представляют собой декартовы координаты трёхмерного евклидова пространства, а четвёртая – временную координату  $c t$ , где  $c$  – скорость света,  $t$  – время события. (Источник: <http://ru.wikipedia.org/wiki/>)

### 1.2.1 Основные определения в пространстве Минковского

Сделаем несколько замечаний о ковариантных обозначениях, используемых при описании пространства Минковского. Формально ковариантное описание приводит к тому, что выражения для четырехмерных объектов записываются как целое т.е. не отдельных компонент, а сразу для всего набора компонент. С точки зрения математической записи в выражениях появляются четырехмерные индексы (например,  $\mu, \nu$ ), а не его значения 0,1,2,3.

Примером ковариантной записи может служить выражение

$$A^\mu B_\nu, \quad (1.2.1)$$

а не ковариантной

$$A^1 B_0. \quad (1.2.2)$$

---

<sup>1</sup>Это пространство было также рассмотрено Анри Пуанкаре в 1905. Анри Пуанкаре первым установил и детально изучил одно из самых важных свойств преобразований Лоренца – их групповую структуру, и показал, что “преобразования Лоренца представляют ни что иное, как поворот в пространство четырех измерений, точки которого имеют координаты  $(x, y, z, it)$ ” [5]. “Таким образом, Пуанкаре по крайней мере за три года до Минковского объединил пространство и время в единое четырехмерное пространство-время.” [6, 6 стр.]



*Лоренц-ковариантность, означает что данная физическая величина при преобразованиях Лоренца, связывающих переход от одной системы отсчета к другой, трансформируются по определенному закону.* В зависимости от вида закона преобразования ковариантные объекты делятся на

- скаляры (или инварианты т.е. не преобразуются)
- 4-векторы ( $p_\mu$ )
- четырехмерные тензоры ( $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}$ )

Скаляры или инварианты не преобразуются вовсе.

### Определение 1.2

*Контрвариантным 4-вектором  $A^\mu = \{A^0, \mathbf{A}\} \equiv \{A^0, A^1, A^2, A^3\}$  называется величина, закон преобразования которой от одной системы отсчета к другой штрихованной системе отсчета записывается в виде*

$$A^\mu = \Lambda^\mu_\nu A'^\nu, \quad (1.2.3)$$

*где  $\Lambda^\mu_\nu$  - матрица преобразования Лоренца.*

Пример преобразования 4-вектора  $A$  посредством матрицы Лоренца “буста”  $\Lambda_{\mathbf{u}}$  вдоль оси  $Ox$  (см. (1.1)):

$$\begin{pmatrix} A^0 \\ A^1 \\ A^2 \\ A^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A'^0 \\ A'^1 \\ A'^2 \\ A'^3 \end{pmatrix}, \quad (1.2.4)$$

где

$$\beta = \frac{|\mathbf{v}|}{c}, \quad \mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_0 + m}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

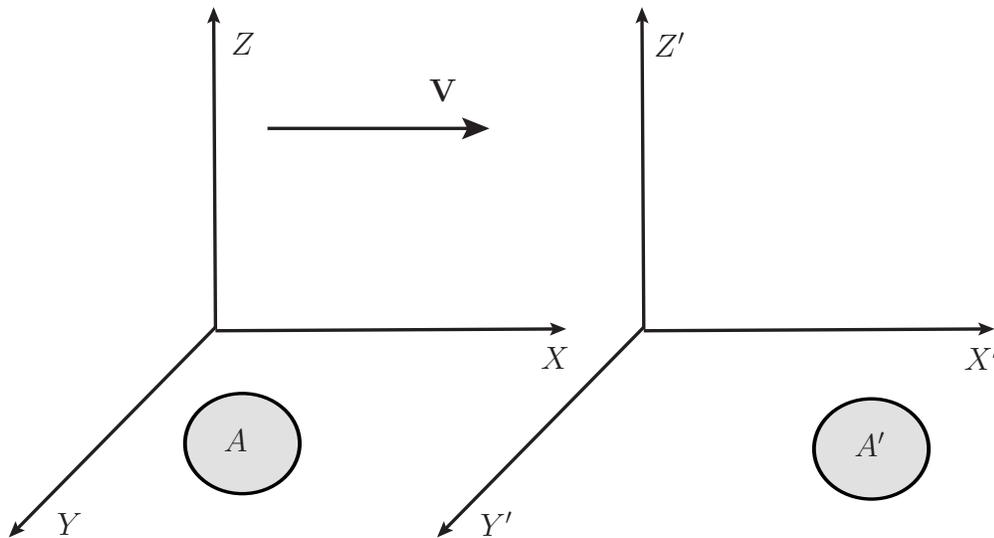


Рисунок 1.1– Иллюстрация к преобразованию “буста”

В общем случае, преобразование  $L_p$  от системы покоя частицы массы  $m_p$  к системе, в которой ее 4-импульс равен  $p$  (преобразование буста) в блочной записи имеет вид:

$$\begin{pmatrix} B^{0'} \\ \mathbf{B}' \end{pmatrix} = L_p \begin{pmatrix} B^0 \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B^0 \sqrt{1 + \mathbf{V}_p^2} + (\mathbf{B}\mathbf{V}_p) \\ \mathbf{B} + B^0 \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_p (\mathbf{V}_p \mathbf{B}) \left(1 + \sqrt{1 + \mathbf{V}_p^2}\right)^{-1} \end{pmatrix} \quad (1.2.5)$$

где

$$\mathbf{V}_p \equiv \frac{\mathbf{p}}{m_p} = \left\{ V_0 = \frac{\omega_{m_p}(p)}{m_p}, \mathbf{V}_p = \frac{\mathbf{p}}{m_p} \right\} \quad (1.2.6)$$

Примерами 4- векторов является

$$\begin{aligned} x^\mu &= \{ct, \mathbf{r}\} \equiv \{ct, x^1, x^2, x^3\} = \{ct, x, y, z\} , \\ p^\mu &= \{E/c, \mathbf{p}\} , \\ \partial^\mu &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left\{ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -\nabla \right\} , \\ j^\mu &= \{c\rho, \mathbf{j}\} . \end{aligned} \quad (1.2.7)$$



### Определение 1.3

Скалярным произведением двух 4-векторов  $A$  и  $B$  в пространстве Минковского называется величина:

$$(AB) = A^\mu g_{\mu\nu} B^\nu = A^0 B^0 - (\mathbf{A}\mathbf{B}) , \quad (1.2.8)$$

где  $g_{\mu\nu}$  так называемый метрический тензор, который имеет вид:

$$g_{\mu\nu} = g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}_{\mu\nu} . \quad (1.2.9)$$

### Определение 1.4

Ковариантные компоненты 4-вектора  $A$  (с индексом внизу) задаются следующим образом:

$$A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu = \{A^0, -\mathbf{A}\} . \quad (1.2.10)$$

Тогда для скалярного произведения имеем

$$(AB) = \begin{cases} A^\mu \underbrace{(g_{\mu\nu} B^\nu)}_{B_\mu} = A^\mu B_\mu \\ \underbrace{(A^\mu g_{\mu\nu})}_{A_\nu} B^\nu = A_\nu B^\nu \end{cases} \quad (1.2.11)$$

Скалярное произведение является инвариантом преобразований Лоренца. Из известного соотношения Эйнштейна для полной энергии свободной частицы  $E$

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (1.2.12)$$



находим, что

$$m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = \left\{ \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right\} \cdot \left\{ \frac{E}{c}, -\mathbf{p} \right\} = p^\mu p_\mu = p^2. \quad (1.2.13)$$

Выражение (1.2.13) говорит о том, что масса покоя частицы является лоренц-инвариантом т.е. неизменной во всех инерциальных системах отсчета.

### Определение 1.5

Символом Кронекера в пространстве Минковского определяют посредством соотношения

$$\delta_{\mu\nu} = \delta^{\mu\nu} = \delta_\nu^\mu = \delta_\mu^\nu \equiv I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_{\mu\nu}. \quad (1.2.14)$$

Можно показать, что

$$\delta_\mu^\nu = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu. \quad (1.2.15)$$

### 1.2.2 Тензор Леви-Чивита в пространстве Минковского



## Определение 1.6

Антисимметричный тензором четвертого ранга  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  называют величину, которая удовлетворяет условию:

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} 1, & \text{если } \mu \nu \rho \sigma \text{ образует четную перестановку } 0,1,2,3 \\ -1, & \text{если } \mu \nu \rho \sigma \text{ образует нечетную перестановку } 0,1,2,3 \\ 0, & \text{если значения двух (и более) индексов совпадают} \end{cases} \quad (1.2.16)$$

Существует определенный произвол в выборе знака тензора Леви-Чивита в пространстве Минковского  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ . Далее будем полагать, что

$$\epsilon^{0123} = 1. \quad (1.2.17)$$

Произведение двух тензоров Леви-Чивита находится из определителя матрицы, элементами которой являются символы Кронекера

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\tau} = (-1) \begin{vmatrix} \delta_{\mu}^{\lambda} & \delta_{\nu}^{\lambda} & \delta_{\alpha}^{\lambda} & \delta_{\beta}^{\lambda} \\ \delta_{\mu}^{\rho} & \delta_{\nu}^{\rho} & \delta_{\alpha}^{\rho} & \delta_{\beta}^{\rho} \\ \delta_{\mu}^{\sigma} & \delta_{\nu}^{\sigma} & \delta_{\alpha}^{\sigma} & \delta_{\beta}^{\sigma} \\ \delta_{\mu}^{\tau} & \delta_{\nu}^{\tau} & \delta_{\alpha}^{\tau} & \delta_{\beta}^{\tau} \end{vmatrix}. \quad (1.2.18)$$

Из соотношения (1.2.18) следует

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\rho\sigma\beta} = (-1) \begin{vmatrix} \delta_{\mu}^{\lambda} & \delta_{\nu}^{\lambda} & \delta_{\alpha}^{\lambda} \\ \delta_{\mu}^{\rho} & \delta_{\nu}^{\rho} & \delta_{\alpha}^{\rho} \\ \delta_{\mu}^{\sigma} & \delta_{\nu}^{\sigma} & \delta_{\alpha}^{\sigma} \end{vmatrix}, \quad (1.2.19)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\rho\alpha\beta} = (-2) (\delta_{\mu}^{\lambda}\delta_{\nu}^{\rho} - \delta_{\mu}^{\rho}\delta_{\nu}^{\lambda}), \quad (1.2.20)$$

$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\lambda\nu\alpha\beta} = (-6) \delta_{\mu}^{\lambda}, \quad (1.2.21)$$



$$\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} = -4! = (-24) . \quad (1.2.22)$$

Введем сокращенную запись для следующих матриц и тензоров:

$$\begin{aligned} (p \cdot q)_{\mu\nu} &\equiv p_\mu k_\nu , \\ [p \cdot q]^{\mu\nu} &\equiv (p \cdot k)^{\mu\nu} - (k \cdot p)^{\mu\nu} , \\ ([p \cdot k]^\times)_{\mu\nu} &\equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\rho k^\sigma , \\ [p, k, q]_\mu &= ([p \cdot k]^\times q)_\mu = \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^\nu k^\rho q^\sigma . \end{aligned} \quad (1.2.23)$$

Такие обозначения удобны при использовании безиндексных записей для выражений.

Использование ковариантной записи выражений существенно упрощает многие выражения и показывает явном виде, какие соотношения сохраняют свой вид при преобразования Лоренца, а какие нет.

### 1.3 Базис пространства Минковского

В пространстве Минковского введем четверку (тетраду) ортонормированных 4-векторов  $l_A$  (индекс  $A$  задает их количество), которые удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} (l_A l_B) &\equiv g_{AB}, \text{ т.е. } l_0^2 = -l_1^2 = -l_2^2 = -l_3^2 = 1, \quad (A = 0, 1, 2, 3) \quad (1.3.1) \\ \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l_A^\mu l_B^\nu l_C^\rho l_D^\sigma &= \epsilon^{ABCD}, \quad \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} l_0^\mu l_1^\nu l_2^\rho l_3^\sigma = \epsilon^{0123} = 1 . \end{aligned} \quad (1.3.2)$$

Соотношения (1.3.2) отражают условие того, что тетрада ортонормированных векторов  $l_A$  имеет фиксированную ориентацию в пространстве Минковского.

Метрический тензор  $g$  можно представить в виде линейной комбинации матриц-диад, составленных из этих векторов, т.е.

$$g^{\mu\nu} = l_0^\mu \cdot l_0^\nu - l_1^\mu \cdot l_1^\nu - l_2^\mu \cdot l_2^\nu - l_3^\mu \cdot l_3^\nu . \quad (1.3.3)$$



Исходя из (1.3.3), произвольный 4-вектор  $p$  можно записать в виде

$$p = (p l_0) l_0 - (p l_1) l_1 - (p l_2) l_2 - (p l_3) l_3 . \quad (1.3.4)$$

т.е. разложить по базисным векторам пространства Минковского.

### 1.3.1 Изотропная тетрада

Используя векторы  $l_A$ , определим светоподобные векторы, которые образуют изотропную тетраду в пространстве Минковского (об изотропной тетраде см. [7]):

$$b_\rho = \frac{(l_0 + \rho l_3)}{2}, \quad n_\lambda = \frac{(\lambda l_1 + i l_2)}{2}, \quad (\rho, \lambda = \pm 1) . \quad (1.3.5)$$

Из соотношений (1.3.1), (1.3.5) следует:

$$(b_\rho b_{-\lambda}) = \delta_{\lambda, \rho} / 2, \quad (n_\lambda n_{-\rho}) = \delta_{\lambda, \rho} / 2, \quad (b_\rho n_\lambda) = 0, \quad (1.3.6)$$

$$g^{\mu\nu} \cong \sum_{\lambda=-1}^1 \left[ \tilde{b}_\lambda^\mu \cdot b_{-\lambda}^\nu + \tilde{n}_\lambda^\mu \cdot n_{-\lambda}^\nu \right], \quad \text{где} \quad (1.3.7)$$

$$\tilde{b}_\rho = 2 b_\rho, \quad \tilde{n}_\lambda = 2 n_\lambda . \quad (1.3.8)$$

Согласно (1.3.6) и (1.3.7) векторы изотропной тетрады  $b_\lambda$  и  $n_\rho$  определяют две ортогональные гиперплоскости в пространстве Минковского. Отметим, что векторы изотропной тетрады  $b_{\pm 1}$  могут быть также образованы с помощью пары  $l_0, l_1$  или  $l_0, l_2$ . В этом случае комплексные векторы  $n_\lambda$  определяются через  $l_2, l_3$  и  $l_1, l_3$  соответственно.

Компоненты  $\mu = 0, 1, 2, 3$  ортонормированного базиса пространства Минковского (1.3.1)  $l_A$  определяются соотношением  $(l_A)_\mu =$



$\delta_{A\mu}$  т.е.

$$\begin{aligned}(l_0)_\mu &= \{1, 0, 0, 0\} \quad , \quad (l_1)_\mu = \{0, 1, 0, 0\} \quad , \\ (l_2)_\mu &= \{0, 0, 1, 0\} \quad , \quad (l_3)_\mu = \{0, 0, 0, 1\} \quad .\end{aligned}\quad (1.3.9)$$

### 1.3.2 Базис пространства Минковского и физические векторы

При вычислении характеристик реакций взаимодействия элементарных частиц широко используют построение ортонормированного базиса пространства Минковского через физические векторы данной реакции. Удачный выбор базиса позволяет значительно упростить расчеты и получать компактные и обозримые выражения. Такие построения являются для некоторых методов расчетов неотъемлемой частью и лежат в основе вычислений матричных элементов реакций (см. [8–12] и др. работы).

Эти построения проводят с помощью определителей Грама (см., например, [13], [14]). Если мы имеем тройку произвольных линейно независимых 4-векторов  $a, b, c$ , таких что  $a^2, b^2, c^2 \neq 0$ , то ортонормированный базис пространства Минковского строится следующим образом (см. [13]):

$$l_0 = \frac{a}{\sqrt{a^2}} \quad , \quad (1.3.10)$$

$$l_1 = \frac{(ab)a - a^2b}{\sqrt{a^2((ab)^2 - a^2b^2)}} \quad , \quad (1.3.11)$$



$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{2(ab)(ac)(bc) + N_{a,b,c}}} \times$$

$$\times \left( \frac{[(ab)(bc) - b^2(ac)]a + [(ab)(ac) - a^2(bc)]b}{\sqrt{(ab)^2 - a^2b^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{[a^2b^2 - (ab)^2]c}{\sqrt{(ab)^2 - a^2b^2}} \right), \quad (1.3.12)$$

$$l_3 = \frac{[a,b,c]}{\sqrt{2(ab)(ac)(bc) + N_{a,b,c}}}, \quad (1.3.13)$$

где

$$N_{a,b,c} = a^2b^2c^2 - a^2(bc)^2 - b^2(ac)^2 - c^2(ab)^2. \quad (1.3.14)$$

Базис (1.3.10)-(1.3.13) не позволяет в явном виде провести построение базиса для случая светоподобных векторов. Проведем отдельное построение для случая, когда имеется тройка неортогональных векторов  $p_1, p_2, k_1$ , таких что  $p_1^2 = p_2^2 = k_1^2 = 0$ . Ортонормированный базис пространства Минковского может быть определен в этом случае через соотношения

$$l_0 = \frac{p_1 + p_2}{\sqrt{2(p_1p_2)}}, \quad (1.3.15)$$

$$l_1 = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{2(p_1p_2)}}, \quad (1.3.16)$$

$$l_2 = \frac{(p_2k_1)p_1 + (p_1k_1)p_2 - (p_1p_2)k_1}{\sqrt{2(p_1p_2)(p_1k_1)(p_2k_1)}}, \quad (1.3.17)$$

$$l_3 = \frac{[p_1, p_2, k_1]}{\sqrt{2(p_1p_2)(p_1k_1)(p_2k_1)}}. \quad (1.3.18)$$

## 1.4 Упражнения и задания к параграфам 1.2-1.3

### Упражнение 1.

Показать, что

$$g_{\mu\alpha} g^{\mu\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} . \quad (1.4.1)$$

### Упражнение 2.

Покажите, что вектора изотропной тетрады являются светоподобными т.е.

$$(b_{\rho}b_{\rho}) = 0 \quad , \quad (n_{\lambda}n_{\lambda}) = 0, \quad (b_{\rho}n_{\lambda}) = 0, \quad (1.4.2)$$

любого  $\rho, \lambda = \pm 1$ .

### Упражнение 3.

Показать, что для векторов изотропной тетрады (1.3.5) выполняется (обозначения см. (1.2.23))

$$\begin{aligned} \left( \left[ \tilde{b}_A \cdot \tilde{n}_{\lambda} \right]^{\times} \right)^{\mu\nu} &= iA\lambda \left[ \tilde{b}_A \cdot \tilde{n}_{\lambda} \right]^{\mu\nu} , \\ \left( \left[ \tilde{n}_{\lambda} \cdot \tilde{n}_{-\lambda} \right]^{\times} \right)^{\mu\nu} &= iA\lambda \left[ \tilde{b}_A \cdot \tilde{b}_{-A} \right]^{\mu\nu} , \\ \left( \left[ \tilde{b}_A \cdot \tilde{b}_{-A} \right]^{\times} \right)^{\mu\nu} &= iA\lambda \left[ \tilde{n}_{\lambda} \cdot \tilde{n}_{-\lambda} \right]^{\mu\nu} , \\ \left[ \tilde{b}_A, \tilde{b}_{-A}, \tilde{n}_{\lambda} \right]^{\mu} &= 2iA\lambda \tilde{n}_{\lambda}^{\mu} , \quad \left[ \tilde{b}_A, \tilde{n}_{\lambda}, \tilde{n}_{-\lambda} \right]^{\mu} = 2iA\lambda \tilde{b}_A^{\mu} , \\ \epsilon \left( \tilde{b}_A, \tilde{b}_{-A}, \tilde{n}_{\lambda}, \tilde{n}_{-\lambda} \right) &= -4iA\lambda , \quad (A, \lambda = \pm 1) , \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

где использована сокращенная запись

$$\epsilon(p, k, q, n) \equiv \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} p^{\mu} k^{\nu} q^{\rho} n^{\sigma} .$$

### Упражнение 4.

Покажите, что базис (1.3.15)-(1.3.17) действительно образует ортонормированный базис.

### Упражнение 5.

Найдите вектора изотропной тетрады (1.3.5) на основе базиса (1.3.15)-(1.3.17) через  $p_1, p_2, k_1$ .



## Упражнение 6.

Покажите, что для светоподобного вектора  $p$  выполняется равенство

$$(pb_{-1})(pb_1) = -(pn_{-1})(pn_1) .$$

## Лаб.Занятие 7.

Запрограммируйте в среде “Mathematica” следующие объекты пространства Минковского:

- – Метрический тензор  $g^{\mu\nu}$
- – Антисимметричный тензор  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  с учетом разницы между верхними и нижними индексами.
- – Вычисление скалярного произведения 4-векторов, через их компоненты



**Тема 2. Матрицы Дирака.** Матрицы Дирака. Основные свойства матриц Дирака. Произведения матриц Дирака. Вычисление следов от произведений матриц Дирака. Разложение четырехмерных матриц.

## 1.5 Матрицы Дирака

Матрицы Дирака (или  $\gamma$ -матрицы), возникающие при описании свойств фермионов спина 1/2 (уравнение Дирака, см. далее), представляют собой набор матриц  $\gamma^\mu \equiv (\gamma^0, \gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$  размерностью  $4 \times 4$ . В этом параграфе приводятся основные формулы и соотношения, которые используются в расчетах процессов с участием фермионов.

### 1.5.1 Основные свойства

Определяющими свойствами  $\gamma$ -матриц являются следующие соотношения:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} I, \quad (1.5.1)$$

$$\begin{aligned} (\gamma^0)^2 &= I, \quad (\gamma^i)^2 = -I, \quad (\gamma^0)^\dagger = \gamma^0, \\ (\gamma^i)^\dagger &= -\gamma^i, \quad (i = 1, 2, 3). \end{aligned} \quad (1.5.2)$$

Коммутатор  $\gamma$ -матриц имеет специальное обозначение

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (1.5.3)$$

Матрица  $\gamma^5$  определяется:

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = (-1) \frac{i}{4!} \epsilon_{\alpha\beta\mu\nu} \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu \quad (1.5.4)$$

с тензором Леви-Чивита  $\epsilon$

$$\epsilon^{0123} = -\epsilon_{0123} = 1 \quad (1.5.5)$$



и имеет следующие свойства

$$(\gamma^5)^2 = I, \quad (\gamma^5)^\dagger = \gamma^5, \quad \gamma^\mu \gamma^5 + \gamma^5 \gamma^\mu = 0. \quad (1.5.6)$$

С помощью матрицы  $\gamma^0$  определяют операцию дираковского сопряжения для произвольной четырехмерной матрицы  $A$

$$\bar{A} \equiv \gamma^0 A^\dagger \gamma^0. \quad (1.5.7)$$

### 1.5.2 Представления матриц Дирака

В физических приложениях используют несколько представлений матриц Дирака, удовлетворяющих соотношениям (1.5.1)-(1.5.2). Явный вид  $\gamma$ -матриц удобно записывать в блочной форме при помощи матриц Паули

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.5.8)$$

а также единичной и нулевой матриц размерностью  $2 \times 2$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (1.5.9)$$

Наиболее популярными являются представление Дирака (Дирака-Паули), обозначаемое здесь с индексом  $D$

$$\gamma_D^0 = \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_D^i = \begin{pmatrix} O_2 & \sigma_i \\ -\sigma_i & O_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_D^5 = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ I_2 & O_2 \end{pmatrix} \quad (1.5.10)$$

и киральное (спинорное) представление, которое так же называют представлением Вейля (индекс  $C$ )

$$\gamma_C^0 = \begin{pmatrix} O_2 & I_2 \\ I_2 & O_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_C^i = \begin{pmatrix} O_2 & -\sigma_i \\ \sigma_i & O_2 \end{pmatrix},$$

$$\gamma_C^5 = \begin{pmatrix} I_2 & O_2 \\ O_2 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (1.5.11)$$



Эти представления связаны между собой посредством унитарного преобразования, определяемого матрицей  $U_C$

$$\gamma_C^\mu = U_C \gamma_D^\mu U_C^\dagger \quad \text{с матрицей} \quad U_C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_D^0 + \gamma_D^5). \quad (1.5.12)$$

Реже используют представление Майорана (индекс  $M$ )

$$\begin{aligned} \gamma_M^0 &= \begin{pmatrix} O & \sigma_2 \\ \sigma_2 & O \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^1 = \begin{pmatrix} i\sigma_3 & O_2 \\ O_2 & i\sigma_3 \end{pmatrix}, \\ \gamma_M^2 &= \begin{pmatrix} O_2 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & O_2 \end{pmatrix}, \quad \gamma_M^3 = \begin{pmatrix} -i\sigma_1 & O_2 \\ O_2 & -i\sigma_1 \end{pmatrix}, \\ \gamma_M^5 &= \begin{pmatrix} \sigma_2 & O_2 \\ O_2 & -\sigma_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

Представление Майорана связано с представлением Дирака посредством преобразования

$$\gamma_M^\mu = U_M \gamma_D^\mu U_M^\dagger \quad \text{с матрицей} \quad U_M = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} I_2 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & -I_2 \end{pmatrix}. \quad (1.5.14)$$

### 1.5.3 Произведения матриц Дирака

При вычислении матричных элементов часто используются соотношения, которые позволяют редуцировать произведение с большим количеством  $\gamma$ -матриц к комбинациям с меньшим количеством. Приведем основные соотношения такого типа

$$\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta = g^{\alpha\rho} \gamma^\beta - g^{\alpha\beta} \gamma^\rho + g^{\rho\beta} \gamma^\alpha - i\gamma^5 \epsilon^{\alpha\rho\beta\tau} \gamma_\tau, \quad (1.5.15)$$

$$\gamma^5 \sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\tau} \sigma^{\rho\tau}. \quad (1.5.16)$$

В дополнение к преобразованиям (1.5.15)-(1.5.16) часто применяют тождества Чизхольма

$$\gamma^\mu S^{odd} \gamma_\mu = -2S_R^{odd}, \quad (1.5.17)$$



$$\begin{aligned}\gamma^\mu S^{even} \gamma_\mu &= \gamma^\mu \gamma^\nu \tilde{S}^{odd} \gamma_\mu = \\ &= 2\gamma^\nu \tilde{S}_R^{odd} + 2\tilde{S}^{odd} \gamma^\nu.\end{aligned}\quad (1.5.18)$$

В этих формулах использованы обозначения для произведений  $\gamma$ -матриц

$$\begin{aligned}S &= S^n \equiv \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_n}, \\ S_R &= S_R^n \equiv \gamma^{\alpha_n} \gamma^{\alpha_{n-1}} \dots \gamma^{\alpha_2} \gamma^{\alpha_1},\end{aligned}\quad (1.5.19)$$

$$\begin{aligned}S^{odd} &= \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2k+1}}, \\ S^{even} &= \gamma^{\alpha_1} \gamma^{\alpha_2} \dots \gamma^{\alpha_{2k}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots.\end{aligned}\quad (1.5.20)$$

Так, для  $S^1, S^2, S^4$  и  $S^3$  имеем

$$\begin{aligned}\gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma_\mu &= -2\gamma^\alpha, \quad \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma_\mu = 4g^{\alpha\beta}, \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma^\sigma \gamma_\mu &= 2\gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\sigma + 2\gamma^\sigma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho, \\ \gamma^\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\rho \gamma_\mu &= -2\gamma^\rho \gamma^\beta \gamma^\alpha.\end{aligned}\quad (1.5.21)$$

Введем свертку произвольного 4-вектора  $p_\mu$  с матрицами Дирака  $\gamma^\mu$  (скалярное произведение  $(\gamma p)$ ):

$$\hat{p} \equiv p_\mu \gamma^\mu = p^0 \gamma^0 - (\mathbf{p}\boldsymbol{\gamma}). \quad (1.5.22)$$

Объект  $\hat{p}$  является матрицей  $4 \times 4$ . В силу ортогональности базисных векторов пространства Минковского произведения свертки с  $\gamma$ -матрицами может быть в ряде случаев упрощено. С помощью (1.3.9) и определения свертки (1.5.22) можно заметить, что

$$\hat{l}_0 = \gamma^0, \quad \hat{l}_1 = \gamma^1, \quad \hat{l}_2 = \gamma^2, \quad \hat{l}_3 = \gamma^3. \quad (1.5.23)$$

Тогда, используя (1.5.1), (1.5.4) и (1.5.6) легко найти, что

$$\hat{l}_0 \hat{l}_1 \hat{l}_2 = i\gamma^5 \hat{l}_3, \quad (1.5.24)$$

$$\hat{l}_0 \hat{l}_1 \hat{l}_3 = -i\gamma^5 \hat{l}_2, \quad (1.5.25)$$



$$\hat{\ell}_0 \hat{\ell}_2 \hat{\ell}_3 = i\gamma^5 \hat{\ell}_1, \quad (1.5.26)$$

$$\hat{\ell}_1 \hat{\ell}_2 \hat{\ell}_3 = i\gamma^5 \hat{\ell}_0. \quad (1.5.27)$$

Используя соотношения (1.4.3) и (1.5.15), для векторов изотропной тетрады можно показать, что

$$\begin{aligned} \hat{n}_\lambda \hat{b}_A \hat{b}_{-A} &= \omega_{-A \times \lambda} \hat{n}_\lambda, \\ \hat{b}_A \hat{n}_{-\lambda} \hat{n}_\lambda &= \omega_{-A \times \lambda} \hat{b}_A, \end{aligned} \quad (1.5.28)$$

где

$$\omega_\lambda \equiv \frac{1}{2} (I + \lambda \gamma^5). \quad (1.5.29)$$

#### 1.5.4 Шпуры от произведения $\gamma$ -матриц

Шпур(след) от произведения  $\gamma$ -матриц, содержащих нечетное число (включая любое число  $\gamma^5$ -матриц), а также след от произведения  $\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu$  равны нулю:

$$\begin{aligned} Tr(S^{odd}) &= Tr(S^{odd}(\dots \gamma^5 \dots)) = \\ &= Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu) = 0. \end{aligned} \quad (1.5.30)$$

В остальных случаях имеем

$$\begin{aligned} Tr(\gamma^5) &= 0, \quad Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu) = 4g^{\mu\nu}, \\ Tr(\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= 4(g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma} - g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} + g^{\mu\sigma} g^{\rho\nu}), \\ Tr(\gamma^5 \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\rho \gamma^\sigma) &= -4i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}. \end{aligned} \quad (1.5.31)$$

Шпуры от произведения большего числа матриц Дирака можно свести к вычислению шпуров (1.5.31) с помощью рекуррентного соотношения (1.5.15).



### 1.5.5 Разложение четырехмерных матриц

Из произведений  $\gamma$ -матриц можно построить 16 линейно независимых матриц  $\Gamma_A$ , составляющих полный набор для  $4 \times 4$ -матриц. Любую четырехмерную матрицу можно представить в виде линейной комбинации матриц  $\Gamma_A$ .

Один из часто используемых наборов имеет вид:

$$I, \gamma^5, \gamma^\mu, \gamma^5\gamma^\mu, \sigma^{\mu\nu}. \quad (1.5.32)$$

Тогда для произвольной  $4 \times 4$  матрицы  $A$  разложение по набору (1.5.32) примет вид

$$A = aI + b\gamma^5 + c_\alpha\gamma^\alpha + d_\alpha\gamma^5\gamma^\alpha + e_{\alpha\beta}\sigma^{\alpha\beta}, \quad (1.5.33)$$

где

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{4}Tr(A), \quad b = \frac{1}{4}Tr(\gamma^5 A), \quad c^\alpha = \frac{1}{4}Tr(\gamma^\alpha A), \\ d^\alpha &= -\frac{1}{4}Tr(\gamma^5\gamma^\alpha A), \quad e^{\alpha\beta} = -\frac{1}{8}Tr(\sigma^{\alpha\beta} A). \end{aligned} \quad (1.5.34)$$

Для разложения можно использовать также набор

$$\omega_\lambda \equiv \frac{1}{2}(I + \lambda\gamma^5), \quad \omega_\lambda\gamma^\mu, \quad \sigma^{\mu\nu}, \quad (\lambda = -1, 1). \quad (1.5.35)$$

В этом случае разложение матрицы  $A$  запишется в виде

$$A = \sum_{\lambda=-1}^1 \omega_\lambda (a^\lambda + b_\mu^\lambda\gamma^\mu) + c_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} \quad (1.5.36)$$

с коэффициентами разложения

$$\begin{aligned} a^\lambda &= \frac{1}{2}Tr(\omega_\lambda A), \quad b_\mu^\lambda = \frac{1}{2}Tr(\omega_{-\lambda}\gamma_\mu A), \\ c^{\mu\nu} &= -\frac{1}{8}Tr(\sigma^{\mu\nu} A). \end{aligned} \quad (1.5.37)$$

## 1.6 Упражнения и задания к параграфу 1.5

### Упражнение 1.

Докажите, что шпур от нечетного числа  $\gamma$ -матриц равен нулю. (Используйте свойство шпуров:  $Tr(AB) = Tr(BA)$ ).

### Упражнение 2.

Докажите, что  $Tr(\gamma_\mu \gamma_\nu) = 4g^{\mu\nu}$ .

### Упражнение 3.

Используя разложение по полному набору (1.5.32) докажите соотношение (1.5.15):

$$\gamma^\alpha \gamma^\rho \gamma^\beta = g^{\alpha\rho} \gamma^\beta - g^{\alpha\beta} \gamma^\rho + g^{\rho\beta} \gamma^\alpha - i\gamma^5 \epsilon^{\alpha\rho\beta\tau} \gamma_\tau .$$

### Упражнение 4.

Докажите, что

$$\begin{aligned} \hat{n}_\lambda \hat{b}_A \hat{b}_{-A} &= \omega_{-A \times \lambda} \hat{n}_\lambda , \\ \hat{b}_A \hat{n}_{-\lambda} \hat{n}_\lambda &= \omega_{-A \times \lambda} \hat{b}_A . \end{aligned}$$

### Лаб.Занятие 5.

Путем непосредственного вычисления для  $\gamma$ -матриц в представлении Дирака-Паули проверьте соотношения (1.5.1), (1.5.2) и (1.5.6).

### Лаб.Занятие 6.

Путем непосредственного вычисления для  $\gamma$ -матриц в представлении Дирака-Паули проверьте соотношения

$$\bar{\gamma}^\mu = \gamma^\mu , \tag{1.6.1}$$



$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = \sigma^{\mu\nu} , \quad (1.6.2)$$

$$\bar{\gamma}^5 = -\gamma^5 . \quad (1.6.3)$$

$$\begin{aligned} \omega_{A \times \lambda} \hat{b}_A \hat{n}_\lambda &= 0 , \\ \hat{b}_A \hat{n}_{-\lambda} \hat{n}_\lambda &= \omega_{-A \times \lambda} \hat{b}_A . \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ



## Раздел 2

### Биспиноры Дирака

*Тема 3. Биспиноры Дирака. Определение базисных спиноров. Соотношения для базисных спиноров. Явный вид базисных спиноров. Уравнение Дирака. Проективные операторы и уравнение Дирака. Решение уравнения Дирака. Вектор поляризации фермиона спина. Базисные спиноры и биспиноры Дирака.*

#### 2.1 Базисные спиноры

В этой части при определении спиноров Дирака в качестве спинового индекса используем удвоенное значение проекции спина фермиона ( $\pm 1$ ).

**Определение.** С помощью векторов изотропной тетрады (1.3.6) определим безмассовые базисные спиноры  $u_\lambda(b_{-1})$  и  $u_\lambda(b_1)$ :

$$\hat{b}_{-1}u_\lambda(b_{-1}) = 0, \quad u_\lambda(b_1) = \hat{b}_1u_{-\lambda}(b_{-1}), \quad (2.1.1)$$

$$\omega_\lambda u_\lambda(b_{\pm 1}) = u_\lambda(b_{\pm 1}) \quad (2.1.2)$$

с проективной матрицей

$$\omega_\lambda = \frac{1}{2}(I + \lambda\gamma_5) \quad (2.1.3)$$

и условием нормировки

$$u_\lambda(b_{\pm 1})\bar{u}_\lambda(b_{\pm 1}) = \omega_\lambda\hat{b}_{\pm 1}. \quad (2.1.4)$$



**Фазовое соглашение.** Фазовое соглашение, которое в случае безмассовых частиц будет определять связь между спинорами с разной спиральностью, выберем в виде

$$\hat{n}_\lambda u_{-\rho}(b_{-1}) = \delta_{\lambda, \rho} u_\rho(b_{-1}) . \quad (2.1.5)$$

Соотношения (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.5) можно записать в обобщенном виде:

$$\hat{b}_\rho u_\lambda(b_A) = \delta_{\rho, -A} u_{-\lambda}(b_{-A}) , \quad (2.1.6)$$

$$\omega_\lambda u_\rho(b_A) = \delta_{\rho, \lambda} u_\lambda(b_A) , \quad (2.1.7)$$

$$\hat{n}_\rho u_\lambda(b_A) = (-A) \delta_{\rho, A \times \lambda} u_{-\lambda}(b_A) , \quad (A, \rho, \lambda = \pm 1) . \quad (2.1.8)$$

**Условие полноты.** Важным свойством спиноров (2.1.1) является соотношение полноты, которое доказывается с помощью (2.1.1), (2.1.2) и (2.1.4) и записывается в виде

$$\sum_{\lambda, A = -1}^1 u_\lambda(b_A) \bar{u}_{-\lambda}(b_{-A}) = I . \quad (2.1.9)$$

Спинорные произведения базисных спиноров (2.1.1) задаются простыми соотношениями

$$\bar{u}_\lambda(b_C) u_\rho(b_A) = \delta_{\lambda, -\rho} \delta_{C, -A} , \quad (C, A, \lambda, \rho = \pm 1) . \quad (2.1.10)$$

## 2.2 Основные уравнения для базисных спиноров

Используя, что

$$g^{\mu\nu} = \sum_{\lambda=-1}^1 \left[ \tilde{b}_\lambda^\mu \cdot b_{-\lambda}^\nu + \tilde{n}_\lambda^\mu \cdot n_{-\lambda}^\nu \right] \quad (2.2.1)$$



матрицу Дирака  $\gamma^\mu$  можно переписать в виде

$$\gamma^\mu = \sum_{\lambda=-1}^1 \left[ \tilde{b}_\lambda^\mu \hat{b}_{-\lambda} + \tilde{n}_\lambda^\mu \hat{n}_{-\lambda} \right]. \quad (2.2.2)$$

С помощью уравнений (2.1.6), (2.1.8) и (2.2.2) найдем действие матриц Дирака на базисные спиноры

$$\gamma^\mu u_\lambda(b_A) = \tilde{b}_A^\mu u_{-\lambda}(b_{-A}) - A \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\mu u_{-\lambda}(b_A). \quad (2.2.3)$$

Произведение  $n$  матриц Дирака  $\mathcal{S}^n = \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}$  при действии на базисные спиноры генерирует конструкцию вида

$$\mathcal{S}^n u_\lambda(b_A) = \mathcal{B}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} u_{\lambda'_n}(b_{A'_n}) - A \mathcal{N}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} u_{\lambda'_n}(b_{-A'_n}), \quad (2.2.4)$$

где

$$\lambda'_n = (-1)^n \lambda, \quad A'_n = (-1)^n A, \quad (2.2.5)$$

а  $\mathcal{B}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}}$ ,  $\mathcal{N}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}}$  являются лоренц-тензорами, определяемые посредством векторов изотропной тетрады (1.3.5).

Как следует из (2.2.3)

$$\mathcal{B}_{A, \lambda}^{\{\mu\}} = \tilde{b}_A^\mu, \quad \mathcal{N}_{A, \lambda}^{\{\mu\}} = \tilde{n}_{-A \times \lambda}^\mu. \quad (2.2.6)$$

### 2.3 Уравнение Дирака

Для описания свободных фермионов спина 1/2 используют уравнение Дирака

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi(x) = 0. \quad (2.3.1)$$

Данное уравнение представляет собой четыре дифференциальных уравнения, связывающих четыре компоненты вектор-столбца  $\psi$ , и с учетом матричных индексов имеет вид

$$\sum_{\beta=1}^4 \sum_{\mu=0}^3 \left[ i\gamma_{\alpha\beta}^\mu \partial_\mu - m \delta_{\alpha\beta} \right] \psi_\beta(x) = 0. \quad (2.3.2)$$



В дальнейшем мы будем использовать безиндексную форму записи, за исключением некоторых случаев.

Частное решение уравнения (2.3.1) для частицы с массой  $m_p$  с фиксированным 4-импульсом  $p$  ( $p^2 = m_p^2$ ) записывается в виде плоской волны

$$\psi_{\lambda_p}(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} u_{\lambda_p}(p) e^{-i(p x)}, \quad (2.3.3)$$

где индекс  $\lambda_p = \pm 1$  определяет удвоенное значение проекции спина.

Дираковский спинор (биспинор)  $u_{\lambda_p}(p)$  для частицы удовлетворяет уравнению (2.3.1), записанному в импульсном представлении

$$(\hat{p} - m_p) u_{\lambda_p}(p) = 0, \quad (2.3.4)$$

где  $\hat{p} = p^\mu \gamma_\mu$ .

Аналогичное решение для массивной античастицы спина 1/2 (в состоянии с 4-импульсом  $-p$ ) записывается в виде

$$\psi_{\lambda_p}(x, p) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} v_{\lambda_p}(p) e^{i(p x)} \quad (2.3.5)$$

с биспинором  $v_{\lambda_p}(p)$  удовлетворяющим уравнению

$$(\hat{p} + m_p) v_{\lambda_p}(p) = 0. \quad (2.3.6)$$

Для полного описания фермионных полей вводится дираковски-сопряженные биспиноры

$$\begin{aligned} \bar{u} &= u^\dagger \gamma^0, \\ \bar{v} &= v^\dagger \gamma^0, \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

которые удовлетворяют уравнениям

$$\begin{aligned} \bar{u}_{\lambda_p}(p) (\hat{p} - m_p) &= 0, \\ \bar{v}_{\lambda_p}(p) (\hat{p} + m_p) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$



Важным случаем является случай безмассовых фермионов спина  $1/2$ , т.е. когда фермион с 4-импульсом  $p$  имеет массу покоя  $m_p = 0$ . Уравнения (2.3.4), (2.3.6) и (2.3.8) упрощаются и принимают вид

$$\hat{p} u_{\lambda_p}(p) = 0, \quad \bar{u}_{\lambda_p}(p) \hat{p} = 0, \quad (2.3.9)$$

$$\hat{p} v_{\lambda_p}(p) = 0, \quad \bar{v}_{\lambda_p}(p) \hat{p} = 0. \quad (2.3.10)$$

## 2.4 Описание спиновых свойств фермионов

Остановимся более подробно на описании спиновых свойств фермионов спина  $1/2$ . Для этого вначале изложим элементы теории релятивистских частиц с произвольным спином  $s$  и импульсом  $p$ .

Последовательное описание спиновых свойств релятивистских частиц дается в рамках группы Пуанкаре (см., например, [15, 16]), при этом выделяют два варианта: массивные и безмассовые частицы. Рассмотрим случай массивной частицы с 4-импульсом  $p$ , спином  $s$  и проекцией спина  $\lambda$ , вектор состояния которой обозначим как  $|p, s, \lambda\rangle$ .

Масса частицы  $m_p$  и спин  $s$  определяются через собственные значения двух инвариантных операторов

$$P_\mu P^\mu |p, s, \lambda\rangle = m_p^2 |p, s, \lambda\rangle, \quad (2.4.1)$$

$$W_\mu W^\mu |p, s, \lambda\rangle = m_p^2 s(s+1) |p, s, \lambda\rangle. \quad (2.4.2)$$

В уравнениях (2.4.1), (2.4.2)  $P_\mu$  — оператор 4-импульса частицы, а  $W^\mu$  — оператор Паули-Любанского

$$W^\mu = -\frac{1}{2} \epsilon_{\rho\tau\nu\mu} M^{\rho\tau} p^\nu \quad (2.4.3)$$



с генераторами группы Лоренца  $M^{\rho\tau}$ .

Для операторов Паули-Любанского и 4-импульса выполняются следующие соотношения

$$W^\mu P_\mu = (WP) = 0, \quad (2.4.4)$$

$$[W_\mu, P^\sigma] \equiv W^\mu P_\sigma - P_\sigma W^\mu = 0, \quad (2.4.5)$$

$$[W_\mu, W_\sigma] = i\epsilon_{\mu\sigma\alpha\beta} W^\alpha P^\beta. \quad (2.4.6)$$

Для получения трехмерного аналога оператора спина  $\mathbf{S} = (S_1, S_2, S_3)$  используем ортонормированный базис пространства Минковского (тетраду)  $l_A(p)$  ( $A = 0,1,2,3$ ) для частиц с фиксированным импульсом  $p$ , определяемый условиями

$$l_0(p) = \frac{p}{m_p}, l_1(p), l_2(p), l_3(p) \equiv s_p, \\ l_i^2(p) = -1, (p l_i(p)) = 0, (i = 1,2,3). \quad (2.4.7)$$

Тогда для оператора

$$W_A = l_A^\mu(p) W_\mu, \quad (2.4.8)$$

вследствие (2.4.4), имеем, что  $W_0 = 0$ .

С помощью оставшихся трех ненулевых компонент  $W_i$  определим операторы проекций спина для релятивистской массивной частицы

$$S_i = \frac{l_i^\mu(p) W_\mu}{m_p}. \quad (2.4.9)$$

Исходя из уравнений (2.4.5), (2.4.6), получим, что оператор  $\mathbf{S}$  удовлетворяет стандартным коммутационным соотношениям оператора спина

$$[\mathbf{S}^2, S_3] = 0, [S_i, S_j] = i\epsilon_{ijk} S_k, \quad (2.4.10)$$

а также, что

$$\mathbf{S}^2 |p, s, \lambda\rangle = s(s+1) |p, s, \lambda\rangle, s = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots. \quad (2.4.11)$$



Оператор проекции спина  $S_3$  (2.4.9) на заданную (но произвольную) “ось  $z$ ”, удовлетворяющий соотношению (см. (2.4.7))

$$S_3 |p, s, \lambda\rangle = \frac{(s_p W)}{m_p} |p, s, \lambda\rangle = \lambda |p, s, \lambda\rangle, \quad (2.4.12)$$

$$\lambda = -s, -s + 1, \dots, s.$$

используют для идентификации вектора состояния частицы  $|p, s, \lambda\rangle$ .

С помощью операторов  $S_1, S_2$  определяют неэрмитовы операторы понижения и повышения значений проекций спина

$$S_\delta = S_1 + i\delta S_2, \quad S_\delta^\dagger = S_{-\delta}, \quad (\delta = \pm 1), \quad (2.4.13)$$

удовлетворяющих уравнениям, определяющих фазу вектора состояния

$$S_\delta |p, s, \lambda\rangle = \frac{(\tilde{n}_\delta(p) W)}{m_p} |p, s, \lambda\rangle =$$

$$= \sqrt{(s - \delta\lambda)(s + \delta\lambda + 1)} |p, s, \lambda + \delta\rangle, \quad (2.4.14)$$

где комплексный светоподобный 4-вектор  $\tilde{n}_\delta$  связан с тетрадой (2.4.7):

$$\tilde{n}_\delta(p) = l_1(p) + i\delta l_2(p), \quad (\delta = -1, 1). \quad (2.4.15)$$

В случае безмассовых частиц система покоя отсутствует. Поэтому использование тетрады векторов (2.4.7) неприемлемо. Для светоподобного вектора  $p_\mu$  базис пространства Минковского определим следующим образом

$$(l_0(p) p) = (l_3(p) p). \quad (2.4.16)$$

Тогда после алгебраических преобразований и некоторых рассуждений получим, что для всех безмассовых состояний выполняется операторное уравнение

$$W_\mu = S_3 P_\mu. \quad (2.4.17)$$



Можно показать, что ось проекции спина определяется 3-импульсом частицы  $\mathbf{p}$ . Такие поляризационные состояния называют спиральными. Используя произвольный 4-вектор  $\eta_\mu$ , не совпадающий с 4-импульсом  $p_\mu$ , оператор спиральности можно записать в виде

$$S_3 = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_{\rho\tau\nu\mu} M^{\rho\tau} p^\nu \eta^\mu}{(\eta p)}. \quad (2.4.18)$$

Как и в случае массивной частицы, для безмассовых состояний оператор  $S_3$  служит для идентификации вектора состояния, а операторы повышения и понижения спина для фиксации фазы этого вектора.

Перейдем теперь к описанию поляризационных свойств фермионов спина  $1/2$ . Так как спин частиц фиксирован, то для однозначной идентификации спиновых состояний фермиона достаточно ограничиться уравнением Дирака (2.3.4) и соотношением

$$S_3 u_{\lambda_p}(p) = \frac{\lambda_p}{2} u_{\lambda_p}(p), \quad (\lambda_p = \pm 1) \quad (2.4.19)$$

с условием

$$[\hat{p}, S_3] = \hat{p} S_3 - S_3 \hat{p} = 0. \quad (2.4.20)$$

“Стандартное” фазовое соотношение (2.4.14) для операторов повышения и понижения спина (2.4.13) в данном случае может быть переписано в виде

$$S_{\lambda_p} u_{-\lambda_p}(p) = u_{\lambda_p}(p). \quad (2.4.21)$$

Найдем вид спиновых операторов в биспинорном пространстве, используя явный вид генераторов группы Лоренца в данном случае: (см.(1.5.3))

$$M^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\gamma^\mu \gamma^\nu - \gamma^\nu \gamma^\mu). \quad (2.4.22)$$



С помощью уравнения (1.5.16) вычислим оператор Паули-Любанского массивного фермиона спина 1/2

$$W_\alpha = \frac{\gamma_5}{2} (\gamma^\alpha \hat{p} - p^\alpha). \quad (2.4.23)$$

Тогда релятивистски ковариантное выражение для оператора проекции спина  $S_3 = (s_p W) / m_p$  с учетом того, что

$$(s_p p) = 0, \quad s_p^2 = -1 \quad (2.4.24)$$

записывается следующим образом (см., например, [15, 17, 18]):

$$S_3 = \frac{\gamma_5 \hat{s}_p \hat{p}}{2m_p}. \quad (2.4.25)$$

Легко убедиться, что полученный оператор  $S_3$  коммутирует с оператором  $\hat{p}$ .

С учетом вышеизложенного уравнение (2.4.19) принимает вид:

$$\gamma_5 \hat{s}_p u_{\lambda_p}(p) = \lambda_p u_{\lambda_p}(p), \quad (\lambda_p = -\pm 1), \quad (2.4.26)$$

где мы учли, что биспинор  $u_{\lambda_p}(p)$  удовлетворяет уравнению (2.3.4).

Аналогичное построение можно проделать и для антифермиона.

Как следует из (2.4.26), для идентификации биспинора Дирака  $u_{\lambda_p}(p)$  необходим пространственно-подобный вектор  $s_p$ . Поэтому в обозначение биспинора для массивных фермионов спина 1/2 включим 4-вектор  $s_p$  т.е. имеем запись вида  $u_{\lambda_p}(p, s_p)$ .

Рассмотрим теперь **безмассовые фермионы**. Ковариантное выражение оператора проекции спина получим с помощью соотношений (2.4.18) и (2.4.23)

$$S_3 = \frac{\gamma_5}{2} - \frac{\gamma_5 \hat{\eta} \hat{p}}{(\eta p)}. \quad (2.4.27)$$



Подставляя (2.4.27) в уравнение (2.4.19), получим, что

$$\gamma_5 u_{\lambda_p}(p) = \lambda_p u_{\lambda_p}(p), \quad (\lambda_p = \pm 1). \quad (2.4.28)$$

При этом мы учли, что

$$\hat{p} u_{\lambda_p}(p) = 0. \quad (2.4.29)$$

### 2.4.1 Выбор вектора поляризации

Сделаем несколько замечаний относительно выбора вектора поляризации  $s_p$ . Единственным ограничением являются соотношения (2.4.24), и поэтому существует свобода выбора этого вектора. Приведем несколько примеров наиболее часто используемых в физических приложениях поляризационных состояний фермионов. Для этой цели удобно выразить вектор поляризации фермиона  $s_p$  через импульс фермион

$$s_p \equiv \frac{(p \ q_p) p - m_p^2 q_p}{m_p \sqrt{(p \ q_p)^2 - m_p^2 q_p^2}}, \quad (2.4.30)$$

где  $q_p$  – некоторый произвольный вектор ( $q_p \neq \text{const} \times p$ ). Легко видеть, что  $s_p$  удовлетворяет условиям (2.4.24).

В том случае, когда

$$q_p = l_0 = (1, 0, 0, 0) \quad (2.4.31)$$

из (2.4.30) находим, что вектор поляризации имеет вид

$$s_H \equiv \frac{(p \ l_0) p - m_p^2 l_0}{m_p \sqrt{(p \ l_0)^2 - m_p^2}},$$

$$s_H^\mu = (s_0, \mathbf{s}) = \left( \frac{|\mathbf{p}|}{m_p}, \frac{\omega_{m_p}(\mathbf{p}) \mathbf{p}}{|\mathbf{p}| m_p} \right). \quad (2.4.32)$$



Это означает, что в осью проекции спина является здесь импульс частицы  $\mathbf{p}$ , т.е. мы имеем поляризационное состояние фермиона с определенной спиральностью.

В работах [19–22], предлагается использовать поляризационные состояния, для которых

$$q_p = b_1 = l_0 + l_3 . \quad (2.4.33)$$

Тогда вектор поляризации  $s_p$  примет вид

$$s_{KS} \equiv \frac{p}{m_p} - \frac{m_p b_1}{(pb_1)} . \quad (2.4.34)$$

Такие поляризационные состояния в дальнейшем мы будем называть состояниями Берендса – Давервельдта – Клейсса – Стирлинга (Berends– Daverveldt– Kleiss– Stirling) или просто  $BDKS$ -состояниями.

Если в системе покоя частицы в качестве оси проекции  $z$  выбираем некоторый пространственно-подобный вектор  $\mathbf{n}$ , то в произвольной системе отсчета, где фермион имеет 4-импульс  $p$ , вектор  $s_p$  имеет следующие компоненты (см., например, [17])

$$s_Z = (s_0, \mathbf{s}_p), \text{ где} \\ s_0 = \frac{(\mathbf{np})}{m_p}, \quad \mathbf{s}_p = \mathbf{n} + \frac{\mathbf{p} (\mathbf{pn})}{m_p (\omega_{m_p}(\mathbf{p}) + m_p)} . \quad (2.4.35)$$

Такие состояния фермионов мы будем называть  $Z$ -состояниями.

## 2.5 Проективные операторы уравнения Дирака

Для решения задач по расчету матричных элементов необходима информация о виде и структуре дираковских биспиноров  $u, v$ . Применим для решения этой задачи метод проективных операторов.



С учетом спиновых степеней свободы (см.раздел 2.4) для биспинора массивного фермиона имеем систему уравнений, которые определяют явный вид и свойства биспиноров Дирака

$$\begin{aligned}(\hat{p} - m_p) u_{\lambda_p}(p, s_p) &= 0, \\ \gamma_5 \hat{s}_p u_{\lambda_p}(p, s_p) &= \lambda_p u_{\lambda_p}(p, s_p), \quad (\lambda_p = \pm 1),\end{aligned}\quad (2.5.1)$$

К этим уравнениям добавляют условие нормировки

$$\bar{u}_{\lambda'_p}(p, s_p) u_{\lambda_p}(p, s_p) = 2\delta_{\lambda'_p, \lambda_p} m_p. \quad (2.5.2)$$

Для массивного антифермиона уравнения (2.5.1) принимают вид

$$\begin{aligned}(\hat{p} + m_p) v_{\lambda_p}(p, s_p) &= 0, \\ \gamma_5 \hat{s}_p v_{\lambda_p}(p, s_p) &= \lambda_p v_{\lambda_p}(p, s_p)\end{aligned}\quad (2.5.3)$$

с аналогичным условием нормировки

$$\bar{v}_{\lambda'_p}(p, s_p) v_{\lambda_p}(p, s_p) = -2\delta_{\lambda'_p, \lambda_p} m_p. \quad (2.5.4)$$

Условия нормировки (2.5.2) и (2.5.4) могут быть записаны в виде соотношений

$$\bar{u}_{\lambda'_p}(p, s_p) \gamma^\mu u_{\lambda_p}(p, s_p) = 2\delta_{\lambda'_p, \lambda_p} p^\mu, \quad (2.5.5)$$

$$\bar{v}_{\lambda'_p}(p, s_p) \gamma^\mu v_{\lambda_p}(p, s_p) = 2\delta_{\lambda'_p, \lambda_p} p^\mu. \quad (2.5.6)$$

Для безмассовых фермионов уравнения, определяющие дираковский спинор записываются в виде

$$\begin{aligned}\hat{p} u_{\lambda_p}(p) &= 0, \quad \hat{p} v_{\lambda_p}(p) = 0, \\ \gamma_5 u_{\lambda_p}(p) &= \lambda_p u_{\lambda_p}(p), \\ \gamma_5 v_{\lambda_p}(p) &= -\lambda_p v_{\lambda_p}(p)\end{aligned}\quad (2.5.7)$$

Условия нормировки (2.5.2) и (2.5.4) для частиц с нулевой массой покоя неприемлемы, и поэтому в этом случае используем нормировку в виде (2.5.5) и (2.5.6).



С помощью уравнений (2.5.1) построим проективную матрицу-диаду для биспинора  $u_{\lambda_p}(p, s_p)$ :

$$\tau_{\lambda_p}^{+1}(p, s_p) = \frac{1}{2}(\hat{p} + m_p)(I + \lambda_p \gamma_5 \hat{s}_p). \quad (2.5.8)$$

Аналогичная проективная матрица-диада для биспинора массивного антифермиона  $v_{\lambda_p}(p, s_p)$  с использованием (2.5.3) запишется в виде

$$\tau_{\lambda_p}^{-1}(p, s_p) = \frac{1}{2}(\hat{p} - m_p)(I + \lambda_p \gamma_5 \hat{s}_p). \quad (2.5.9)$$

Введем вспомогательный биспинор

$$w_{\lambda}^A(p, s_p) \equiv \begin{cases} u_{\lambda}(p, s_p), & \text{если } A = 1, \\ v_{\lambda}(p, s_p), & \text{если } A = -1. \end{cases} \quad (2.5.10)$$

Проективные операторы фермионов и антифермионов также обобщим в один оператор

$$\tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \equiv \frac{1}{2}(\hat{p} + A m_p)(I + \lambda_p \gamma_5 \hat{s}_p), \quad (2.5.11)$$

который обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \tau_{\lambda'_p}^B(p, s_p) &= \\ &= 2 A m_p \delta_{A,B} \delta_{\lambda_p, \lambda'_p} \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p), \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

$$\sum_{\lambda_p=-1}^1 \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) = (\hat{p} + A m_p) \stackrel{\text{def}}{=} \Lambda_A(p), \quad (2.5.13)$$

$$\sum_{\lambda_p, A=-1}^1 A \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) / (2m_p) = I, \quad (2.5.14)$$

$$\bar{\tau}_{\lambda_p}^A(p, s_p) = \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p), \quad (2.5.15)$$

$$\gamma^5 \tau_{\lambda_p}^A = -\tau_{-\lambda_p}^{-A}(p, s_p) \gamma^5. \quad (2.5.16)$$



Полезным соотношением для проективных операторов является формула

$$\begin{aligned} & \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) Z \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) = \\ & = \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \text{Tr} \left( Z \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right) , \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

где  $Z$  – произвольная  $4 \times 4$  матрица. Доказательство этого соотношения можно получить путем разложения данной матрицы  $Z$  по полному набору  $\gamma$ -матриц.

С помощью (2.5.8)-(2.5.11) получим, что решение уравнений (2.5.1) и (2.5.3) для массивных фермионов и антифермионов можно записать в следующей форме

$$w_{\lambda_p}^A(p, s_p) = N \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \Phi_{\lambda_p}^A , \quad (2.5.18)$$

где  $\Phi_{\lambda_p}^A$  некоторый произвольный биспинор. Условия нормировки биспиноров Дирака

$$\bar{w}_{\lambda'}^A(p, s_p) w_{\lambda}^A(p, s_p) = 2A m_p \delta_{\lambda' \lambda} \quad (2.5.19)$$

приводят к соотношению

$$|N|^2 \bar{\Phi}_{\lambda_p}^A \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \Phi_{\lambda_p}^A = 1 . \quad (2.5.20)$$

Тогда с точностью до фазового множителя получим, что структура спиноров Дирака определяется соотношением

$$w_{\lambda_p}^A(p, s_p) = \frac{\tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \Phi_{\lambda_p}^A}{\sqrt{\text{Tr} \left( \left\{ \Phi_{\lambda_p}^A \cdot \bar{\Phi}_{\lambda_p}^A \right\} \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right)}} . \quad (2.5.21)$$

Как следует из приведенного построения дираковского спинора, произвольный биспинор  $\Phi_{\lambda_p}^A$ , ограничен требованием

$$\text{Tr} \left( \left\{ \Phi_{\lambda_p}^A \cdot \bar{\Phi}_{\lambda_p}^A \right\} \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right) \neq 0 , \quad (2.5.22)$$



а также то, что комбинация

$$\bar{\Phi}_{\lambda_p}^A \tau_{\lambda_p}^A (p, s_p) \Phi_{\lambda_p}^A \quad (2.5.23)$$

является вещественным числом. В частных случаях биспинор  $\Phi_{\lambda_p}^A$  может и не зависеть от спинового индекса  $\lambda_p$  и числа  $A$ .

## 2.6 Спиноры Дирака и базисные спиноры

Дираковский спинор  $w_{\lambda}^A (p, s_p)$  массивного фермиона ( $A = 1$ ) и антифермиона ( $A = -1$ ) с 4-импульсом  $p$  и произвольным вектором поляризации  $s_p$  может быть построен с помощью проективных операторов спина  $1/2$  (о свойствах этих операторов см. [15, 23])

$$\begin{aligned} w_{\lambda}^A (p, s_p) &= \frac{(A\lambda)}{\sqrt{(b_1 \cdot (p + m_p s_p))}} \tau_{\lambda}^A (p) u_{-A \times \lambda} (b_1) = \\ &= (A\lambda) \frac{(\hat{p} + Am_p)(1 + \lambda \gamma_5 \hat{s}_p)}{2\sqrt{(b_1 \cdot (p + m_p s_p))}} u_{-A \times \lambda} (b_1) . \end{aligned} \quad (2.6.1)$$

Нетрудно убедиться, что биспиноры  $u_{\lambda} (p, s_p)$  и  $v_{\lambda} (p, s_p)$ , определяемые (2.6.1), удовлетворяют соответствующим уравнениям Дирака и соотношениям, следующих из спиновых свойств

$$\begin{aligned} \hat{p} u_{\lambda} (p, s_p) &= m_p u_{\lambda} (p, s_p), \quad \hat{p} v_{\lambda} (p, s_p) = -m_p v_{\lambda} (p, s_p), \\ \gamma_5 \hat{s}_p u_{\lambda} (p, s_p) &= \lambda u_{\lambda} (p, s_p), \quad \gamma_5 \hat{s}_p v_{\lambda} (p, s_p) = \lambda v_{\lambda} (p, s_p) . \end{aligned} \quad (2.6.2)$$

Дираковские спиноры фермиона и антифермиона связаны между собой уравнениями

$$v_{\lambda} (p, s_p) = -\lambda \gamma_5 u_{-\lambda} (p, s_p), \quad \bar{v}_{\lambda} (p, s_p) = \bar{u}_{-\lambda} (p, s_p) \lambda \gamma_5 . \quad (2.6.3)$$

Безусловно, определение спиноров Дирака посредством (2.6.1) имеет фазовый произвол, связанный с вычислением нормировочного множителя. В нашем случае фазовый множитель  $(A\lambda)$  выбран



таким образом, что явный вид дираковских спиноров при выборе представления  $\gamma$ -матриц совпадал с известными классическими формулами в литературе [24]

## 2.7 Явный вид базисных спиноров

Из соотношений (2.1.1)–(2.1.5), которые определяют базисные спиноры, следует, что их явный вид будет зависеть от представления  $\gamma$ -матриц.

Выберем векторы изотропной тетрады (1.3.5) в виде числовых векторов

$$(b_{\pm 1})_{\mu} = \frac{1}{2} \{1, 0, 0, \pm 1\} , \quad (n_{\pm 1})_{\mu} = \frac{1}{2} \{0, \pm 1, i, 0\} . \quad (2.7.1)$$

В этом случае система уравнений (2.1.4) и (2.1.6)–(2.1.8) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (\gamma^0 + \rho \gamma^3) u_{\lambda} (b_{-\rho}) &= u_{-\lambda} (b_{\rho}) , \\ \frac{1}{2} (I + \lambda \gamma^5) u_{\lambda} (b_A) &= u_{\lambda} (b_A) , \\ \frac{1}{2} (A \lambda \gamma^1 + i \gamma^2) u_{\lambda} (b_A) &= (-A) u_{-\lambda} (b_A) , \\ u_{\lambda} (b_A) \bar{u}_{\lambda} (b_A) &= \frac{1}{4} (I + \lambda \gamma^5) (\gamma^0 + A \gamma^3) . \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Тогда решением системы уравнений (2.7.2) для представления Дирака–Паули будут базисные спиноры

$$u_{\lambda}^D (b_A) = \frac{(-A)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \lambda \varphi_{-A\lambda} \\ \varphi_{-A\lambda} \end{pmatrix} , \quad (2.7.3)$$

где

$$\varphi_{+1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \varphi_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} . \quad (2.7.4)$$



Используя, то что киральное (Вейля) и Дирака-Паули представления связаны между собой посредством унитарного преобразования, определяемого матрицей  $U_C$

$$\gamma_C^\mu = U_C \gamma_D^\mu U_C^\dagger \quad \text{с матрицей} \quad U_C = \frac{1}{\sqrt{2}} (\gamma_D^0 + \gamma_D^5) \quad (2.7.5)$$

можно найти явный вид базисных спиноров и представления Вейля:

$$u_\lambda^C(b_A) = A \begin{pmatrix} -\delta_{\lambda,1} \varphi_{-A} \\ \delta_{\lambda,-1} \varphi_A \end{pmatrix}. \quad (2.7.6)$$

## 2.8 Вывод некоторых формул с помощью явного вида

Как уже отмечали, что множители в определении (2.6.1) подобраны таким образом, что при использовании определенного вида векторов поляризации  $s_p$  и представления  $\gamma$ -матриц, получались известные классические выражения решения уравнения Дирака. Так для  $Z$ -состояний в представлении Дирака-Паули с помощью (2.6.1) и (2.7.3) получим

$$\begin{aligned} u_\lambda(p, s_Z) &= \sqrt{\omega_m(p) + m} \begin{pmatrix} \varphi_\lambda \\ \frac{(\sigma \mathbf{p})}{\omega_m(p) + m} \varphi_\lambda \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_m(p) + m} \varphi_\lambda \\ \sqrt{\omega_m(p) - m} (\sigma \hat{\mathbf{p}}) \varphi_\lambda \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8.1)$$

$$\begin{aligned} v_\lambda(p, s_Z) &= (-\lambda) \sqrt{\omega_m(p) + m} \begin{pmatrix} \frac{(\sigma \mathbf{p})}{\omega_m(p) + m} \varphi_{-\lambda} \\ \varphi_{-\lambda} \end{pmatrix} = \\ &= (-\lambda) \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_m(p) - m} (\sigma \hat{\mathbf{p}}) \varphi_{-\lambda} \\ \sqrt{\omega_m(p) + m} \varphi_{-\lambda} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.8.2)$$

Соответственно, для спиральных состояний имеем

$$u_\lambda(p, s_H) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_m(p) + m} \chi_\lambda(\theta_p, \phi_p) \\ \lambda \sqrt{\omega_m(p) - m} \chi_\lambda(\theta_p, \phi_p) \end{pmatrix}, \quad (2.8.3)$$

$$v_\lambda(p, s_H) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_m(p) - m} \chi_{-\lambda}(\theta_p, \phi_p) \\ (-\lambda) \sqrt{\omega_m(p) + m} \chi_{-\lambda}(\theta_p, \phi_p) \end{pmatrix}, \quad (2.8.4)$$

где  $\chi_\lambda(\theta, \phi)$  – спиральные спиноры, удовлетворяющие уравнению

$$(\sigma \hat{\mathbf{p}}) \chi_\lambda(\theta_p, \phi_p) = \lambda \chi_\lambda(\theta_p, \phi_p) \quad (2.8.5)$$

а единичный вектор  $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p} / |\mathbf{p}| = \{\sin \theta_p \cos \phi_p, \sin \theta_p \sin \phi_p, \cos \theta_p\}$ .

Формулы (2.8.3) и (2.8.4) можно переписать в  $w_\lambda^A(p, s_p)$

$$w_\lambda^D(p, s_H) = \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_m(p) + Dm} \chi_{D \times \lambda}(\theta_p, \phi_p) \\ D \lambda \sqrt{\omega_m(p) - Dm} \chi_{D \times \lambda}(\theta_p, \phi_p) \end{pmatrix}, \quad (2.8.6)$$

Поскольку спиральные спиноры и (2.7.4) связаны соотношением

$$\chi_\lambda(\theta_p, \phi_p) = \sum_{\tau=-1}^1 \varphi_\tau D_{m/2, \lambda/2}^{1/2}(\phi_p, \theta_p, -\phi_p), \quad (2.8.7)$$

то (2.8.6) представимо в виде:

$$w_\lambda^D(p, s_H) = \sum_{\tau=-1}^1 \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_m(p) + Dm} \varphi_\tau \\ D \lambda \sqrt{\omega_m(p) - Dm} \varphi_\tau \end{pmatrix} D_{\tau/2, D\lambda/2}^{1/2}(\phi_p, \theta_p, -\phi_p). \quad (2.8.8)$$

### 2.8.1 Коэффициенты разложения спиральных биспиноров по базисным

Найдем коэффициенты разложения спиральных биспиноров по базисным:

$$s_{\rho, \lambda}^{(A, D)}(p, s_H) = \bar{u}_\rho(b_A) w_\lambda^D(p, s_H). \quad (2.8.9)$$



Используя (2.7.3) и (2.8.9) и ортогональность спиноров (2.7.4) получим

$$\begin{aligned}
 s_{\rho,\lambda}^{(A,D)}(p, s_H) &= \sum_{\tau=-1}^1 \frac{(-A)}{\sqrt{2}} \left( \rho \varphi_{-A\rho}^\dagger, \varphi_{-A\rho}^\dagger \right) \\
 &\left( \begin{array}{c} \sqrt{\omega_m(p) + Dm} \varphi_\tau \\ -D\lambda \sqrt{\omega_m(p) - Dm} \varphi_\tau \end{array} \right) D_{\tau/2, D\lambda/2}^{1/2}(\phi_p, \theta_p, -\phi_p) = \\
 &= \frac{(-A)}{\sqrt{2}} \left[ \rho \sqrt{\omega_m(p) + Dm} - D\lambda \sqrt{\omega_m(p) - Dm} \right] \times \\
 &\times D_{-A\rho/2, D\lambda/2}^{1/2}(\phi_p, \theta_p, -\phi_p) \quad (2.8.10)
 \end{aligned}$$

Дальнейшее преобразование (2.8.10) проведем с помощью тождества

$$\sqrt{\omega_m(p) + m} \pm \sqrt{\omega_m(p) - m} = \sqrt{2} \sqrt{\omega_m(p) \pm p}. \quad (2.8.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \rho \sqrt{\omega_m(p) + Dm} - D\lambda \sqrt{\omega_m(p) - Dm} \right] = \\
 &= \rho f(\rho\lambda, D) \sqrt{\omega_m(p) + (D\lambda\rho)p}, \quad (2.8.12)
 \end{aligned}$$

где

$$f(A, D) = \delta_{A,-1} + D \delta_{A,1}. \quad (2.8.13)$$

В частности,  $f(A, 1) = 1$ .

Свойство  $D$ -матриц индекса  $1/2$

$$\rho\lambda D_{\rho/2, \lambda/2}^{1/2}(\phi, \theta, -\phi) = D_{-\rho/2, -\lambda/2}^{*1/2}(\phi, \theta, -\phi) \quad (2.8.14)$$

позволяет записать коэффициенты разложения массивного фермиона и антифермиона по базисным спинорам в виде

$$\begin{aligned}
 s_{\rho,\lambda}^{(A,D)}(p, s_H) &= (D\lambda) f(\rho\lambda, D) \times \\
 &\times \sqrt{\omega_m(p) - (D\lambda\rho)p} D_{A\rho/2, -D\lambda/2}^{*1/2}(\phi, \theta, -\phi). \quad (2.8.15)
 \end{aligned}$$



Для безмассовых фермионов с помощью соотношения

$$\lim_{m \rightarrow 0} \sqrt{\omega_m(p) + (\lambda\rho)p} = \sqrt{2\rho} \delta_{\rho, -\lambda} \quad (2.8.16)$$

получим

$$s_{\rho, \lambda}^{(A, D=1)}(p) = \lambda \sqrt{2\rho} \delta_{\rho, -\lambda} D_{A\rho/2, -\lambda/2}^{*1/2}(\phi, \theta, -\phi) . \quad (2.8.17)$$

Для безмассового антифермиона коэффициенты разложения находятся из (2.8.17) с учетом того, что

$$v_{\lambda}(p) = u_{-\lambda}(p) .$$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ



## Раздел 3

# Основы СМ и правила Фейнмана

### 3.1 Дифференциальное сечение и ширина распада

*Тема 3. Дифференциальное сечение и ширина распада. Эффективное сечение реакции взаимодействия. Кинематика бинарных процессов. Системы отсчета. Постановка эксперимента в ФЭЧ.*

*Тема 4. Элементы Стандартной Модели Матрица рассеяния и наблюдаемые величин в квантовой теории поля. Элементы теории электрослабого и сильного взаимодействия.*

#### 3.1.1 Эффективное сечение реакции взаимодействия

Одним из важнейших вопросов любой теории или модели, является возможность экспериментальной проверки полученных результатов. В физике элементарных частиц такая проверка возможна при исследовании процессов взаимодействия частиц с другом, которые схематически записываются в виде:

- $1 + 2 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$  — реакция столкновения двух частиц (1 и 2) с образованием вторичных частиц  $1'$ ,  $2'$  и  $\dots n'$ .
- $1 \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$  — реакция распада частицы 1 с образованием частиц  $1'$ ,  $2'$  и  $\dots n'$ .



В экспериментах ФЭЧ по измерению характеристик вторичных частиц (энергия, импульс, поляризация, качественный состав и др.) извлекают значения эффективного сечения данной реакции (дифференциальное или полное).

Рассмотрим каким образом связано сечение с характеристиками вторичных частиц на примере взаимодействия пучка частиц и мишенью. Пусть пучок частиц с плотностью  $n_1$  и скоростью  $v_2$  сталкивается с мишенью объема  $dV$  и плотностью  $n_2$  в поперечном сечении  $dS$  (см. рисунок 3.1).

Тогда количество частиц  $i$ -того сорта  $dN_i$ , родившихся в результате взаимодействия частиц пучка и мишени с энергией в промежутке  $[E, E + dE]$  и двигающихся в телесном угле  $d\Omega = \sin \theta d\theta d\phi$  будет определяться соотношением

$$dN_i = (n_1 v_1 dt) (n_2 dV) d\sigma_i, \quad (3.1.1)$$

где  $(n_2 dV)$  – число частиц в объеме  $dV$ , а  $(n_1 v_1 dt)$  – число частиц пучка 1, прошедших через поперечное сечение  $dS$  за время  $dt$ .

### Определение 3.1

Множитель  $d\sigma_i$  в (3.1.1) называют дифференциальным сечением реакции рождения частиц  $i$ -того сорта с энергией в промежутке  $[E, E + dE]$  и направлением движения, определяемым углом  $d\Omega$  в результате взаимодействия пучка 1 и мишени 2.

Можно положить в самом общем случае

$$d\sigma = \sigma(E, \theta, \phi) dE d\Omega \quad (3.1.2)$$

или

$$\sigma(E, \theta, \phi) = \frac{d\sigma}{dE d\Omega} \quad (3.1.3)$$



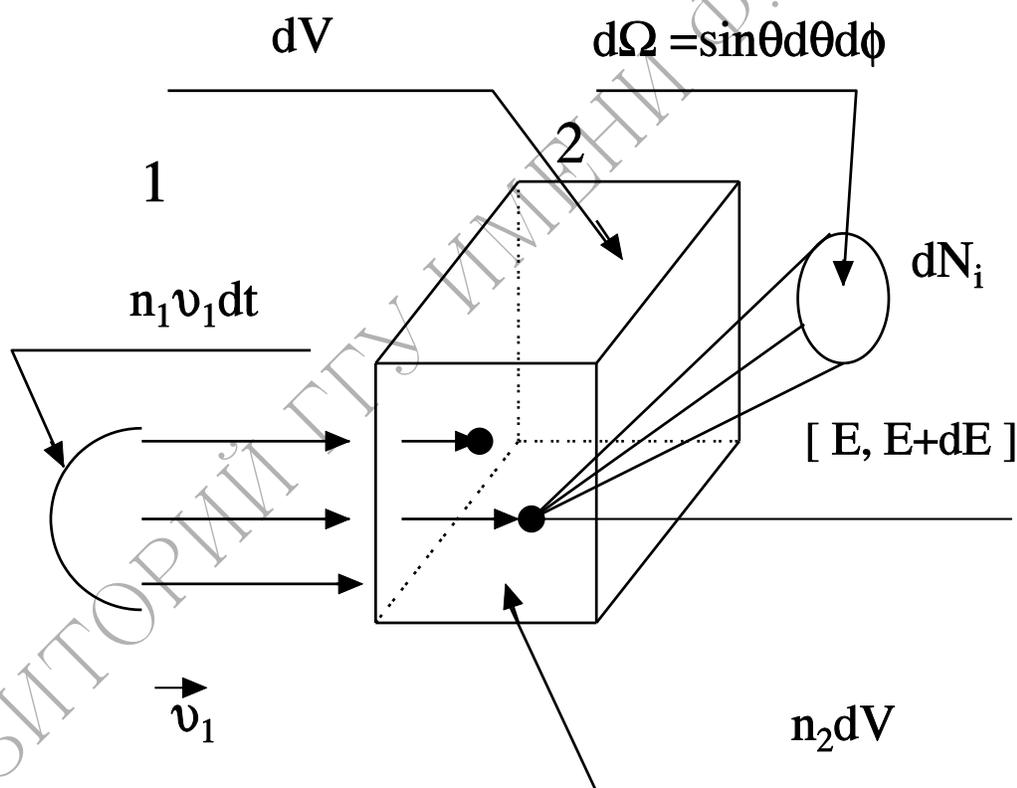
Если проинтегрировать по одной из переменных  $E, \theta, \phi$  можно получить одно из дифференциальных сечений. Например  $\sigma(\theta, \phi)$ ,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sigma(\theta, \phi) = \int \frac{d\sigma}{dE d\Omega} dE \quad (3.1.4)$$

является *угловым дифференциальным сечением*. А сечение  $\sigma$

$$\sigma = \int \int_{4\pi} \frac{d\sigma}{dE d\Omega} dE d\Omega \quad (3.1.5)$$

называется *эффективным (полным) сечением*.



$$dN_i = (n_2 dV)(n_1 v_1 dt) d\sigma_i$$

Рисунок 3.1– Столкновение пучка с мишенью

Сумма эффективных сечений всевозможных процессов, которые осуществляются путем взаимодействия частиц 1 и 2 называют



полным сечением:

$$\sigma_{total} = \sum_i \sigma_i . \quad (3.1.6)$$

Тогда относительная вероятность  $w_j$  рождения частиц рождения частиц  $j$ -того сорта в результате взаимодействия частиц 1 и частиц 2 является отношением:

$$w_j = \frac{\sigma_j}{\sigma_{total}} . \quad (3.1.7)$$

Как видно из примера (3.1.7) сечение связано с вероятностью того или процесса взаимодействия

Единицей сечения в системе СИ являются  $\text{м}^2$ . Однако для реакций взаимодействия  $\text{м}^2$  является очень большой единицей и поэтому используют единицу *барн* –  $1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ м}^2$  и ее производные – фемтобарны, пикобарны и т.д.

### 3.1.2 Кинематика бинарных процессов

Остановимся кратко на процессах взаимодействия частиц с точки зрения релятивистской кинематики. В результате столкновения частиц могут рождаться новые частицы. Их количество и состав определяются законами сохранения и динамикой взаимодействий. Как следует из экспериментальной постановки проблемы по изучению этих процессов основной задачей является получение информации об энергиях, импульсах (углов вылета) образовавшихся частиц в какой-либо системе отсчета [14,25,26]. Законы сохранения энергии и импульса могут существенно влиять на возможные “конфигурации” 4-импульсов частиц вторичных частиц в пространстве Минковского. Поэтому основной задачей стоящей перед кинематикой является анализ следствий (ограничений) вытекающих из закона сохранения 4-импульса для элементарных процессов.



Безусловно на протекание реакций взаимодействия играют и другие законы сохранения, такие как закон сохранения углового момента, зарядовые законы сохранения и законы, связанные с дискретными симметриями квантовых систем частиц (например,  $C$ ,  $P$  и  $T$ - четности).

Реакции взаимодействия частиц изучают в различных системах отсчета и требование релятивистской инвариантности т.е. независимости от выбора инерциальной системы отсчета играет здесь первостепенную роль. В данном параграфе рассмотрим некоторые элементы кинематики на примере двухчастичного столкновения, которые будут необходимы при вычисления амплитуд процессов взаимодействия.

Пусть в двухчастичном процессе соударения сталкиваются две частицы  $A$  и  $B$  с 4-импульсами  $p_A = (E_A, \mathbf{p}_A)$  и  $p_B = (E_B, \mathbf{p}_B)$  соответственно. Для каждой из них выполняется соотношение Эйнштейна, связывающее трехмерный импульс, массу покоя и полную энергию частицы (см. (1.2.12)):

$$\begin{aligned} E_A^2 &= \mathbf{p}_A^2 + m_A^2, \\ E_B^2 &= \mathbf{p}_B^2 + m_B^2. \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Значения компонент 4-векторов  $p_A$  и  $p_B$  обычно фиксируются условиями эксперимента в пределах ошибок измерения.

Наиболее простой случай столкновения – это бинарные реакции т.е. когда в конечном состоянии образуется две частицы. Обозначим вторичные частицы как  $C$  и  $D$ . Тогда схематически бинарная реакция запишется в виде:

$$\begin{aligned} A (E_A, \mathbf{p}_A, m_A) + B (E_B, \mathbf{p}_B, m_B) &\rightarrow \\ \rightarrow C (E_C, \mathbf{k}_C, m_C) + D (E_D, \mathbf{k}_D, m_D). \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

В скобках указана полная энергия, импульс и масса покоя частицы.



Для анализа и расчетов характеристик реакций с точки зрения релятивистской инвариантности очень удобно использовать инварианты преобразований Лоренца. Поскольку скалярные произведения 4-векторов являются такими инвариантами, то для бинарных реакций имеется набор произведений:  $(p_A p_B)$ ,  $(p_A k_C)$ ,  $(p_A k_D)$ . В силу закона сохранения энергии-импульса

$$p + p_B = k_C + k_D \quad (3.1.10)$$

и того, что для каждой из частиц  $p_{A,B}^2 = m_{A,B}^2$ ,  $k_{C,D}^2 = m_{C,D}^2$ , только две из трех переменных независимы. Обычно используют не сами скалярные произведения, а связанные с ними переменные Мандельштама

$$\begin{aligned} s &= (p_A + p_B)^2, \\ t &= (p_A - k_C)^2, \\ u &= (p_A - k_D)^2. \end{aligned} \quad (3.1.11)$$

из которых вследствие соотношения  $s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2$  только две линейно независимы.

### Упражнение 1.

Покажите, что

$$s + t + u = m_A^2 + m_B^2 + m_C^2 + m_D^2. \quad (3.1.12)$$

### 3.1.3 Системы отсчета

Система отсчета определяется требованиями, чтобы  $\mathbf{p}_A$  или  $\mathbf{p}_B$  имело то или иное значение. Выбор системы отсчета продиктован либо условиями эксперимента или удобствами при теоретическом описании процессов взаимодействия. Для расчетов чаще всего употребляются:



1. **Лабораторная система отсчета** (СМ) – система, в которой (см. рисунок 3.2)

$$\mathbf{p}_B = 0. \quad (3.1.13)$$

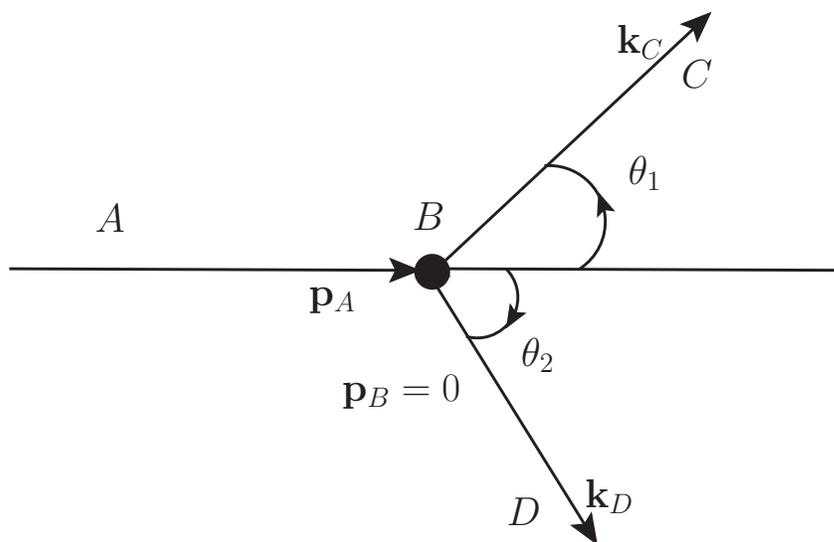


Рисунок 3.2– Бинарная реакция в лабораторной системе отсчета

2. **Система центра инерции** (СЦИ) – система, в которой (см. рисунок 3.3)

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = 0 \quad (3.1.14)$$

Могут использоваться и другие системы отсчета, такие как антилабораторная система отсчета ( $\mathbf{p}_A = 0$ ), система Брейта (“стенка”), система пучка (см. [14]).

Рассмотрим основные кинематические соотношения для бинарных реакций, которые следуют из закона сохранения 4-импульса. Наиболее просто выглядит кинематика в СЦИ, поскольку здесь отсутствует связь между углом вылета  $\theta$  (см. рисунок 3.3) и энергией  $E_C$ .

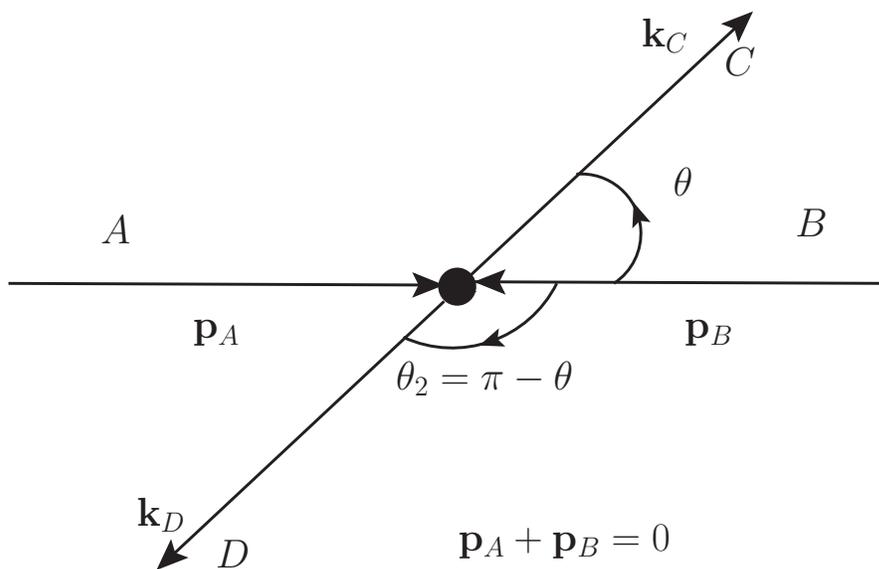


Рисунок 3.3– Бинарная реакция в системе центра инерции

Из законов сохранения энергии и импульса

$$E_A + E_B = E_C + E_D . \quad (3.1.15)$$

$$\mathbf{p}_A + \mathbf{p}_B = 0 = \mathbf{k}_C + \mathbf{k}_D , \quad (3.1.16)$$

легко найти, что

$$s = (p_A + p_B)^2 = (E_A + E_B)^2 = (E_C + E_D)^2 . \quad (3.1.17)$$

Используя уравнения (3.1.16), (3.1.17) несложно найти, что энергии вторичных частиц определяются соотношениями

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{s + m_C^2 - m_D^2}{2\sqrt{s}} , \\ E_D &= \frac{s + m_D^2 - m_C^2}{2\sqrt{s}} . \end{aligned} \quad (3.1.18)$$

Отметим, что выражения (3.1.18) сразу связывают инвариантные переменные  $E_C$  и  $E_D$  с инвариантом преобразования Лоренца  $s$ . Также можно найти, что

$$|\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2)}{2\sqrt{s}} \quad (3.1.19)$$



и

$$|\mathbf{k}_C| = |\mathbf{k}_D| = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_C^2, m_D^2)}{2\sqrt{s}}, \quad (3.1.20)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda(a, b, c) &= (a - b - c)^2 - 4bc = \\ &= \left( a - [\sqrt{b} + \sqrt{c}]^2 \right) \left( a - [\sqrt{b} - \sqrt{c}]^2 \right). \end{aligned} \quad (3.1.21)$$

Используя (3.1.11), (3.1.12), а также соотношения (3.1.18), (3.1.20) и (3.1.21) находим, выражение угла вылета через мандельштамовские переменные  $s, t$  и  $u$ :

$$\cos \theta = \frac{s(t - u) - (m_A^2 - m_B^2)(m_C^2 - m_D^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2) \lambda^{1/2}(s, m_C^2, m_D^2)} \quad (3.1.22)$$

Кинематика в лабораторной системе отсчета (ЛС) более сложна, поскольку здесь присутствует связь между углом вылета и энергией вторичных частиц. Действительно из закона сохранения импульса

$$\mathbf{p}_A = \mathbf{k}_C + \mathbf{k}_D, \quad (3.1.23)$$

путем возведения в квадрат обеих частей и учитывая, что  $\mathbf{p}^2 = E^2 - m^2$  получаем:

$$\cos \theta_{12} = \frac{E_A^2 - E_C^2 - E_D^2 - m_A^2 + m_C^2 + m_D^2}{2\sqrt{(E_C^2 - m_C^2)(E_D^2 - m_D^2)}} \quad (3.1.24)$$

где  $\theta_{12} = \theta_1 + \theta_2$  - угол между частицами с импульсами  $\mathbf{k}_C$  и  $\mathbf{k}_D$ .

С помощью вышеизложенного способа несложно рассчитать углы  $\theta_{1,2}$ . И после аналогичных преобразований получим:

$$\cos \theta_1 = \frac{E_A^2 + E_C^2 - E_D^2 - m_A^2 - m_C^2 + m_D^2}{2\sqrt{(E_A^2 - m_A^2)(E_C^2 - m_C^2)}} \quad (3.1.25)$$



Как следует из соотношения (3.1.24), углы разлета вторичных частиц в лабораторной системе отсчета полностью определяются массами покоя частиц реакции и энергией одной из вторичных частиц и начальными частиц вследствие закона сохранения энергии в ЛС

$$E_A + m_B = E_C + E_D . \quad (3.1.26)$$

Не составляет усилий найти связь между переменными Мандельстама (3.1.11) не инвариантными переменными  $\cos \theta_1, E_A, E_C, E_D$  и т.д.

### Лаб. занятие 2.

Покажите с использованием системы аналитических вычислений, что в лабораторной системе связь между не инвариантными и переменными Мандельстама задается уравнениями:

$$E_A = \frac{s - m_A^2 - m_B^2}{2m_B}, \quad p_A = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2)}{2m_B}, \quad (3.1.27)$$

$$E_C = \frac{m_B^2 + m_C^2 - u}{2m_B}, \quad p_C = \frac{\lambda^{1/2}(u, m_B^2, m_C^2)}{2m_B}, \quad (3.1.28)$$

$$\cos \theta_1 = \frac{(s - m_A^2 - m_B^2)(m_B^2 + m_C^2 - u) + 2m_B^2(t - m_B^2 - m_C^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2) \lambda^{1/2}(u, m_B^2, m_C^2)}. \quad (3.1.29)$$

## 3.2 Постановка эксперимента в ФЭЧ

Типичная постановка эксперимента в ФЭЧ выглядит следующим образом. Предполагается что частицы  $A$  и  $B$  в начальном при  $t = -\infty$  практически свободные т.е. не взаимодействуют с другом другом. Далее частицы взаимодействуют между собой и при  $t = \infty$  расходятся и снова становятся свободными (см. рисунок 3.4). Задача с точки зрения теории может быть сформулиро-

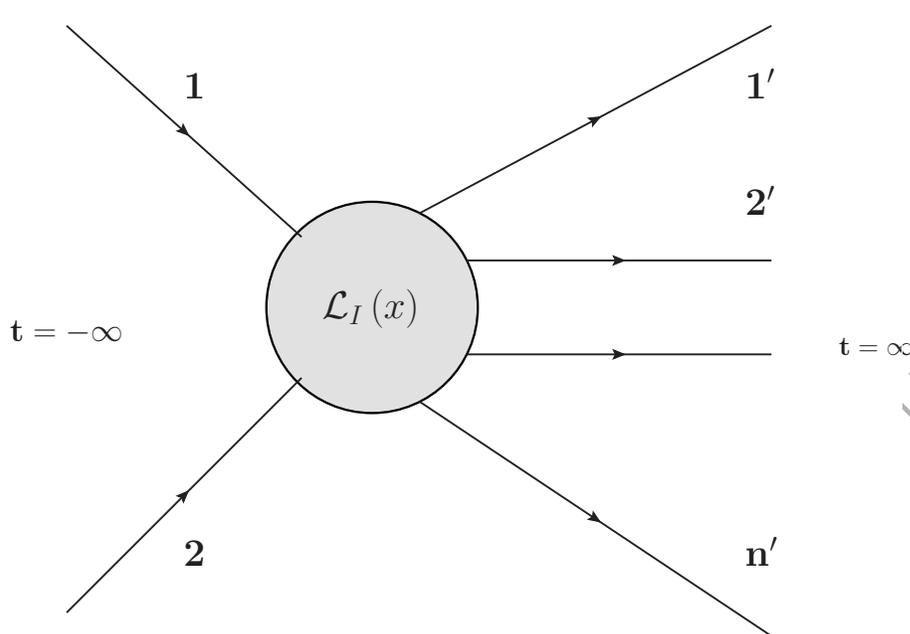


Рисунок 3.4— Иллюстрация к постановке эксперимента в ФЭЧ

вана так: Необходимо вычислить по известным характеристикам начальных частиц (энергия, импульс, поляризация и др.) вероятность возникновения конечных частиц определенного сорта и характеристиками при заданном взаимодействии. Далее связать полученную вероятность с эффективным дифференциальным сечением, которое может быть измерено.

Первая часть задачи решается при помощи оператора  $S$ , связывающий вектор начального состояния  $\Phi_i$  и вектор конечного состояния  $\Phi_f$  системы частиц

$$\Phi_f = S\Phi_i . \quad (3.2.1)$$

Оператор  $S$ , называется матрицей рассеяния и может быть определен совокупностью матричных элементов

$$S_{fi} = \langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) \mathcal{M}_{fi} , \quad (3.2.2)$$

где

$$P_i = \sum_{k=1}^2 p_k , \quad P_f = \sum_{j=1}^{n'} k_j . \quad (3.2.3)$$



Единичная матрица  $\delta_{fi}$  соответствует отсутствию взаимодействия между частицами, а дельта-функция  $\delta^4(P_i - P_f)$  отражает закон сохранения энергии и импульса (4-импульса). Величину  $\mathcal{M}_{fi}$  называют амплитудой взаимодействия для соответствующего процесса. Как следует из построения, амплитуды вероятности различных процессов рассеяния определяются элементами матрицы рассеяния, связывающими соответствующие начальные и конечные состояния.

Определить элементы матрицы  $S_{fi}$  в рамках теории или модели (квантовая электродинамика, Стандартная Модель, квантовая хромодинамика) можно, если известен лагранжиан взаимодействия  $\mathcal{L}_I(x)$  или гамильтониан  $\mathcal{H}_I(x) = -\mathcal{L}_I(x)$  используя соотношение

$$S = T \left\{ \exp \left( i \int \mathcal{L}_I(x) dx \right) \right\}, \quad (3.2.4)$$

где символ  $T$  обозначает хронологическое произведение операторов

$$T \{ \mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y) \} = \begin{cases} \mathcal{L}_I(x) \mathcal{L}_I(y), & \text{если } x_0 > y_0 \\ \mathcal{L}_I(y) \mathcal{L}_I(x), & \text{если } x_0 < y_0 \end{cases}. \quad (3.2.5)$$

Выражение может быть представлено в виде ряда (ряд Дайсона)(см., например, [17])

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad (3.2.6)$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{n!} \int T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (3.2.7)$$

Следующий шаг состоит в нахождении связи между амплитудой вероятности процесса и дифференциальным эффективным сечением.



Вероятность перехода из начального состояния в конечное  $w_{i \rightarrow f}$ , как следует из (3.2.2) определяется амплитудой вероятности:

$$w_{i \rightarrow f} \sim (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P_i - P_f) |\mathcal{M}_{fi}|^2 . \quad (3.2.8)$$

Дифференциальное эффективное сечением рассеяние  $d\sigma$  определяется соотношением:

$$d\sigma = \frac{dw_{i \rightarrow f}}{j} , \quad (3.2.9)$$

где  $dw_{i \rightarrow f}$  – вероятность процесса в единицу времени (дифференциальная вероятность рассеяния);  $j$  – плотность потока сталкивающихся частиц. Конечным итогом данной процедуры для реакции  $A + B \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$  в случае коллинеарного столкновения частиц  $A$  и  $B$  является выражение

$$d\sigma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - P_f)}{4\sqrt{(p_A p_B)^2 - m_A^2 m_B^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ , \quad (3.2.10)$$

где

$$dQ = \prod_{f=1}^n \frac{d^3 k_f}{(2\pi)^3 (2E_f)} . \quad (3.2.11)$$

В случае реакции распада  $A \rightarrow 1' + 2' + \dots + n'$  дифференциальная скорость распада

$$d\Gamma = \frac{(2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A - P_f)}{2E_A} |\mathcal{M}_{fi}|^2 dQ . \quad (3.2.12)$$

В литературе часто вводят понятие лоренц-инвариантного фазового объема вторичных частиц (см. [14, 25, 27], бесконечно малый элемент которого в фазовом пространстве записывают в виде

$$d\text{Lips}(P, f) = (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - P_f) dQ . \quad (3.2.13)$$



Наличие  $\delta^{(4)}(P - P_f)$  позволяет провести интегрирования в тех случаях, когда необходимо найти дифференциальное угловое или энергетическое сечение (см. (3.1.4)). Продемонстрируем это на примере бинарных реакций (3.1.9) для системы центра инерции.

$$\begin{aligned} d\text{Lips}(P = p_A + p_B, k_C, k_D) &= \\ &= (2\pi)^4 \delta^{(4)}(P - k_C - k_D) \frac{d^3 k_C}{(2\pi)^3 (2E_C)} \frac{d^3 k_D}{(2\pi)^3 (2E_D)}. \end{aligned} \quad (3.2.14)$$

Используя то, что

$$\delta^{(4)}(P - k_C - k_D) = \delta(\mathbf{P} - \mathbf{k}_C - \mathbf{k}_D) \delta(E_A + E_B - E_C - E_D) \quad (3.2.15)$$

“снимаем интегрирование” по  $d^3 k_D$  получим

$$\begin{aligned} d\text{Lips}(P = p_A + p_B, k_C, k_D) &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \delta(\sqrt{s} - E_C - E_D) \frac{d^3 k_C}{2E_C 2E_D}. \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

В соотношении (3.2.16) учтено, что  $E_A + E_B = \sqrt{s}$  (см. 3.1.17).

Введем новую переменную  $W = E_C + E_D$  для которой в силу закона сохранения импульса в СЦИ имеем

$$W = \sqrt{|\mathbf{k}_C|^2 + m_C^2} + \sqrt{|\mathbf{k}_C|^2 + m_D^2}. \quad (3.2.17)$$

Тогда дифференциалы  $dW$  и  $dk_C$  связаны уравнением:

$$dW = \left( \frac{1}{E_C} + \frac{1}{E_D} \right) |\mathbf{k}_C| dk_C = \frac{W |\mathbf{k}_C| dk_C}{E_C E_D}. \quad (3.2.18)$$

Записывая дифференциал в сферической системе отсчета, связанной с углом вылета  $\theta$ :

$$d^3 k_C = |\mathbf{k}_C|^2 dk_C d\Omega, \quad d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$$

с учетом (3.2.18) находим, что

$$d\text{Lips}(P = p_A + p_B, k_C, k_D) = \frac{|\mathbf{k}_C|}{16\pi^2 W} \delta(\sqrt{s} - W) dW d\Omega \quad (3.2.19)$$



В итоге, применяя соотношение (3.1.20) получаем

$$d\text{Lips}(P = p_A + p_B, k_C, k_D) = \frac{\lambda^{1/2}(s, m_C^2, m_D^2)}{2s} \frac{d\Omega}{(4\pi)^2}, \quad (3.2.20)$$

Соответственно дифференциальное угловое сечение (3.2.10) в СЦИ

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64s\pi^2} \frac{\lambda^{1/2}(s, m_C^2, m_D^2)}{\lambda^{1/2}(s, m_A^2, m_B^2)} |\mathcal{M}_{fi}|^2. \quad (3.2.21)$$

Также можно найти дифференциальные сечения и других системах отсчета.

**Таким образом, зная лагранжиан взаимодействия частиц, появляется возможность рассчитать дифференциальные сечения, а затем провести сравнение расчетов с экспериментальными данными.**

Блок-схема получения наблюдаемых величин какой-либо реакции взаимодействия элементарных частиц в рамках квантовополевых теорий и моделей включает в себя следующие этапы:

- Построение лагранжиана взаимодействия частиц
- Построение  $S_{fi}$ -матрицы и соответственно амплитуды вероятности  $\mathcal{M}_{fi}$  используя (3.2.6), (3.2.7) и соотношение (3.2.2).
- Расчет сечения с применением (3.2.10) (или соотношений аналогичным (3.2.21))

Конечно, чтобы реализовать на практике данный алгоритм расчетов необходимо пройти целую цепочку различных вычислений, многие из которых хотя уже и известны [4, 17, 24, 28–34], но все же достаточно сложны. И одним из самых сложных этапов является получение амплитуды вероятности из лагранжиана взаимодействия. Здесь значительного сокращения объема вычислений можно достигнуть используя технику, предложенную Р.Фейнманом



и которая включает в себя графическое представление матричных элементов амплитуды вероятности рассеяния (**диаграммы Фейнмана**) и запись аналитических выражений с помощью заранее подготовленных правил (**правила Фейнмана**) в терминах объектов, входящих в лагранжиан взаимодействия.

### 3.3 Элементы теории электрослабого и сильного взаимодействия

Стандартная Модель — квантовополевая модель в физике элементарных частиц, описывающая электромагнитное, слабое и сильное взаимодействие всех элементарных частиц. Стандартная Модель не включает в себя гравитацию.

Стандартная Модель включает в себя следующие положения: Всё вещество состоит из 24 фундаментальных частиц-фермионов: 6 лептонов (электрон, мюон,  $\tau$ -лептон, электронное нейтрино, мюонное нейтрино и  $\tau$ -нейтрино), 6 кварков ( $u, d, s, c, b, t$ ) и 12 соответствующих им античастиц, которые можно объединить в три поколения фермионов. Кварки участвуют в сильных, слабых и электромагнитных взаимодействиях; заряжённые лептоны (электрон, мюон,  $\tau$ -лептон) — в слабых и электромагнитных; нейтрино — только в слабых взаимодействиях. Все три типа взаимодействий возникают как следствие постулата, что наш мир симметричен относительно трёх типов калибровочных преобразований.

Частицами-переносчиками взаимодействий являются:

- ▷ 8 глюонов ( $G_a^\mu$ ) для сильного взаимодействия (группа симметрии  $SU(3)$ );
- ▷ 3 тяжёлых калибровочных бозона ( $W^+, W^-, Z^0$ ) для слабого взаимодействия (группа симметрии  $SU(2)$ );
- ▷ один фотон ( $\gamma$ ) для электромагнитного взаимодействия (группа



симметрии  $U(1)$ .

**Три поколения  
материи (Фермионы)**

	I	II	III	
масса →	2.4 МэВ	1.27 ГэВ	171.2 ГэВ	0
заряд →	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	0
спин →	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
название →	верхний	средний	истинный	фотон
	<b>u</b>	<b>c</b>	<b>t</b>	<b><math>\gamma</math></b>
	4.8 МэВ	104 МэВ	4.2 ГэВ	0
	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	нижний	странный	прелестный	глюон
<b>Кварки</b>	<b>d</b>	<b>s</b>	<b>b</b>	<b>g</b>
	<2.2 эВ	<0.17 МэВ	<15.5 МэВ	91.2 ГэВ
	0	0	0	0
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	электронное нейтрино	мюонное нейтрино	тау нейтрино	<b><math>Z^0</math></b> Z бозон
	<b><math>\nu_e</math></b>	<b><math>\nu_\mu</math></b>	<b><math>\nu_\tau</math></b>	<b><math>Z^0</math></b>
	0.511 МэВ	105.7 МэВ	1.777 ГэВ	80.4 ГэВ
	-1	-1	-1	$\pm 1$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
	электрон	мюон	тау	<b><math>W^\pm</math></b> W бозон
<b>Лептоны</b>	<b>e</b>	<b><math>\mu</math></b>	<b><math>\tau</math></b>	<b><math>W^\pm</math></b>

**Калибровочные Бозоны  
(переносчики взаимодействия)**

Рисунок 3.5– Частицы Стандартной Модели (источник изображения: <http://ru.wikipedia.org/wiki>).

Полный лагранжиан электрослабого взаимодействия (Стандартная Модель) содержит достаточно большее число слагаемых и поэтому в данном разделе рассмотрим отдельные фрагменты, описывающие взаимодействие фермионов (кварков и лептонов) с калибровочными векторными бозонами (фотоны,  $Z^0$  и  $W^\pm$  – бозоны), а также кварков посредством сильных взаимодействий. На этом примере кратко рассмотрим основные математические функции, которые входят в лагранжиан взаимодействия.

Часть лагранжиана, описывающего взаимодействие электромагнитного поля (фотона)  $A^\mu$  с электрически заряженными фер-



мионами дается выражением

$$\mathcal{L}_I^{em}(x) = -e j_\mu^{em}(x) A^\mu(x) , \quad (3.3.1)$$

с электромагнитным током вида

$$j_\mu^{em}(x) = (-1) \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_\ell(x) \gamma_\mu \psi_\ell(x) + \sum_{\ell=u,d,c,\dots,b} Q_\ell \bar{\psi}_\ell(x) \gamma_\mu \psi_\ell(x) , \quad (3.3.2)$$

где  $eQ_\ell$  – электрический заряд фермиона ( $Q_\ell = -1$  для электрона);  $\gamma^\mu$  – известные уже нам матрицы Дирака. Суммирование по  $\ell$  включает в самом общем случае весь спектр фермионов спина 1/2, входящих в Стандартную Модель.

Спинорное поле фермиона в импульсном представлении имеет вид:

$$\psi(x) = \sum_{\lambda=-1/2}^{1/2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2\omega_m(\mathbf{p})}} \left[ c(p,\lambda) u_\lambda(p,s_p) e^{-i(p x)} + d^\dagger(p,\lambda) v_\lambda(p,s_p) e^{i(p x)} \right] . \quad (3.3.3)$$

Входящие в (3.3.3) операторы рождения  $c^\dagger(p,\lambda)$  и  $d^\dagger(p,\lambda)$  и уничтожения  $c(p,\lambda)$  и  $d(p,\lambda)$  частиц и античастиц спина 1/2 имеют коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [c(p,\lambda), c^\dagger(p',\lambda')] &= \delta_{\lambda,\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \\ [d(p,\lambda), d^\dagger(p',\lambda')] &= \delta_{\lambda,\lambda'} \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') , \\ [c(p,\lambda), c(p',\lambda')] &= 0 , [d(p,\lambda), d(p',\lambda')] = 0 , \\ [c(p,\lambda), d(p',\lambda')] &= 0 , [c(p,\lambda), d^\dagger(p',\lambda')] = 0 . \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

В выражении (3.3.3) имеются функции  $u_\lambda(p,s_p)$  и  $v_\lambda(p,s_p)$ , которые называют дираковскими спинорами (биспинорами) фермиона и антифермиона соответственно. С их структурой и свойствами мы познакомимся более детально в разделе 2.3.



Безмассовое нейтральное поле спина 1 (фотон)  $A_\mu(x)$  в импульсном представлении запишется в виде

$$A^\mu(x) = \sum_{\sigma=0}^3 \int \frac{d^3k}{(2\pi)^{3/2} \sqrt{2|\mathbf{k}|}} \epsilon_\sigma^\mu(k) \left[ c(k, \sigma) e^{-i(kx)} + c^\dagger(k, \sigma) e^{i(kx)} \right]. \quad (3.3.5)$$

Ортонормированные вектора поляризации  $\epsilon_\sigma^\mu(k)$ , нумеруемые лоренц-индексом  $\sigma$  содержат как физические поперечные компоненты  $\sigma = 1, 2$ , так и нефизические продольные компоненты  $\sigma = 0, 3$ , которые можно “убрать” из расчетов за счет выбора калибровочного условия для электромагнитного поля. Введем линейную комбинацию вида

$$\varepsilon_\lambda^\mu(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} (\epsilon_1^\mu(k) + i\lambda \epsilon_2^\mu(k)), \quad \lambda = \pm 1, \quad (3.3.6)$$

которая обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_\lambda(k), k) &= 0, \quad (\varepsilon_\lambda(k), \varepsilon_{\lambda'}^*(k)) = -\delta_{\lambda, \lambda'}, \\ \varepsilon_\lambda^*(k) &= \varepsilon_{-\lambda}(k) \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

и описывает поперечно поляризованные состояния безмассового векторного поля  $A_\mu(x)$ . Поскольку масса поля равна нулю, следовательно  $k^2 = 0$  и  $|\mathbf{k}| = k_0$ . Коммутационные соотношения для операторов рождения и уничтожения представимы в виде

$$\begin{aligned} [c(k, \sigma), c^\dagger(k', \sigma')] &= -g_{\sigma, \sigma'} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'), \\ [c(k, \sigma), c(k', \sigma')] &= 0. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Лагранжиан взаимодействия фермионов с заряженными  $W^\pm$ -бозонами имеет вид

$$\mathcal{L}_I^W(x) = -\frac{g}{2\sqrt{2}} j_\mu^{CC}(x) W^\mu(x), \quad (3.3.9)$$



где присутствует так называемый заряженный слабый ток вида

$$j_{\mu}^{CC}(x) = 2 \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_{\nu_{\ell}}(x) \omega_{+1} \gamma_{\mu} \omega_{-1} \psi_{\ell}(x) + \\ + 2 \sum_{\ell_1=u,c,t} \sum_{\ell_2=d,s,b} \bar{\psi}_{\ell_1}(x) \omega_{+1} \gamma_{\mu} V_{\ell_1 \ell_2} \omega_{-1} \psi_{\ell_2}(x) . \quad (3.3.10)$$

Лагранжиан взаимодействия фермионов с нейтральным массивным векторным  $Z^0$ -бозоном запишется в аналогичной форме

$$\mathcal{L}_I^Z(x) = -\frac{g}{2 \cos \theta_W} j_{\mu}^{NC}(x) Z^{\mu}(x) , \quad (3.3.11)$$

где нейтральный ток

$$j_{\mu}^{NC}(x) = \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_{\nu_{\ell}}(x) \omega_{+1} \gamma_{\mu} \omega_{-1} \psi_{\nu_{\ell}}(x) - \\ - \sum_{\ell=e,\mu,\tau} \bar{\psi}_{\ell}(x) \omega_{+1} \gamma_{\mu} \omega_{-1} \psi_{\ell}(x) + \sum_{\ell=u,c,t} \bar{\psi}_{\ell}(x) \omega_{+1} \gamma_{\mu} \omega_{-1} \psi_{\ell}(x) - \\ - \sum_{\ell=d,s,b} \bar{\psi}_{\ell}(x) \omega_{+1} \gamma_{\mu} \omega_{-1} \psi_{\ell}(x) - 2 \sin^2 \theta_W j_{\mu}^{em}(x) . \quad (3.3.12)$$

Электромагнитный ток  $j_{\mu}^{em}(x)$  задается соотношением (3.3.2).

В дополнение приведем, также приведем часть лагранжиана сильного взаимодействия между кварками за счет обмена глюонами. В данном случае необходимо учесть, что кварки обладают дополнительной к электрослабым параметрам характеристикой – цветом. Эта характеристика кварка  $i$  может принимать три цветовых –  $i = R, B, G$  и три антицветовых значения –  $i = \bar{R}, \bar{B}, \bar{G}$ , из которых формируется 8 (восемь) линейно независимых комбинаций, обладающих “ненулевым” цветом зарядом:

$$R\bar{G} , R\bar{B} , G\bar{R} , G\bar{B} , B\bar{R} , B\bar{G} , \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (R\bar{R} - G\bar{G}) , \frac{1}{\sqrt{6}} (R\bar{R} + G\bar{G} - 2B\bar{B}) . \quad (3.3.13)$$



Цветовые характеристики (3.3.13) и определяет 8 видов глюонов, которые и обеспечивают в рамках квантовой хромодинамики взаимодействие между кварками. Отметим, что существует возможность взаимодействия глюонов между собой. Для перечисления цветовых характеристик (3.3.13) будем использовать индекс  $a = 1, 2, \dots, 8$ .

В КХД лагранжиан взаимодействия между кварками, описываемые спинорными полями  $\psi_i(x)$  и глюонными полями  $G_a^\mu(x)$  имеет вид:

$$\mathcal{L}_I^{\text{QCD}}(x) = g_s \sum_{i,j=1}^3 \sum_{a=1}^8 \bar{\psi}_i(x) \gamma_\mu \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \psi_j(x) G_a^\mu(x), \quad (3.3.14)$$

где  $g_s$  - константа сильного взаимодействия, а  $\lambda_a$ ,  $a = 1, 2, \dots, 8$  -  $3 \times 3$  матрицы Гелл-Манна.

Несколько слов о некоторых параметрах и объектах, входящих в лагранжианы взаимодействия Стандартной Модели. Прежде всего это физические характеристики частиц, входящих в СМ, так и констант их взаимодействий между собой.

○ Константа электромагнитного взаимодействия  $\alpha = e^2/(4\pi)$  ( $\alpha \approx 1/137.03599911$ ), константа сильного взаимодействия  $\alpha_s = g_s^2/(4\pi)$  ( $\alpha_s(M_Z) \approx 0.1176$ ), константа  $g = e/\sin\theta_W$ , где  $\theta_W$  - угол Вайнберга; ( $\sin^2\theta_W \approx 0.23122$ )

○ Массы частиц: массы кварков, лептонов и переносчиков взаимодействия (см. рисунок 3.5), а также масса бозона Хиггса  $M_H$ .

○ Зарядовые характеристики частиц (см. рисунок 3.5)

○ Унитарная (недиагональная) матрица  $V_{\ell_1\ell_2}$  носит название матрицы смешивания кварков (матрица Кабиббо-Кобаяши-Маскава). Она характеризуется тремя углами и



одной фазой и в настоящее время получена весьма детальная информация об численных значениях этих параметров.

○ Возможно к этим параметрам добавятся элементы матрицы смешивания поколений нейтрино, необходимые для описания осцилляций нейтрино.

Математическими элементами лагранжиана, которые должны будут входить амплитуду рассеяния  $\mathcal{M}_{fi}$  для процессов взаимодействия являются

- ♣ Биспиноры  $u_\lambda(p, s_p)$  и  $v_\lambda(p, s_p)$ ;
- ♣ вектора поляризации фотона  $\varepsilon_\lambda^\mu(k)$ , массивных  $W^\pm, Z^0$ - бозонов и глюонов  $g$ ;
- ♣  $\gamma$ -матрицы и связанная с ними матрица  $\gamma^5$ ;
- ♣  $\lambda$ -матрицы Гелл-Манна;
- ♣ в качестве скалярных функций присутствуют параметры СМ: элементы матрицы смешивания, заряды и массы частиц, угол смешивания Вайнберга и другие.

**Обратим, внимание на наличие фермионных токов в лагранжиане, имеющих структуру вида**

$$j_\mu(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) , \quad (3.3.15)$$

которая является с одной стороны лоренц-вектором из-за наличия  $\gamma^\mu$ , с другой стороны представляет собой произведение типа “строка  $\times$  матрица  $\times$  столбец”:

$$(\psi^\dagger_1, \psi^\dagger_2, \psi^\dagger_3, \psi^\dagger_4) \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & \gamma_{14} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & \gamma_{24} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & \gamma_{34} \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & \gamma_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} , \quad (3.3.16)$$



которое возникает вследствие спинорной структуры фермионных полей.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ



**Тема 5. Диаграммы и правила Фейнмана.** Диаграммы и правила Фейнмана для СМ. Построение матричных элементов простейших процессов взаимодействия элементарных частиц.

### 3.4 Диаграммы и правила Фейнмана

Для того чтобы найти аналитическое выражение амплитуды рассеяния  $\mathcal{M}_{fi}$ , которая связана с вероятностью перехода взаимодействия элементарных частиц существует удобный графический метод, разработанный Р.Фейнманом для описания процессов в квантовой электродинамике.

“Происхождение” диаграмм и правил Фейнмана тесно связано с процессом получения амплитуды  $\mathcal{M}_{fi}$  на основе представления  $S$ -матрицы ((см. (3.2.4) и текст далее))

$$S = T \left\{ \exp \left( i \int \mathcal{L}_I(x) dx \right) \right\}, \quad (3.4.1)$$

в виде ряда (ряд Дайсона)

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} S^{(n)}, \quad (3.4.2)$$

$$S^{(n)} = \frac{1}{n!} \int T \{ \mathcal{H}_I(x_1) \mathcal{H}_I(x_2) \dots \mathcal{H}_I(x_n) \} dx_1 dx_2 \dots dx_n. \quad (3.4.3)$$

Тогда вычисление  $\mathcal{M}_{fi}$  для заданной реакции взаимодействия (комpton-эффект на электроне  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$ , упругое рассеяние двух кварков и т.д.) в рамках определенной модели (КЭД, КХД, СМ) на основе (3.4.2)б(3.4.3) приводит появлению характерных множителей, которым можно сопоставить графический образ (внешняя линия, внутренняя линия вершина). Этот факт и приводит к диа-



граммам и правилам Фейнмана. Исходя из этого, для каждой модели соответственно необходимо определять свой набор таких правил.

Процедура, приводящая к диаграммной технике прекрасно изложена в книге С.М.Биленького “Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия” [17] и любителям основательного изучения рекомендуем обратиться к ней. В данных лекциях мы опускаем эту часть изложения и переходим непосредственно к формулировке правил Фейнмана в импульсном представлении, позволяющих получить аналитические выражения для амплитуды вероятности.

#### 3.4.1 Элементы диаграмм Фейнмана

Рассмотрим на примере рисунка 3.6 основные элементы диаграмм Фейнмана. Диаграммы Фейнмана состоят из:

- ★ внешних линий, отвечающих свободным частицам в начальном и конечном состоянии;  
Свободный левый конец означает, что частица существует в начальном состоянии, а свободный правый конец означает, что частица существует в конечном состоянии.
- ★ внутренних линий, которые начинаются и заканчиваются в вершинах (узлах) и описывают распространение частиц;
- ★ узлов (вершин);

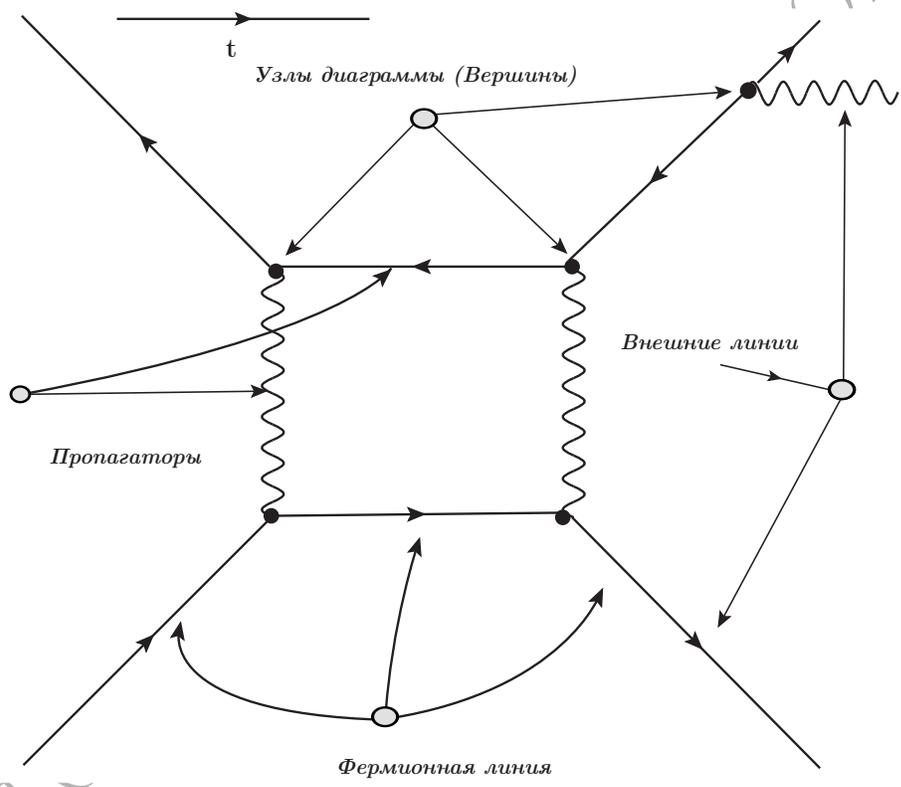


Рисунок 3.6– Элементы диаграмм Фейнмана



### Определение 3.2

Линии не имеющие ни одного свободного конца называются внутренними и соответствуют виртуальным частицам ( $p^2 \neq m^2$ ). Для таких линий также используется термин **пропагатор**

### Определение 3.3

**Узел** это точка с входящими и выходящими линиями (3 – 4 линии). Узел также называют **вершиной диаграммы**. Вид вершин определяется типом взаимодействия.

Фермионные внешние и внутренние линии имеют направление, отвечающее движению заряда вдоль линии. Поэтому они являются непрерывными и либо начинаются и заканчиваются внешними концами, либо замыкаются сами на себя внутри диаграммы. Чтобы легче было отличать частицы друг от друга, разные частицы изображают разными линиями. Для определенности около линии ставится символ частицы.

В каждой вершине соблюдаются все законы сохранения зарядов (а также странности, четности и изоспина, если взаимодействие сильное). Сохраняются энергия, импульс и момент количества движения, но для внутренних линий уже, как правило имеет место нарушение связи между энергией, импульсом и массой.

#### 3.4.2 Правила Фейнмана

Для нахождения аналитического выражения инвариантной амплитуды взаимодействия  $\mathcal{M}_{fi}$  необходимо изобразить все топологически различные диаграммы (за исключением диаграмм в виде изолированных вакуумных петель и диаграмм, состоящих



из частей, не связанных друг с другом). Далее, следует по правилам сформулированным ниже, сопоставить каждому элементу диаграммы фактор в матричном элементе. Затем следует сложить вклады, соответствующие всем диаграммам данного порядка теории возмущений.

### Список правил записи аналитического выражения $iM_{fi}$

1. Определить ось времени (обычно, по умолчанию, направление оси времени выбирают так же, как и на рисунке 3.6 и на диаграммах его не указывают).
2. Для удобства : а) расставить все импульсы на линиях; б) расставить поляризационные индексы на всех внешних линиях (бозонных и фермионных линиях); в) расставить индексы (лоренцевские) в вершинах с бозонными линиями.
3. Двигаясь вдоль фермионной линии в направлении, противоположном движению фермиона (другими словами начав с выходящего конца и пройдя последовательно до входящего), выписать последовательно, согласно таблице правил Фейнмана, аналитические выражения, соответствующие : свободным фермионной линии, вершинам и внутренним фермионным линиям (пропагаторам)<sup>1</sup>. При этом спинорные индексы выстраиваются в естественном порядке и их можно не выписывать в явном виде.
4. Выписать аналогично предыдущему пункту, получить выражения для следующих фермионных линий.
5. Выписать аналитические выражения для оставшихся элементов бозонных линий т.е. внешних линий, их пропагаторов и вершин.

<sup>1</sup>о петлях см. комментарий 1



6. Перемножить все выражения, полученные в пунктах 1.-5.
7. Выражение, полученное после 1.-5., следует просуммировать по всем лоренцевским индексам, а также проинтегрировать по каждому внутреннему импульсу, который не фиксирован законами сохранения в вершинах.

**Комментарий 1.** Каждой замкнутой фермионной линии (петле) отвечает дополнительный множитель  $(-1)$ .

**Комментарий 2.** Что касается замкнутой фермионной линии, то при суммировании по спинорным индексам автоматически возникает шпур.

**Комментарий 3.** Диаграммы, которые отличаются друг от друга только перестановкой двух внешних тождественных фермионов, имеют противоположный знак.

**Комментарий 4.** Правила Фейнмана, приведенные в таблицах **3.1–3.4**, позволяют записать аналитическое выражение для  $i\mathcal{M}_{fi}$ . !!!



Таблица 3.1– Правила Фейнмана для внешних линий в Стандартной Модели

Внешние линии:	Аналитическое выражение
Фермион в начальном состоянии с 4-импульсом $p$ , вектором поляризации $s_p$ и проекцией спина $\lambda_p$	
	$u_{\lambda_p}(p, s_p)$
Фермион в конечном состоянии с 4-импульсом $p$ , вектором поляризации $s_p$ и проекцией спина $\lambda_p$	
	$\bar{u}_{\lambda_p}(p, s_p)$
Антифермион в начальном состоянии с 4-импульсом $p$ , вектором поляризации $s_p$ и проекцией спина $\lambda_p$	
	$\bar{v}_{\lambda_p}(p, s_p)$
Антифермион в конечном состоянии с 4-импульсом $p$ , вектором поляризации $s_p$ и проекцией спина $\lambda_p$	
	$v_{\lambda_p}(p, s_p)$
Бозон спина 1 в начальном состоянии с 4-импульсом $q$ и проекцией спина $\lambda_q$	
	$\varepsilon_{\lambda_q}^{\mu}(q)$
Бозон спина 1 в конечном состоянии с 4-импульсом $q$ и проекцией спина $\lambda_q$	
	$\varepsilon_{\lambda_q}^{*\mu}(q)$



Таблица 3.2– Правила Фейнмана для некоторых внутренних линий в Стандартной Модели

Внутренние линии:	Аналитическое выражение
Пропагатор фермиона с 4-импульсом $k$	
	$i \frac{\hat{k} + m}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$
Пропагатор фотона с 4-импульсом $k$	
	$-i \frac{g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$
Пропагатор $Z^0$ -бозона с 4-импульсом $k$	
	$-i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_Z^2}{k^2 - m_Z^2 + i\epsilon}$
Пропагатор $W$ -бозона с 4-импульсом $k$	
	$-i \frac{g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / m_W^2}{k^2 - m_W^2 + i\epsilon}$



Таблица 3.3– Правила Фейнмана для некоторых внутренних линий в Стандартной Модели

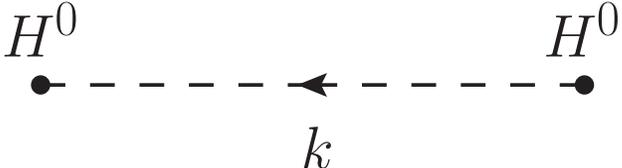
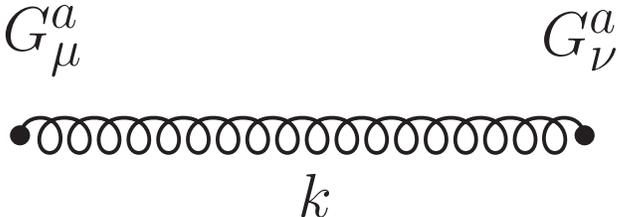
Внутренние линии:	Аналитическое выражение
Пропагатор скалярного бозона (спин 0) с 4-импульсом $k$	
	$i \frac{1}{k^2 + i\epsilon}$
Пропагатор глюона с 4-импульсом $k$ и цветовыми индексами $a$ и $b$	
	$-i \frac{\delta_{ab} g_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$



Таблица 3.4– Правила Фейнмана для вершин взаимодействия фермионов с векторными бозонами в Стандартной Модели

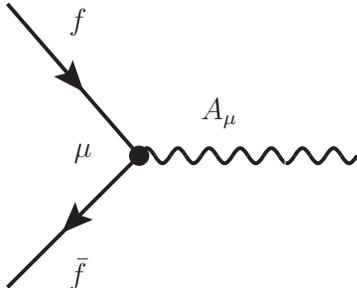
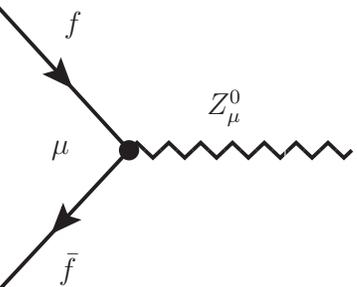
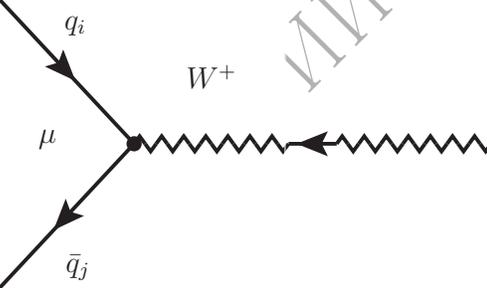
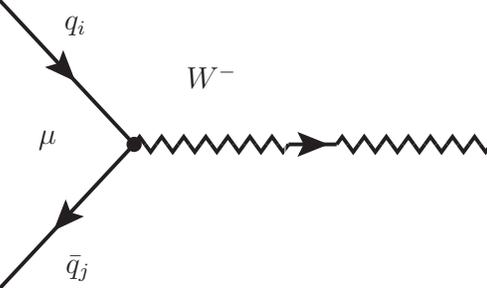
Вершины:	Аналитическое выражение
<p data-bbox="240 321 997 359">Вершина взаимодействия фотона <math>A^\mu</math> с фермионами <math>f</math></p> 	$-ieQ_f\gamma_\mu$
<p data-bbox="240 684 997 722">Вершина взаимодействия <math>Z^0</math>-бозона с фермионами <math>f</math></p> 	$-i\frac{g}{2\cos\theta_W}\gamma_\mu\left(g_V^f - g_A^f\gamma^5\right)$
<p data-bbox="240 1050 997 1087">Вершина взаимодействия <math>W^+</math>-бозона с кварком и антикварком сортов <math>q_i</math> и <math>q_j</math></p> 	$i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma^5)V_{q_iq_j}^\dagger$
<p data-bbox="240 1413 997 1451">Вершина взаимодействия <math>W^-</math>-бозона с кварком и антикварком сортов <math>q_i</math> и <math>q_j</math></p> 	$-i\frac{g}{2\sqrt{2}}\gamma_\mu(1-\gamma^5)V_{q_iq_j}$



Таблица 3.5– Правила Фейнмана для некоторых вершин в Стандартной Модели

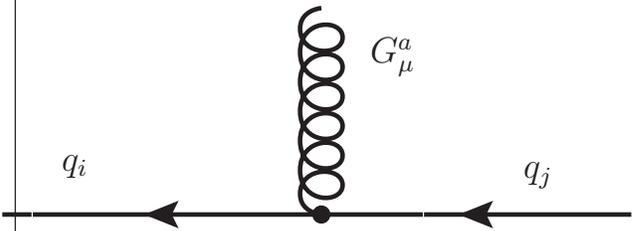
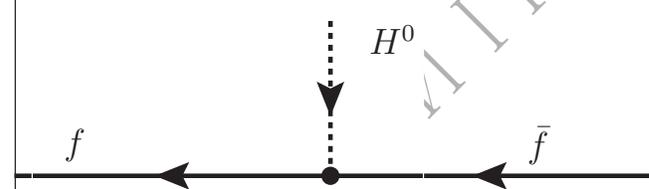
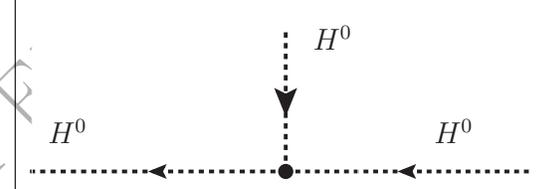
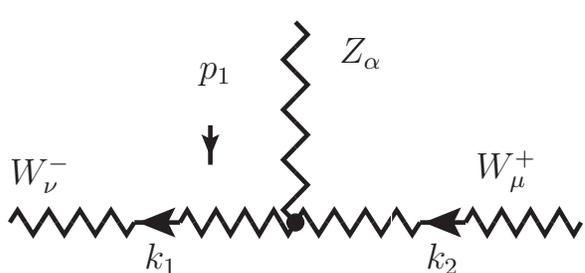
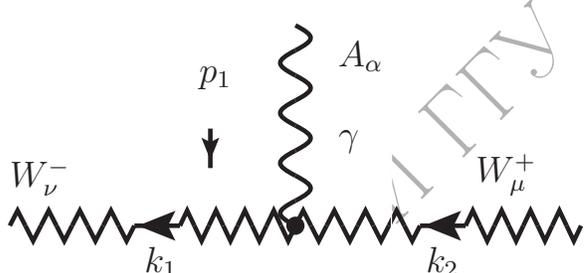
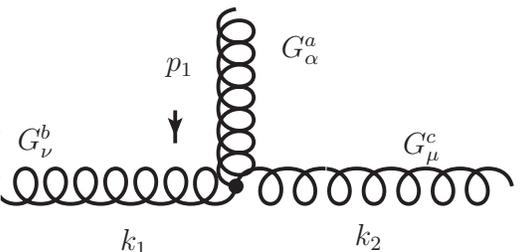
Вершины:	Аналитическое выражение
<p data-bbox="240 407 1487 478">Вершина взаимодействия глюона <math>G</math> цветовой комбинацией <math>a</math> с кварками <math>q</math>, имеющих цвета <math>i</math> и <math>j</math></p> 	$(-i)\alpha_s \frac{\lambda_{ij}^a}{2} \gamma^\mu$
<p data-bbox="240 865 1110 903">Вершина взаимодействия бозона Хиггса <math>H^0</math> с фермионами <math>f</math></p> 	$(-i) \frac{eQ_f}{2 \sin \theta_W} \frac{m_f}{M_W}$
<p data-bbox="240 1289 1390 1327">Трехбозонная вершина взаимодействия глюонов <math>G</math> с цветовыми индексами <math>a, b, c</math></p> 	$i \frac{3eM_H^2}{2 \sin \theta_W M_W}$



Таблица 3.6– Правила Фейнмана для трехбозонных вершин в Стандартной Модели

Вершины:	Аналитическое выражение
<p>Трехбозонная вершина взаимодействия <math>Z^0</math>-бозона с <math>W^\pm</math>-бозонами</p> 	$-ie \operatorname{tg} \theta_W [g^{\mu\nu} (k_1 - k_2)^\alpha + g^{\mu\alpha} (p_1 + k_2)^\nu - g^{\nu\alpha} (p_1 + k_1)^\mu]$
<p>Трехбозонная вершина взаимодействия фотона <math>A_\alpha</math> с <math>W^\pm</math>-бозонами</p> 	$ie [g^{\mu\nu} (k_1 - k_2)^\alpha + g^{\mu\alpha} (p_1 + k_2)^\nu - g^{\nu\alpha} (p_1 + k_1)^\mu]$
<p>Трехбозонная вершина взаимодействия глюонов <math>G</math> с цветовыми индексами <math>a, b, c</math></p> 	$(-i)\alpha_s f^{abc} [g^{\mu\nu} (k_1 - k_2)^\alpha + g^{\mu\alpha} (p_1 + k_2)^\nu - g^{\nu\alpha} (p_1 + k_1)^\mu]$



### 3.5 Построение матричных элементов простейших процессов взаимодействия элементарных частиц.

Применим правила Фейнмана, представленных в таблицах 3.1–3.4 для построения аналитического выражения  $i\mathcal{M}_{fi}$  процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в рамках квантовой электродинамики. Использование инвариантной теории возмущений дает в первом неисчезающем порядке диаграмму представленную на рисунке 3.7. На этом же рисунке отображены аналитические выражения, соответствующие элементам диаграмм Фейнмана.

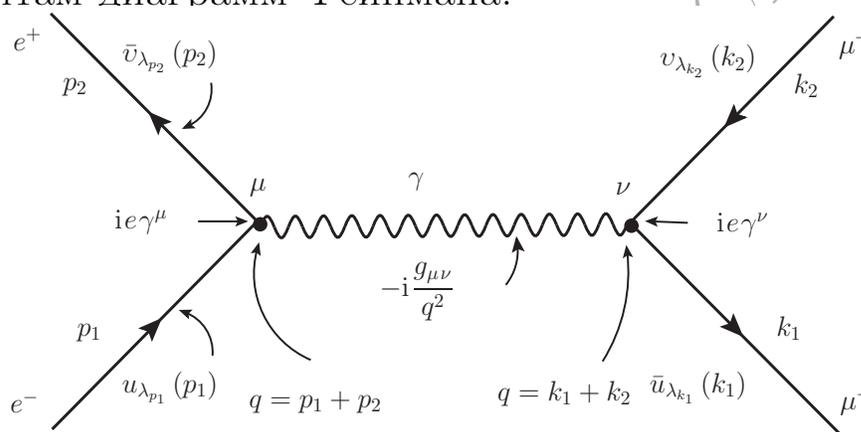


Рисунок 3.7– Диаграмма процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в первом неисчезающем порядке теории возмущений

Используя правила записи аналитического выражения  $i\mathcal{M}_{fi}$

$$i\mathcal{M}_\gamma = \left[ \bar{v}_{\lambda_{p_2}}(p_2) (ie\gamma^\mu) u_{\lambda_{p_1}}(p_1) \right] \times \left[ \bar{u}_{\lambda_{k_1}}(k_1) (ie\gamma^\nu) v_{\lambda_{k_2}}(k_2) \right] \times \left[ -i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \right]. \quad (3.5.1)$$

Суммируя по лоренц-индексам  $\mu$  и  $\nu$  с учетом законов сохранения 4-импульсов в вершинах, получаем что

$$\mathcal{M}_\gamma = \frac{e^2}{(p_1 + p_2)^2} \left\{ \bar{v}_{\lambda_{p_2}}(p_2) \gamma^\mu u_{\lambda_{p_1}}(p_1) \right\} \left\{ \bar{u}_{\lambda_{k_1}}(k_1) \gamma_\mu v_{\lambda_{k_2}}(k_2) \right\}. \quad (3.5.2)$$

В соотношении (3.5.1) фигурными скобками выделены выражения, генерируемые фермионными линиями в диаграмме 3.7.



Если рассмотреть процесс  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в рамках Стандартной Модели, то в дополнение к диаграмме 3.7 появится диаграмма с обменом  $Z^0$ -бозоном ( рисунок 3.8).

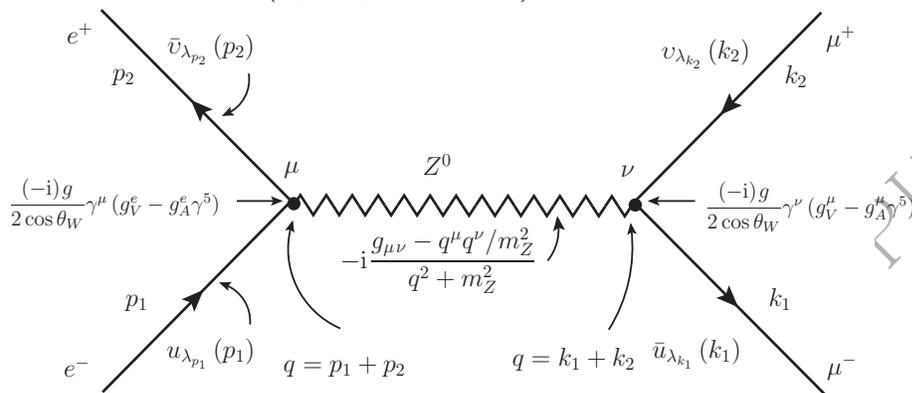


Рисунок 3.8– Диаграмма процесса  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в первом неисчезающем порядке теории возмущений с обменом  $Z^0$ -бозоном

Проделаем операции, аналогичные построению матричного элемента диаграммы 3.7 находим, что

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{Z^0} = & \frac{e^2}{4 \sin^2 \theta_W \cos^2 \theta_W} \frac{\left( g_{\mu\nu} - \frac{(p_1 + p_2)^\mu (p_1 + p_2)^\nu}{m_Z^2} \right)}{(p_1 + p_2)^2 - m_Z^2} \times \\ & \times \left\{ \bar{v}_{\lambda p_2}(p_2) \gamma_\mu (g_V^e - g_A^e \gamma^5) u_{\lambda p_1}(p_1) \right\} \times \\ & \times \left\{ \bar{u}_{\lambda k_1}(k_1) \gamma_\nu (g_V^\mu - g_A^\mu \gamma^5) v_{\lambda k_2}(k_2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

Полная амплитуда  $\mathcal{M}$  реакции  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  в первом неисчезающем порядке теории возмущений в рамках Стандартной Модели будет суммой матричных элементов  $\mathcal{M}_\gamma$  и  $\mathcal{M}_{Z^0}$  т.е.

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_\gamma + \mathcal{M}_{Z^0}. \quad (3.5.4)$$

### 3.5.1 Суммирование по поляризациям частиц

Очень часто на эксперименте пучки частиц являются не поляризованными т.е. нет выделенного направления, связанного с спином



частиц. Аналогичная ситуация возникает и для вторичных вновь образовавшихся частиц. Для того чтобы учесть такой вариант проводят процедуру, которая включает в себя, усреднение по начальным поляризациям частиц и суммирование по поляризациям конечных частиц. Такая процедура, в рассмотренном нами случае  $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$  состоит в замене в сечении квадрата матричного элемента<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned}
 & \left| \mathcal{M}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \right|^2 \rightarrow \overline{|\mathcal{M}|^2} = \\
 & \quad \text{усреднение по нач. сост.} \\
 & = \frac{1}{\underbrace{(2 \times 1/2 + 1)}_{\text{число спиновых состояний}}} \sum_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}} \times \\
 & \times \sum_{\underbrace{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}}_{\text{суммир. по конеч. сост.}}} \left| \mathcal{M}_{\lambda_{p_1}, \lambda_{p_2}}^{\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}} \right|^2. \quad (3.5.5)
 \end{aligned}$$

Множитель  $1/2$  возникает (3.5.5) поскольку спин электрона равен  $1/2$ . Для массивных векторных бозонов данный фактор равен 1, а для фотона, такой же как для электрона, вследствие наличия только двух возможных спиновых состояний (“поперечность” фотона).

### 3.6 Структура амплитуды с фермионами

Таким образом, на основании вышеизложенного отметим, что амплитуда процесса в квантовополевых теориях представляет собой в заданном порядке теории возмущений, сумму матричных элементов  $\mathcal{M}$ , каждой из которых соответствует некоторая диаграмма Фейнмана.

<sup>2</sup>Как следует из (3.5.2) и (3.5.3) матричный элемент  $\mathcal{M}$  является функцией спиновых переменных.



Следовательно, для того чтобы получить выражение амплитуды процесса в терминах явно скалярных функций, необходимо последовательно вычислить матричные элементы. Для анализа возможных схем расчетов рассмотрим этапы вычисления наблюдаемых в пертурбативных квантовополевых теориях и моделях. В таких теориях и моделях стандартной стала схема, в которой можно выделить следующие этапы с использованием исходного лагранжиана:

- I Получение математических выражений для фейнмановских амплитуд, исходя из лагранжиана модели.
- II Если в реакциях участвуют фермионы спина  $1/2$ , то такие выражения будут представлять собой комбинацию произведений биспиноров Дирака,  $\gamma$ -матриц и других величин.

Матричный элемент реакции с фермионами спина  $1/2$  имеет вид

$$\mathcal{C} \prod_i \epsilon_{\sigma_i}^{\mu_i}(k_i) \prod_j \bar{w}_{\lambda_j}(p_j, s_j) Q_j w_{\lambda'_j}(p'_j, s'_j), \quad (3.6.1)$$

где функции  $\epsilon_i$  являются векторами поляризации векторных бозонов с импульсом  $k_i$  и поляризацией  $\sigma_i$ . Операторы  $Q_j$  представляют собой комбинацию произведений матриц Дирака. Функции  $\bar{w}$  и  $w$  являются спинорами Дирака ( $u$  или  $v$  для фермионов и антифермионов соответственно). В том случае, если участвуют частицы спина  $3/2$ ,  $2$  и выше, то возможны более сложные структуры, связанные с векторами поляризации. В константу  $\mathcal{C}$  включаются скалярные факторы– константы взаимодействий, петлевые интегралы, числовые множители и т.д..

В этой связи возникает необходимость следующего шага: преобразование (вычисление) соответствующих каждой диаграмме математических выражений в виде скалярных функций.



**III** Последним этапом является вычисление необходимых наблюдаемых величин для данного процесса.

Первый шаг данной схемы реализуется на практике получением правил Фейнмана для данной модели и генерацией соответствующих диаграммам Фейнмана математических выражений.

Во втором этапе можно выделить две основные составляющие. К первой составляющей можно отнести расчеты, связанные с преобразованием  $\gamma$ -матриц и дираковских спиноров в явно скалярные функции. Во вторую часть входят расчеты так называемых петлевых интегралов.

Третий этап, включающий в себя, интегрирование по фазовому пространству конечных частиц, а также вычисление петлевых интегралов.

Исходя из структуры (3.6.1), можно выделить следующие шаги по преобразованию ее в явно скалярную функцию:

- Вычисление спинорной части матричного элемента, т.е. выражений типа

$$M_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p; k, s_k) = \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) Q w_{\lambda_k}^B(k, s_k), \quad \text{где} \quad (3.6.2)$$

$$w_{\lambda}^A(p, s_p) = \begin{cases} u_{\lambda}(p, s_p), & \text{если } A = 1, \\ v_{\lambda}(p, s_p), & \text{если } A = -1. \end{cases} \quad (3.6.3)$$

- Свертка выражений, содержащих лоренц-индексы между собой, если таковые имеются. Такие ситуации возникают, если оператор  $Q$  является лоренц-тензором.

В качестве основного требования к полученной скалярной функции, как правило, выдвигают ее лоренц-ковариантность. Это автоматически выполняется, если матричный элемент представляет собой функцию скалярных произведений четырехмерных векторов реакции и их свертка с тензором Леви-Чивита.



Основной вычислительной задачей по преобразованию матричного элемента в скалярные произведения или в компоненты векторов процесса является задача по расчету выражения (3.6.2) соответствующего незамкнутой фермионной линии в диаграмме Фейнмана. Большинство методов расчетов амплитуд реакций связано именно с решением этой задачи.

Для того чтобы рассмотреть методы вычисления выражений типа (3.6.2) в разделе 2.3 рассмотрим более детально свойства дираковских спиноров, входящих в данную структуру.

### 3.7 Упражнения и задания к параграфам 3.4-3.5

#### Упражнение 1.

Запишите аналитические выражения  $\mathcal{M}$  для комптоновского рассеяния  $\gamma e^- \rightarrow \gamma e^-$  в первом неисчезающем порядке теории возмущений.

#### Дополнительное упражнение 2.

Запишите аналитические выражения  $\mathcal{M}$  для рассеяния кварка на антикварке  $u\bar{u} \rightarrow u\bar{u}$  в первом неисчезающем порядке теории возмущений в рамках квантовой хромодинамики.



## Раздел 4

### Методы вычисления наблюдаемых величин в реакциях элементарных частиц.

Тема 7. Методы расчета наблюдаемых величин в экспериментах ФЭЧ. Метод расчета квадратов матричных элементов процессов взаимодействия элементарных частиц. Методы непосредственного расчета матричных элементов процессов с участием фермионов спина  $1/2$ . Классификация методов расчета матричных элементов. Шпуровой метод расчета матричных элементов. Спинорная техника вычисления матричных элементов.

В данной главе рассмотрим методы вычислений, связанных с преобразованиями структур, возникающих при наличии в реакциях взаимодействия фермионов спина  $1/2$ , в явно скалярные функции. При этом, основной упор сделаем на методах аналитического вычисления подобных структур.

#### 4.1 Метод расчета квадратов матричных элементов процессов взаимодействия элементарных частиц.

Общепринятым методом вычисления сечений реакций с участием фермионов спина  $1/2$  является редукция **квадрата модуля** выражения для фермионной линии (3.6.2) к следу от произведений



$\gamma$ -матриц.

Исходя из выражения (3.6.2), имеем для случая фермионов

$$\begin{aligned}
 & |M_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p; k, s_k)|^2 = \\
 & = \left[ \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) Q w_{\lambda_k}^B(k, s_k) \right]^\dagger \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) Q w_{\lambda_k}^B(k, s_k) \\
 & = \left[ \left\{ \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right\}_\alpha Q_{\alpha\beta} \left\{ w_{\lambda_k}^B(k, s_k) \right\}_\beta \right]^\dagger \\
 & \left\{ \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right\}_{\alpha'} Q_{\alpha'\beta'} \left\{ w_{\lambda_k}^B(k, s_k) \right\}_{\beta'} = \\
 & = \left\{ \bar{w}_{\lambda_k}^B(k, s_k) \right\}_\alpha \bar{Q}_{\alpha\beta} \left\{ w_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right\}_\beta \\
 & \left\{ \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right\}_{\alpha'} Q_{\alpha'\beta'} \left\{ w_{\lambda_k}^B(k, s_k) \right\}_{\beta'} , \quad (4.1.1)
 \end{aligned}$$

где

$$\bar{Q} = \gamma^0 Q^\dagger \gamma^0 . \quad (4.1.2)$$

Комбинируя дираковские спиноры, перепишем выражение (4.1.1) в виде

$$\begin{aligned}
 & |M_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p; k, s_k)|^2 = \\
 & = \bar{Q}_{\alpha\beta} \left[ w_{\lambda_p}^A(p, s_p) \cdot \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) \right]_{\beta\alpha'} \\
 & Q_{\alpha'\beta'} \left[ w_{\lambda_k}^B(k, s_k) \cdot \bar{w}_{\lambda_k}^B(k, s_k) \right]_{\beta'\alpha} . \quad (4.1.3)
 \end{aligned}$$

Наконец, используя, тот факт что выражения в квадратных скобках являются проективными операторами  $\tau$  (2.5.11)

$$\tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} (\hat{p} + A m_p) (I + \lambda_p \gamma_5 \hat{s}_p) , \quad (4.1.4)$$

получим что квадрат модуля записанный в виде шпура от некоторой линейной комбинации произведений  $\gamma$ -матриц Дирака:

$$|M_{\lambda_p, \lambda_k}(p, s_p; k, s_k)|^2 = \text{Tr} \left( \bar{Q} \tau_{\lambda_p}^A(p, s_p) Q \tau_{\lambda_k}^B(k, s_k) \right) . \quad (4.1.5)$$

Таким образом, для вычисления квадрата модуля матричного элемента вида (3.6.2) необходимо вычислить шпур (4.1.5).

## 4.2 Базовый матричный элемент

Напомним, что основной задачей, решаемой в этой разделе, является вычисление матричного элемента вида

$$M_{\lambda_p, \lambda_k}^{D,B} (p, s_p ; k, s_k) = \bar{w}_{\lambda_p}^D (p, s_p) Q w_{\lambda_k}^B (k, s_k) , \quad (4.2.1)$$

где  $\lambda_p$  и  $\lambda_k$  – проекции спина для фермионов с 4-импульсами  $p, k$  и векторами поляризации  $s_p, s_k$ . Запись  $w_{\lambda_p}^D (p, s_p)$  означает  $u_{\lambda_p} (p, s_p)$  ( $D = +1$ ) или  $v_{\lambda_p} (p, s_p)$  ( $D = -1$ ). Рассмотрим специальный случай матричного элемента (4.2.1), когда  $p = b_C$  и  $k = b_{-A}$  т.е.

$$\Gamma_{\rho, \sigma}^{C,A} [Q] = \bar{u}_{\rho} (b_C) Q u_{-\sigma} (b_{-A}) . \quad (4.2.2)$$

С помощью условия полноты (2.1.9) легко показать, что для  $\Gamma_{\rho, \sigma}^{C,A} [Q_1 Q_2]$  имеет место рекурсивное соотношение

$$\Gamma_{\rho, \sigma}^{C,A} [Q_1 Q_2] = \sum_{D, \lambda=-1}^1 \Gamma_{\rho, \lambda}^{C,D} [Q_1] \Gamma_{\lambda, \sigma}^{D,A} [Q_2] . \quad (4.2.3)$$

Отметим несколько очевидных свойств конструкции  $\Gamma$  (4.2.2):

$$\Gamma [Q_1 + Q_2] = \Gamma [Q_1] + \Gamma [Q_2] , \quad \Gamma [\text{const } Q] = \text{const } \Gamma [Q] \quad (4.2.4)$$

и

$$\Gamma_{\sigma, \rho}^{C,A} [S^{odd}] = \delta_{-\sigma, \rho} \Gamma_{-\rho, \rho}^{C,A} [S^{odd}] , \quad \Gamma_{\sigma, \rho}^{C,A} [S^{even}] = \delta_{\sigma, \rho} \Gamma_{\rho, \rho}^{C,A} [S^{even}] , \quad (4.2.5)$$

где  $S^{odd}, S^{even}$  представляют произведение нечетного и четного числа матриц Дирака.

С помощью (2.2.3), (2.1.10) несложно найти выражение для (4.2.2) в терминах векторов изотропной тетрады  $b_{\pm 1}, n_{\pm 1}$  для различных видов оператора  $Q$ :

$$\Gamma_{\rho, \sigma}^{C,A} [\gamma^{\mu}] = \delta_{\sigma, -\rho} \left( \delta_{C, -A} \tilde{b}_{-A}^{\mu} + A \delta_{C, A} \tilde{n}_{-A \times \rho}^{\mu} \right) , \quad (4.2.6)$$



и для произведения  $\mathcal{S}^n = \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \dots \gamma^{\mu_n}$  имеем, что

$$\Gamma_{\sigma, \rho}^{C, A} [\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_n}] = \delta_{\sigma, \rho'_n} \left( \delta_{C, A'_n} \mathcal{B}_{-A, -\rho}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} + A \delta_{C, -A'_n} \mathcal{N}_{-A, -\rho}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} \right) \quad (4.2.7)$$

С помощью соотношений (4.2.3) и (4.2.7) получим рекуррентное соотношение для лоренц-тензоров  $\mathcal{B}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}}$  и  $\mathcal{N}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}}$ .

$$\mathcal{B}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} = \mathcal{B}_{A'_{n-k}, \lambda'_{n-k}}^{\{\mu_1, \dots, \mu_k\}} \mathcal{B}_{A, \lambda}^{\{\mu_{k+1}, \dots, \mu_n\}} + (-1)^{n-k+1} \mathcal{N}_{-A'_{n-k}, \lambda'_{n-k}}^{\{\mu_1, \dots, \mu_k\}} \mathcal{N}_{A, \lambda}^{\{\mu_{k+1}, \dots, \mu_n\}}, \quad (4.2.8)$$

$$\mathcal{N}_{A, \lambda}^{\{\mu_1, \dots, \mu_n\}} = \mathcal{B}_{-A'_{n-k}, \lambda'_{n-k}}^{\{\mu_1, \dots, \mu_k\}} \mathcal{N}_{A, \lambda}^{\{\mu_{k+1}, \dots, \mu_n\}} + (-1)^{n-k} \mathcal{N}_{A'_{n-k}, \lambda'_{n-k}}^{\{\mu_1, \dots, \mu_k\}} \mathcal{B}_{A, \lambda}^{\{\mu_{k+1}, \dots, \mu_n\}}. \quad (4.2.9)$$

Рекурсивные формулы (4.2.8), (4.2.9) позволяют редуцировать скалярные функции  $\mathcal{B}, \mathcal{N}$  в лоренц-тензоры с меньшей размерностью, а также записать их в терминах векторов изотропной тетрады, используя соотношения (2.2.6). Рекуррентные соотношения (4.2.8), (4.2.9) легко реализовать на одном из языков аналитического программирования с целью расчета матричных элементов [35].

### 4.3 Идея МБС

**Основная идея МБС** состоит в замене дираковских спиноров  $w$  в (4.2.1) на базисные спиноры  $u_{\pm 1}$  ( $b_{\pm 1}$ ) (2.1.1) и в использовании уравнений (2.2.3), (2.1.10) для вычисления матричного элемента в терминах скалярных функций.

**Алгоритм МБС** включает два этапа вычислений:

1. Преобразование к матричному элементу с безмассовыми базисными спинорами  $u_{\lambda}$  ( $b_{\pm 1}$ ), т.е.

$$M_{\lambda_p, \lambda_k}^{D, A} (p, s_p ; k, s_k) = \bar{w}_{\lambda_p}^D (p, s_p) Q w_{\lambda_k}^A (k, s_k) = \frac{1}{\sqrt{(\tilde{b}_{-1} \xi_1^k)}} \frac{1}{\sqrt{(\tilde{b}_{-1} \xi_1^p)}} \times \\ \times \bar{u}_{-D \times \lambda_p} (b_{-1}) \left( \hat{\xi}_1^p + D \hat{\xi}_1^p \hat{\xi}_{-1}^p / m_p \right) Q \left( \hat{\xi}_1^k + A \hat{\xi}_{-1}^k \hat{\xi}_1^k / m_k \right) u_{-A \times \lambda_k} (b_{-1}) \quad (4.3.1)$$



Таким образом, матричный элемент сводится к линейной комбинации базовых матричных элементов  $\Gamma_{\lambda_p, \lambda_k}$ .

- С помощью соотношения (2.2.3)-(2.1.10) амплитуда (4.3.1) редуцируется к скалярной функции в терминах скалярных произведений.

Рассмотрим в качестве иллюстрации вычислений с помощью МБС расчет (4.2.1) с  $Q = I$  для безмассовых спиноров

$$M_{\lambda_p, \lambda_k}(p, k) = \bar{u}_{\lambda_p}(p) u_{\lambda_k}(k). \quad (4.3.2)$$

Преобразуем (4.3.2) к виду

$$\bar{u}_{\lambda_p}(p) u_{\lambda_k}(k) = \frac{\bar{u}_{-\lambda_p}(b_{-1}) \hat{p} \hat{k} u_{-\lambda_k}(b_{-1})}{2 \sqrt{(p b_{-1}) (k b_{-1})}}. \quad (4.3.3)$$

Затем, используя соотношения (2.2.3)-(2.1.10), редуцируем (4.3.3) к скалярной функции

$$\begin{aligned} & \frac{\bar{u}_{-\lambda_p}(b_{-1}) \hat{p} \hat{k} u_{-\lambda_k}(b_{-1})}{\sqrt{(p \tilde{b}_{-1}) (k \tilde{b}_{-1})}} = (2.2.3) = \\ & \frac{\bar{u}_{-\lambda_p}(b_{-1}) \left[ (\tilde{b}_{-1} k) \hat{p} u_{\lambda_k}(b_1) + (\tilde{n}_{-\lambda_k} k) \hat{p} u_{\lambda_k}(b_{-1}) \right]}{\sqrt{(p \tilde{b}_{-1}) (k \tilde{b}_{-1})}} = \\ & = \frac{\delta_{\lambda_p, -\lambda_k} \left[ (p \tilde{b}_{-1}) (k \tilde{n}_{-\lambda_k}) - (k \tilde{b}_{-1}) (p \tilde{n}_{-\lambda_k}) \right]}{\sqrt{(\tilde{b}_{-1} p) (\tilde{b}_{-1} k)}}. \quad (4.3.4) \end{aligned}$$



Для выражения (4.3.3) можно сразу получить, что

$$\begin{aligned} \frac{\bar{u}_{-\lambda_p}(b_{-1}) \hat{p} \hat{k} u_{-\lambda_k}(b_{-1})}{\sqrt{(p \tilde{b}_{-1}) (k \tilde{b}_{-1})}} &= \frac{\Gamma_{\lambda_p, -\lambda_k}^{1, -1}}{\sqrt{(p \tilde{b}_{-1}) (k \tilde{b}_{-1})}} = \\ &= \frac{\delta_{\lambda_p, -\lambda_k} X_{-1, -\lambda_k}^{p, k}}{\sqrt{(p \tilde{b}_{-1}) (k \tilde{b}_{-1})}}. \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

В итоге имеем, что спинорное произведение двух безмассовых фермионов задается соотношением

$$\bar{u}_{\lambda_p}(p) u_{\lambda_k}(k) = \frac{\delta_{\lambda_p, -\lambda_k} \left[ (p \tilde{b}_{-1}) (k \tilde{n}_{-\lambda_k}) - (k \tilde{b}_{-1}) (p \tilde{n}_{-\lambda_k}) \right]}{\sqrt{(\tilde{b}_{-1} p) (\tilde{b}_{-1} k)}} \quad (4.3.6)$$

независимо от представления матриц Дирака и явного вида базисных спиноров.

Таким образом, в МБС

- не используется явный вид спиноров Дирака,  $\gamma$ -матриц и самих базисных спиноров;
- не используется вычисление шпуров;
- в отличие спинорной техники, не требуется специальных преобразований свертки  $\gamma$ -матриц и векторов поляризации через биспиноры;
- кроме этого, в отличие от варианта спинорной техники с использованием двухкомпонентных спиноров [36–38], не требуется создания новых правил Фейнмана в терминах этих спиноров.

## 4.4 “Строительные” блоки фейнмановских диаграмм

Заметим, что метод базисных спиноров обладает одной возможностью, которая увеличивает его эффективность и делает достаточно мощным средством для расчетов сложных матричных элементов. С помощью соотношения полноты амплитуда процесса может быть представлена в виде композиции функций  $\Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}$  (4.2.2). Такие вставки позволяют разбить фермионную линию (4.2.1) на произведение фермионных линий с базисными спинорами  $u_\lambda(b_A)$ , например:

$$\begin{aligned}
 M_{\lambda_p,\lambda_k}^{1,1}(p,s_p; k,s_k) &= \sum_{A,C,\sigma,\rho=-1}^1 \left\{ \bar{u}_{\lambda_p}(p,s_p) u_{-\sigma}(b_{-C}) \right\} \\
 &\left\{ \bar{u}_\sigma(b_C) Q u_{-\rho}(b_{-A}) \right\} \left\{ \bar{u}_\rho(b_A) u_{\lambda_k}(k,s_k) \right\} = \\
 &= \sum_{\sigma,\rho=-1}^1 \sum_{A,C=-1}^1 \bar{s}_{\sigma,\lambda_p}^{(C,1)}(p,s_p) \Gamma_{\sigma,\rho}^{C,A}[Q] s_{\rho,\lambda_k}^{(A,1)}(k,s_k) . \quad (4.4.1)
 \end{aligned}$$

В соотношении (4.4.1) выделены коэффициенты разложения  $s, \bar{s}$  физических спиноров по базисным спинорам, которые также являются частными случаями базового матричного элемента  $\Gamma[Q]$ :

$$s_{\rho,\lambda}^{(A,B)}(p,s_p) = \bar{u}_\rho(b_A) w_\lambda^B(p,s_p) , \quad \bar{s}_{\rho,\lambda}^{(A,B)}(p,s_p) = s_{-\rho,\lambda}^{*(-A,B)}(p,s_p) . \quad (4.4.2)$$

Таким образом, техника МБС обладает возможностью рассчитывать такие блоки фейнмановских диаграмм, как спинорные произведения, фермионные токи и более сложные структуры  $\Gamma[Q]$  с различными операторами  $Q$ , и затем использовать их как готовые скалярные функции. При этом более сложные по конструкции блоки будут включать более “простые” блоки. Все возможные диаграммы Фейнмана могут быть построены из таких “строительных”



блоков.

Наличие “строительных блоков” фейнмановских диаграмм позволяет сформировать технику вычислений амплитуд процессов, которую можно назвать **техникой “строительных” блоков**. Суть этой методики следующая: матричный элемент редуцируется к основным, заранее рассчитанным блокам. Сами блоки используются как скалярные функции, рассчитанные либо через компоненты физических векторов, аналогично спинорным произведениям в спинорной технике, или через скалярные произведения 4-векторов. Такая редукция очевидно, позволяет уменьшить число вычисляемых фейнмановских графов за счет повторений “строительных” блоков. К наиболее удачным применениям расчетов такого типа следует отнести расчеты, которые реализованы в программе WRНАСТ [39]. Эти вычисления проведены на основе итерационной схемы, предложенной в [19]. Рассмотрим простейшие примеры блоков, которые возникают в результате использования базисных спиноров.

#### 4.4.1 Коэффициенты разложения спиноров Дирака

Одним из простейших блоков являются коэффициенты разложения спиноров Дирака по базисным спинорам. Запишем коэффициенты разложения по базисным спинорам для наиболее часто используемых в физических приложениях поляризационных состояний фермионов. Если 4-импульс имеет следующие компоненты  $p = (\omega_{m_p}(\mathbf{p}), p^x = |\mathbf{p}| \sin \theta_p \sin \varphi_p, p^y = |\mathbf{p}| \sin \theta_p \cos \varphi_p, p^z = |\mathbf{p}| \cos \theta_p)$ , то для спиральных поляризационных состояний фермионов, т.е. для фермионов с вектором поляризации

$$s_p = s_H = \left\{ \frac{|\mathbf{p}|}{m_p}, \frac{\omega_{m_p}(\mathbf{p}) \mathbf{p}}{|\mathbf{p}| m_p} \right\} \quad (4.4.3)$$



коэффициенты разложения можно представить в виде [40, 41]

$$\begin{aligned}
 s_{\rho, \lambda}^{(A, B)}(p, s_H) &= \bar{u}_\rho(b_A) w_\lambda^B(p, s_H) = \\
 &= -\lambda W_{m_p}(-\lambda \rho B p) f(\lambda \rho, B) D_{A\rho/2, -B\lambda/2}^{*1/2}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p)
 \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

где

$$W_{m_p}(\pm p) = \sqrt{\omega_{m_p}(p) \pm p}, \quad (4.4.5)$$

$$f(A, D) = \delta_{A, -1} + D \delta_{A, 1}. \quad (4.4.6)$$

В случае безмассовых фермионов находим, что

$$s_{\rho, \lambda}^{(A, D)}(p, s_H) = \frac{\delta_{\rho, D \times \lambda}}{\sqrt{(p \tilde{b}_{-1})}} \left[ \delta_{A, 1}(p \tilde{b}_{-1}) + \delta_{A, -1}(p \tilde{n}_{-D \times \lambda}) \right] \quad (4.4.7)$$

Несложно получить коэффициенты разложения, как для других выборов векторов поляризаций фермионов, так и для произвольного случая [44, 45].

#### 4.4.2 Спинорные произведения

По аналогичной схеме можно рассчитать и более крупные блоки фейнмановских диаграмм (спинорные произведения, токи и т.д.) [45]. Следующим примером, уже более сложным, чем коэффициенты разложения, являются спинорные произведения

$$S_{\lambda_p, \lambda_k}^{A, B}(p; k) = \bar{w}_{\lambda_p}^A(p, s_p) w_{\lambda_k}^B(k, s_k). \quad (4.4.8)$$

Поскольку в нашем подходе спиноры Дирака фермиона и антифермиона связаны соотношением (2.6.3), то достаточно вычислить спинорное произведение вида

$$S_{\lambda_p, \lambda_k}^{(\alpha)}(p, k) = \bar{u}_{\lambda_p}(p, s_p) \omega_\alpha u_{\lambda_k}(k, s_k) \quad (4.4.9)$$



с проективной матрицей  $\omega_\alpha = 1/2 (I + \alpha \gamma_5)$ . Остальные возможные комбинации спинорных произведений преобразуются к вышеуказанной с помощью соотношения (2.6.3). С помощью соотношения полноты для базисных спиноров выражение (4.4.9) представим в виде:

$$\begin{aligned}
 S_{\lambda_p, \lambda_k}^{(\alpha)}(p, k) &= \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 \bar{u}_{\lambda_p}(p, s_p) u_{-\sigma}(b_{-C}) \\
 &\{ \bar{u}_\sigma(b_C) \omega_\alpha u_{-\rho}(b_{-A}) \} \bar{u}_\rho(b_A) u_{\lambda_k}(k, s_k) = \\
 &= \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 \bar{s}_{\lambda_p, \sigma}^{(C,1)}(p) \Gamma_{\sigma, \rho}^{C,A}[\omega_\alpha] s_{\rho, \lambda_k}^{(A,1)}(k) . \quad (4.4.10)
 \end{aligned}$$

Используя то, что

$$\Gamma_{\sigma, \rho}^{C,A}[\omega_\alpha] = \delta_{\alpha, -\rho} \delta_{C,A} \delta_{\sigma, \rho} \quad (4.4.11)$$

упростим выражение (4.4.10)

$$S_{\lambda_p, \lambda_k}^{(\alpha)}(p, k) = \sum_{C=-1}^1 \bar{s}_{\lambda_p, -\alpha}^{(C,1)}(p) s_{-\alpha, \lambda_k}^{(C,1)}(k) . \quad (4.4.12)$$

Как следует из расчетов, спинорное произведение (4.4.9) выражается как линейная комбинация коэффициентов разложения (4.4.2), которые уже рассчитаны нами в предыдущем разделе. Следовательно, несложно получить выражения спинорного произведения для различных поляризационных состояний фермионов. Отметим, что такая особенность МБС, состоящая в том, что более крупные блоки выражаются как линейные комбинации более простых, позволяет уменьшить вероятность ошибок при вычислениях и поэтому является очень важной.

Рассмотрим несколько частных случаев спинорных произведений. Простейшим, в смысле количества слагаемых, является спи-



норное произведение биспиноров для безмассовых фермионов. После несложных вычислений (см. также (4.3.6)) получим, что

$$S_{\lambda_p, \lambda_k}^{(\alpha)}(p, k) = \lambda_k \delta_{\alpha, -\lambda_k} \delta_{\lambda_p, -\lambda_k} \left( \sqrt{k^- p^+} e^{i\lambda_p \varphi_p} - \sqrt{k^+ p^-} e^{-i\lambda_k \varphi_k} \right) \quad (4.4.13)$$

где

$$(p b_{\pm 1}) = p^{\pm} = p^0 \pm p^z, \quad (p n_{\lambda}) = \lambda (p^x + i\lambda p^y) = \lambda \sqrt{p_x^2 + p_y^2} \quad (4.4.14)$$

Запишем спинорное произведение для массивных спиральных фермионов с импульсами  $p = (\omega_{m_p}(p), p \sin \theta_p \sin \varphi_p, p \sin \theta_p \cos \varphi_p, p \cos \theta_p)$  и  $k = (\omega_{m_k}(p), k \sin \theta_k \sin \varphi_k, k \sin \theta_k \cos \varphi_k, k \cos \theta_k)$ . Используя коэффициенты разложения (4.4.4) спинорное произведение (4.4.12) представимо в виде:

$$\begin{aligned} S_{\lambda_p, \lambda_k}^{(\alpha)}(p, s_H; k, s_H) &= \\ &= W_{m_p}(-\alpha \lambda_p p) W_{m_k}(\alpha \lambda_k k) D_{\lambda_p/2, \lambda_k/2}^{1/2}(\phi_{p,k}, \beta_{p,k}, -\phi_{p,k}) \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Углы  $\phi_{p,k}, \beta_{p,k}$  связаны с углами  $\theta_p, \theta_k, \varphi_p, \varphi_k$  формулой

$$\begin{aligned} D_{\lambda_p/2, \lambda_k/2}^{1/2}(\phi_{p,k}, \beta_{p,k}, -\phi_{p,k}) &= \\ &= \sum_{A=-1}^1 D_{A/2, -\lambda_k/2}^{1/2}(\varphi_k, \theta_k, -\varphi_k) D_{A/2, -\lambda_p/2}^{*1/2}(\varphi_p, \theta_p, -\varphi_p) \end{aligned} \quad (4.4.16)$$

Не составляет труда найти спинорное произведение и для произвольной поляризации фермионов. Как видно из формул (4.4.13) и (4.4.15), спинорные произведения имеют компактный вид. По аналогичной схеме несложно вычислить и фермионные токи с матрицами Дирака (см. раздел 4.5).

## 4.5 Примеры расчетов на основе МБС

В качестве примеров применения Метода Базисных Спиноров рассмотрим вычисление матричных элементов процессов с уча-



стием  $e^-, e^+$ . Для таких реакций имеется достаточно много примеров и такие вычисления будут тестом МБС. Как увидим ниже, представленные результаты имеют относительно компактный вид. Эти примеры показывают простоту использования, с одной стороны, и вычислительную мощь, с другой стороны, излагаемой техники. Все расчеты производились с помощью простейшей “rule-based” программы, в которой реализованы основные соотношения МБС (см. [35, 46]).

#### 4.5.1 Реакция $e^-e^+ \rightarrow W^+W^-$

Для иллюстрации техники МБС начнем с процесса

$$e^-(p_1, \lambda_1) + e^+(p_2, \lambda_2) \rightarrow W^-(k_1, \alpha) + W^+(k_2, \beta), \quad (4.5.1)$$

где 4-импульсы и спиновые индексы указаны в скобках. Реакция (4.5.1) в борновском приближении описывается диаграммами, изображенными на рисунке 4.1.

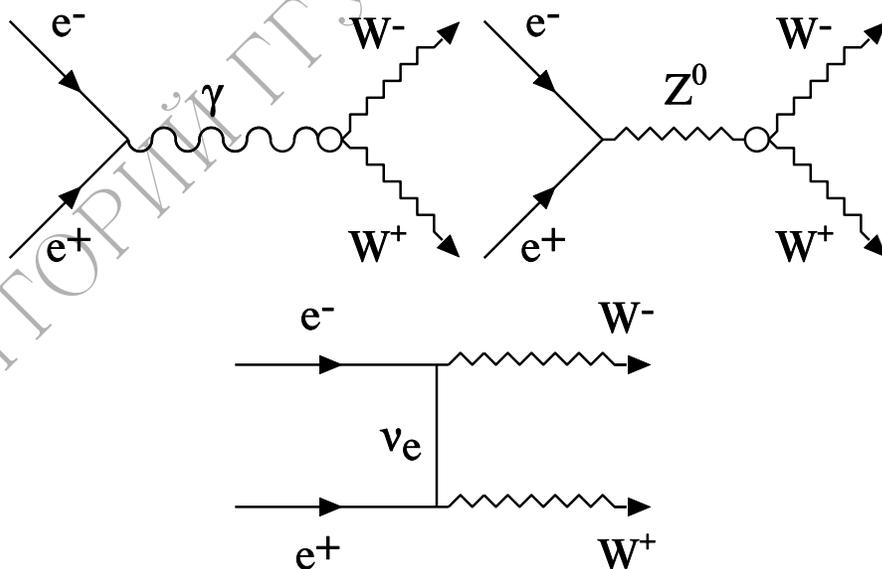


Рисунок 4.1– Фейнмановские диаграммы для  $e^-e^+ \rightarrow W^-W^+$  в борновском приближении

Амплитуда процесса может быть записана в виде

$$M_{e^+e^- \rightarrow W^+W^-} = M_{\gamma Z} + M_{\nu}, \quad (4.5.2)$$



$$M_{\gamma Z} = \frac{4\pi\alpha}{P^2} \left[ \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma^\mu u_{\lambda_1}(p_1) - \frac{P^2 \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) u_{\lambda_1}(p_1)}{2(P^2 - m_Z^2 + im_Z \Gamma_Z) \sin^2 \theta_W} \right] \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}(P, k_1, k_2) \varepsilon^\alpha(k_1) \varepsilon^\beta(k_2) \quad (4.5.3)$$

$$M_\nu = \frac{\pi\alpha}{2Q^2 \sin^2 \theta_W} \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \hat{\varepsilon}(k_2) (1 - \gamma_5) \hat{Q} \hat{\varepsilon}(k_1) (1 - \gamma_5) u_{\lambda_1}(p_1) \quad (4.5.4)$$

где величины  $g_A^e$ ,  $g_V^e$  – аксиальная и векторная константы связи электронов соответственно,  $\Gamma_Z$  – ширина  $Z^0$ -бозона. Лоренц-тензор  $\tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}(P, k_1, k_2)$  связан с трехбозонной вершиной  $\Gamma_V^{\mu\alpha\beta}(P, k_1, k_2)$ ,  $V = \gamma, Z$  в СМ

$$\begin{aligned} \Gamma_V^{\mu\alpha\beta}(P, k_1, k_2) &= g_{WWV} \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}(P, k_1, k_2), \\ \tilde{\Gamma}^{\mu\alpha\beta}(P, k_1, k_2) &= g^{\alpha\beta} (k_1 - k_2)^\mu + 2(P^\alpha g^{\mu\beta} - P^\beta g^{\mu\alpha}) \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

с  $g_{WW\gamma} = 1$  и  $g_{WWZ} = \text{ctg} \theta_W$  (без фактора, связанного с электрическим зарядом  $e$ ).

В уравнениях (4.5.3) и (4.5.4) также использованы следующие обозначения:  $\alpha$  и  $\theta_W$  являются постоянной тонкой структуры и углом Вайнберга-Салама соответственно, векторы  $\varepsilon_\alpha(k_1)$ ,  $\varepsilon_\beta(k_2)$  – векторы поляризации  $W$ -бозонов и 4-импульсы  $P, Q$  определяются посредством соотношений  $P = p_1 + p_2$ ,  $Q = p_1 - k_1$ .

Расчет матричных элементов (4.5.3), (4.5.4) проведем в системе центра инерции  $e^+e^-$ . В этой системе отсчета физические векторы процесса (4.5.1) имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, \beta_e), \quad k_1 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, \beta_W \sin \theta, 0, \beta_W \cos \theta), \\ p_2 &= \frac{\sqrt{s}}{2} (1, 0, 0, -\beta_e), \quad k_2 = \frac{\sqrt{s}}{2} (1, -\beta_W \sin \theta, 0, -\beta_W \cos \theta), \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\nu_1}^\mu(k_1) &= \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos \theta, i \nu_1, -\sin \theta), \quad \varepsilon_{\nu_2}^\mu(k_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} (0, \cos \theta, -i \nu_2, -\sin \theta), \\ \varepsilon_0^\mu(k_1) &= \gamma_W (\beta_W, \sin \theta, 0, \cos \theta), \quad \varepsilon_0^\mu(k_2) = \gamma_W (\beta_W, -\sin \theta, 0, -\cos \theta), \end{aligned} \quad (4.5.7)$$



где использованы обозначения и функции:  $s = (p_1 + p_2)^2$ ,  $\beta_W = \sqrt{1 - 4m_W^2/s}$ ,  $\beta_e = \sqrt{1 - 4m_e^2/s}$ ,  $\gamma_W = \sqrt{s}/(2m_W)$ ,  $\nu_1, \nu_2 = \pm 1$  и  $\theta$  - угол рассеяния  $W^-$ -бозона в с.ц.и.

С помощью коэффициентов разложения (4.4.4) и соотношения (4.2.6) преобразуем ток спиральных массивных фермионов (см. (4.5.3))

$$\begin{aligned} j_{\lambda_2, \lambda_1}^\mu [p_2, p_1] &= \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma^\mu u_{\lambda_1}(p_1) = \\ &= \sum_{\sigma, \rho=-1}^1 \sum_{A, C=-1}^1 \bar{s}_{\lambda_2, \sigma}^{(C, -1)}(p_2) \Gamma_{\sigma, \rho}^{C, A}[\gamma^\mu] s_{\rho, \lambda_1}^{(A, 1)}(p_1) \end{aligned} \quad (4.5.8)$$

в лоренц-вектор, состоящий из векторов изотропной тетрады

$$\begin{aligned} j_{\lambda_2, \lambda_1}^\mu [p_2, p_1] &= \sum_{\sigma=-1}^1 W_{m_e}(\lambda_2 \sigma p_2) W_{m_e}(-\lambda_1 \sigma p_1) \times \\ &\times \left( \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \lambda_1 \sigma \tilde{b}_{\lambda_1 \times \sigma}^\mu - \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \tilde{n}_{\lambda_1}^\mu \right). \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

Используя формулы (4.4.5) и (4.5.6), преобразуем выражение (4.5.9) к виду

$$j_{\lambda_2, \lambda_1}^\mu [p_2, p_1] = (-1) \sqrt{s} \left[ \frac{m_e}{\sqrt{s}} \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \sum_{\sigma=-1}^1 (-\sigma) \tilde{b}_\sigma^\mu + \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \tilde{n}_{\lambda_1}^\mu \right]. \quad (4.5.10)$$

Аналогичные расчеты для тока, входящего в диаграмму с  $Z^0$ -бозоном приводит к соотношению

$$\begin{aligned} j_{\lambda_2, \lambda_1}^\mu [p_2, p_1] &= \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma^\mu (g_V^e - g_A^e \gamma_5) u_{\lambda_1}(p_1) = (-1) \sqrt{s} \times \\ &\times \left[ \frac{m_e}{\sqrt{s}} \delta_{\lambda_2, \lambda_1} \left( \sum_{\sigma=-1}^1 (-\sigma) g_{\sigma \times \lambda_1}^e \tilde{b}_\sigma^\mu \right) + \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} (g_V^e - \lambda_1 \beta_e g_A^e) \tilde{n}_{\lambda_1}^\mu \right] \end{aligned} \quad (5.11)$$

где  $g_\lambda^e = (g_V^e + \lambda g_A^e)$ ,  $\lambda = \pm 1$ .



Как следует из (4.5.10) и (4.5.11), порядок вкладов, связанных с массой электрона определяется величиной  $m_e/\sqrt{s}$  и для коллайдера LEP200 ( $\sqrt{s} = 200$  ГэВ) составляет  $\approx 2,5 \times 10^{-6}$ , а при  $\sqrt{s} = 500$  ГэВ величина  $m_e/\sqrt{s} \approx 10^{-6}$ . При исследовании возможных ограничений на аномальные параметры трехбозонных вершин, такие слагаемые дают малый вклад по сравнению с возможными вкладами аномальных параметров и ими можно пренебречь.

С помощью (4.5.10) и (4.5.11) запишем выражение для фейнмановских диаграмм с обменом  $\gamma$  и  $Z^0$ -бозоном в терминах скалярных произведений физических векторов и векторов изотропной тетрады для безмассовых фермионов:

$$\begin{aligned}
 M_{\gamma Z} &= 4\pi\alpha \frac{\delta_{-\lambda_2, \lambda_1}}{\sqrt{s}} \left( \frac{g_{-\lambda_1}^e \chi(s)}{2 \sin^2 \theta_W} - 1 \right) \tilde{n}_{\lambda_1}^\mu \tilde{\Gamma}_{\mu\alpha\beta}(P, k_1, k_2) \varepsilon^\alpha(k_1) \varepsilon^\beta(k_2) = \\
 &= 4\pi\alpha \frac{\delta_{-\lambda_2, \lambda_1}}{\sqrt{s}} \left( \frac{g_{-\lambda_1}^e \chi(s)}{2 \sin^2 \theta_W} - 1 \right) [(\varepsilon(k_1) \varepsilon(k_2)) ((k_1 - k_2) \tilde{n}_{\lambda_1}) + \\
 &+ 2((P \varepsilon(k_1)) (\varepsilon(k_2) \tilde{n}_{\lambda_1}) - (P \varepsilon(k_2)) (\varepsilon(k_1) \tilde{n}_{\lambda_1}))], \quad (4.5.12)
 \end{aligned}$$

где  $\chi(s) = s / (s - m_Z^2 + im_Z \Gamma_Z)$ .

Следующий шаг состоит в вычислении диаграммы с обменом нейтрино. Поскольку в расчетах пренебрегается массой электрона, то если использовать соотношения (4.2.7), амплитуда (4.5.4) может быть переписана в виде:

$$\begin{aligned}
 M_\nu &= \frac{\pi\alpha(1 - \lambda_1)}{Q^2 \sin^2 \theta_W} \bar{u}_{-\lambda_2}(p_2) \hat{\varepsilon}(k_2) \hat{Q} \hat{\varepsilon}(k_1) u_{\lambda_1}(p_1) = \\
 &= \frac{2\pi\alpha \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \delta_{\lambda_1, -1} \mathcal{B}_{-1, \lambda_1}^{\{p_2, \varepsilon(k_2), Q, \varepsilon(k_2), p_1\}}}{Q^2 \sin^2 \theta_W (p_1 \tilde{b}_{-1}) (p_2 \tilde{b}_{-1})}. \quad (4.5.13)
 \end{aligned}$$

Применяя рекурсивные соотношения (4.2.8), (4.2.9) и (2.2.6) можно найти матричный элемент с обменом нейтрино в терминах ска-



лярных произведений физических векторов и векторов изотропной тетрады.

Используя уравнения (4.5.12) и (4.5.13), несложно найти выражения в обычных для таких процессов переменных. Так для продольно поляризованных  $W$ -бозонов ( $\varepsilon(k_{1,2}) = \varepsilon_0(k_{1,2})$ ) получим, что

$$M_{\gamma Z}^{LL} = 4\pi\alpha \lambda_1 \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \left( \chi(s) \frac{g_{-\lambda_1}^e}{2 \sin^2 \theta_W} - 1 \right) \beta_W (2\gamma_W^2 + 1) \sin \theta \quad (4.5.14)$$

$$M_{\nu}^{LL} = \frac{4\pi\alpha}{\sin^2 \theta_W} \frac{\gamma_W^2}{\beta_W} \delta_{\lambda_2, -\lambda_1} \delta_{\lambda_1, -1} \left( 1 - \frac{1}{\gamma_W^4 (1 + \beta_W^2 - 2\beta_W \cos \theta)} \right) \sin \theta. \quad (4.5.15)$$

Отметим, что эта амплитуда (формулы (4.5.14), (4.5.15)) аналитически воспроизводит матричный элемент работы [47], полученное с помощью метода, представленного в [48].

#### 4.5.2 Реакция $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$

В качестве следующего применения техники МБС рассмотрим реакцию с массивными фермионами  $f, \bar{f}$  ( $f \neq e$ )

$$e^-(p_1, \lambda_1) + e^+(p_2, \lambda_2) \rightarrow f(k_1, \nu_1) + \bar{f}(k_2, \nu_2). \quad (4.5.16)$$

Фейнмановские диаграммы в борновском приближении представлены на рисунке 4.2, а амплитуда процесса записывается в виде

$$M_{e^+e^- \rightarrow f\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) = M_{\gamma}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) + M_{Z^0}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) \quad (4.5.17)$$

где

$$M_{\gamma}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) = (4\pi\alpha/s) Q_f \bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma_{\mu} u_{\lambda_1}(p_1) \bar{u}_{\nu_1}(k_1) \gamma^{\mu} v_{\nu_2}(k_2) \quad (4.5.18)$$

$$M_{Z^0}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) = (\pi\alpha/s) R_Z (g^{\mu\nu} - P^{\mu} P^{\nu} / m_Z^2)$$

$$\bar{v}_{\lambda_2}(p_2) \gamma_{\nu} (g_V^e - g_A^e \gamma_5) u_{\lambda_1}(p_1) \bar{u}_{\nu_1}(k_1) \gamma_{\mu} (g_V^f - g_A^f \gamma_5) v_{\nu_2}(k_2) \quad (4.5.19)$$

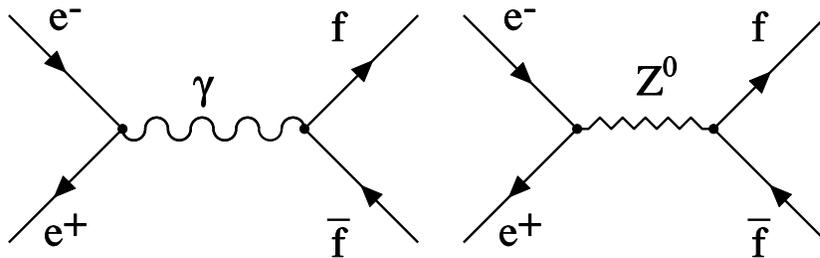


Рисунок 4.2– Диаграммы Фейнмана для реакции  $e^-e^+ \rightarrow f\bar{f}$

с  $R_Z = 1/(\cos^2 \theta_W \sin^2 \theta_W (s - m_Z^2 + im_Z \Gamma_Z))$ . Константы  $g_V^f, g_A^f$  являются константами связи массивных фермионов  $f$ , а величина  $Q_f$  – заряд фермиона  $f$  в единицах  $|e|$ .

Как следует из выражений для матричных элементов, они представляют собой скалярные произведения электронного и фермионного тока. Соотношения (4.5.18) и (4.5.19) могут быть переписаны в виде

$$M_\gamma(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) = 4\pi\alpha/s Q_f (j_{\lambda_2, \lambda_1}[p_2, p_1] j_{\nu_1, \nu_2}[k_1, k_2]) \quad (4.5.20)$$

$$M_{Z^0}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) = 4\pi\alpha/s R_Z \left[ \left( \tilde{j}_{\lambda_2, \lambda_1}[p_2, p_1] \tilde{j}_{\nu_1, \nu_2}[k_1, k_2] \right) - \frac{1}{m_Z^2} \left( \tilde{j}_{\lambda_2, \lambda_1}[p_2, p_1] P \right) \left( \tilde{j}_{\nu_1, \nu_2}[k_1, k_2] P \right) \right] \quad (4.5.21)$$

Скалярное произведение, входящее в (4.5.20), (4.5.21), несложно рассчитать, так имеются уже рассчитанные выражения (4.5.10) и (4.5.11) для электронных токов через 4-векторы фермионов и векторы изотропной тетрады. Как видим, в данном примере работает методика “строительных” блоков фейнмановских диаграмм. Согласно ей, скалярное произведение фермионных токов также может быть некоторым “строительным” блоком, рассчитанным заранее.

Для того чтобы получить аналитическое выражение матричных элементов (4.5.20) и (4.5.21), найдем выражение для ферми-



онных токов  $j_{\nu_1, \nu_2} [k_1, k_2]$  и  $\tilde{j}_{\nu_1, \nu_2} [k_1, k_2]$ . Поступая аналогично расчетам, приводящих к (4.5.10) и (4.5.11) находим, что в с.ц.и. (см. (4.5.6))

$$j_{\nu_1, \nu_2}^{\mu} [k_1, k_2] = \sqrt{s} \left( \delta_{\nu_1, -\nu_2} + \sqrt{\frac{2}{s}} m_f \delta_{\nu_1, \nu_2} \right) \times \left[ \sum_{\sigma=-1}^1 \left( d_{\sigma, \nu}^1(\theta) \tilde{n}_{-\sigma}^{\mu} + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} d_{0, \nu}^1(\theta) \tilde{b}_{\sigma}^{\mu} \right) \right], \quad (4.5.22)$$

$$\tilde{j}_{\nu_1, \nu_2}^{\mu} [k_1, k_2] = \sqrt{s} \left[ \left( \left[ g_V^f - \nu_1 \beta_f g_A^f \right] \delta_{\nu_1, -\nu_2} + \sqrt{\frac{2}{s}} m_f g_V^f \delta_{\nu_1, \nu_2} \right) \times \sum_{\sigma=-1}^1 \left( d_{\sigma, \nu}^1(\theta) \tilde{n}_{-\sigma}^{\mu} + \frac{\sigma}{\sqrt{2}} d_{0, \nu}^1(\theta) \tilde{b}_{\sigma}^{\mu} \right) + \delta_{\nu_1, \nu_2} \frac{\nu_1 m_f g_A^f}{\sqrt{s}} \sum_{\sigma=-1}^1 \tilde{b}_{\sigma}^{\mu} \right]. \quad (4.5.23)$$

Здесь число  $\nu = (\nu_1 - \nu_2)/2$ , а функция  $d_{\lambda, \nu}^1(\theta)$ , так называемая малая функция Вигнера индекса 1, определяет угловое распределение конечных фермионов. В (4.5.23) введена также вспомогательная функция  $\beta_f = \sqrt{1 - 4m_f^2/s}$ .

Используя выражения для токов (4.5.10), (4.5.11) и (4.5.22), (4.5.23) находим матричные элементы процесса  $e^- e^+ \rightarrow f \bar{f}$  для спиральных массивных фермионов с учетом всех возможных поляризационных состояний (т.е. для любых  $\lambda_{1,2} = \pm 1, \nu_{1,2} = \pm 1$ ) в компактной форме:

$$M_{\gamma}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) = (-1) 8\pi\alpha Q_f \left( \delta_{\nu_1, -\nu_2} + \sqrt{\frac{2}{s}} m_f \delta_{\nu_1, \nu_2} \right) \times \left( \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} d_{\lambda_1, \nu}^1(\theta) + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sqrt{\frac{2}{s}} m_e d_{0, \nu}^1(\theta) \right), \quad (4.5.24)$$



$$\begin{aligned}
 M_{Z^0}(\lambda_1, \lambda_2; \nu_1, \nu_2) = & (-2)\pi\alpha s R_Z \times \\
 & \times \left[ \left( \left[ g_V^f - \nu_1 \beta_f g_A^f \right] \delta_{\nu_1, -\nu_2} + \delta_{\nu_1, \nu_2} \sqrt{\frac{2}{s}} m_f g_V^f \right) \times \right. \\
 & \times \left( \delta_{\lambda_1, -\lambda_2} d_{\lambda_1, \nu}^1(\theta) (g_V^e - \lambda_1 \beta_e g_A^e) + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \sqrt{\frac{2}{s}} m_e g_V^e d_{0, \nu}^1(\theta) \right) + \\
 & \left. + \delta_{\lambda_1, \lambda_2} \delta_{\nu_1, \nu_2} \frac{\lambda_1 \nu_1 m_e m_f g_A^e g_A^f}{s} \left( 1 - \frac{m_Z^2}{s} \right) \right]. \quad (4.5.25)
 \end{aligned}$$

Отметим, что скалярное произведение фермионов токов просто сводится к скалярным произведениям векторов изотропной тетрады (1.3.6). Данная процедура намного проще, чем аналогичная операция в спинорной технике [37, 38, 49, 50] и методов с использованием шпуров [51–53]. И что важно, что при использовании МБС не происходит быстрого роста числа слагаемых, как это имеет место в вышеупомянутых методах вычислений.

Заметим, что амплитуды (4.5.24) и (4.5.25) при  $m_e = 0$  совпадают с точностью до фазового множителя амплитудами, которые были получены для разных спиновых конфигураций в работе [54] с использованием “шпурового” метода расчета матричных элементов. В качестве теста, можно убедиться в том, что соответствующие сечения с неполяризованными фермионами, полученные с помощью матричных элементов (4.5.24) и (4.5.25), совпадают с хорошо известным выражением дифференциального сечения при  $m_e = 0$  (см., например, [7]).

Аналогично можно рассчитать амплитуду процесса (4.5.16) и другими поляризационными состояниями конечных фермионов [11, 44].

Метод базисных спиноров сочетает в себе достоинства как методов, основанных на расчетах шпуров, так и методик с использованием спинорной техники. Предлагаемая техника вычислений



может быть реализована в компьютерных системах аналитических вычислений, таких как `Mathematica` [55], `Maple` [56], `Reduce` [57], `Form` [58]. Простой алгоритм позволяет дополнить уже созданные пакеты, такие как `FeynArts`, [59], `FeynCalc` [3], `HIP` [60] и другие, относительно несложной rule-based программой (см. о программе [35, 46, 61–63]). Рекурсивная техника позволяет полностью автоматизировать процесс вычислений.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ



## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Hahn, T. Generating Feynman diagrams and amplitudes with FeynArts 3 / T. Hahn // *Comput. Phys. Commun.* — 2001. — Vol. 140. — P. 418–431.
2. Hahn, T. Automatic loop calculations with FeynArts, FormCalc, and LoopTools / T. Hahn // *Nucl. Phys. Proc. Suppl.* — 2000. — Vol. 89. — P. 231–236.
3. Mertig, R. FEYNALC: Computer algebraic calculation of Feynman amplitudes / R. Mertig, M. Böhm, A. Denner // *Comput. Phys. Commun.* — 1991. — Vol. 64. — P. 345–359.
4. Окунь, Л. Б. Физика элементарных частиц / Л. Б. Окунь. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит-ры, 1988. — 272 с.
5. Пуанкаре, А. О динамике электрона. / А. Пуанкаре // В кн.: *Принцип относительности: Сб. работ классиков релятивизма.* — М.: Атомиздат, 1973, с. 90–93, 118–160.
6. Фушич, В. И. Симметрия уравнений Максвелла / В. И. Фушич, А. Г. Никитин. — Киев: Наукова думка, 1983. — 200 с.
7. Borodulin, V. I. CORE -COmpendium of RElations / V. I. Borodulin, R. N. Rogalev, S. R. Slabospitsky. — Protvino, Russia: ИИЕР, 1995. — 108 P. — (Preprint ИИЕР 95-90).
8. Сикач, С. М. Матричные элементы диагональных амплитуд / С. М. Сикач // *Весті АН БССР. Сер. фіз.-мат. наук.* — 1984. № 2. — С. 84–93.
9. Galynskii, M. V. The diagonal spin basis and calculation of processes involving polarized particles / M. V. Galynskii, S. M. Sikach // *Phys. Part. Nucl.* — 1998. — Vol. 29. — P. 469–495.
10. Rogalev, R. N. The uses of covariant formalism in analytical computation of Feynman Diagrams with massive fermions / R. N.



Rogalev // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A. — 2003. — Vol. 502, N 2-3. — P. 602–604.

11. Andreev, V. V. Spinor techniques for massive fermions with arbitrary polarization / V. V. Andreev // Phys. Rev. D. — 2000. — Vol. 62, N 1. — P. 014029–1–014029–8. — (E-print archivD: hep-ph/0101140).

12. Electroweak corrections to charged-current  $e^+e^- \rightarrow 4$  fermion processes: Technical details and further results / A. Denner, S. Dittmaier, M. Roth, L. H. Wieders // Nucl. Phys. — 2005. — Vol. B724. — P. 247–294.

13. Bondarev, A. L. Methods of minimization of calculations in high energy physics. II: Minimization of number of vectors in problem / A. L. Bondarev. — 1997.

14. Бюклинг, Е. Кинематика элементарных частиц / Е. Бюклинг, К. Каянти. — Москва: Мир, 1975. — 344 с.

15. Богущ, А. А. Введение в калибровочную полевую теорию электрослабых взаимодействий / А. А. Богущ. — Минск: Наука и техника, 1987. — 359 с.

16. Новожилов, Ю. В. Введение в теорию элементарных частиц / Ю. В. Новожилов. — Москва: Наука, 1972. — 472 с.

17. Биленький, С. М. Введение в диаграммы Фейнмана и физику электрослабого взаимодействия / С. М. Биленький. — Москва: Энергоатомиздат, 1990. — 327 с.

18. Федоров, Ф. И. Группа Лоренца / Ф. И. Федоров. — Москва: Наука, 1979. — 384 с.

19. Ballestrero, A. A new method for helicity calculations / A. Ballestrero, E. Maina // Phys. Lett. — 1995. — Vol. B350. — P. 225–233.

20. Cherzor, P. S. Optimization of symbolic evaluation of he-



licity amplitudes [Electronic resource] / P. S. Chervor, V. A. Ilyin, A. E. Pukhov. — 2001. — Mode of access: <http://arxiv.org/pdf/hep-ph/0101265>. — Date of access: 14.01.2008.

21. Kleiss, R. Hard bremsstrahlung amplitudes for  $e^+e^-$  collisions with polarized beams at LEP/SLC energies / R. Kleiss // *Z. Phys.* — 1987. — Vol. C 33. — P. 433–443.

22. Kleiss, R. Spinor techniques for calculating  $p\bar{p} \rightarrow W^\pm/Z^0 + \text{jets}$  / R. Kleiss, W. J. Stirling // *Nucl. Phys.* — 1985. — Vol. B 262. — P. 235–262.

23. Богуш, А. А. Введение в полевую теорию элементарных частиц / А. А. Богуш. — Минск: Наука и техника, 1981. — 390 с.

24. Хелзен, Ф. Кварки и лептоны. Введение в физику частиц / Ф. Хелзен, А. Мартин. — Москва: Мир, 1987. — 456 с.

25. Гольданский, В. И. Кинематические методы в физике высоких энергий / В. И. Гольданский, Ю. П. Никитин, И. Л. Розенталь. — Москва: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит-ры, 1987. — 200 с.

26. Строковский, Е. А. Лекции по основам кинематики элементарных процессов : учебное пособие / Е. А. Строковский. — Москва: Университетская книга, 2010. — 298 с.

27. Пилькун, Х. Физика релятивистских частиц / Х. Пилькун. — Москва: Мир, 1983. — 542 с.

28. Kleiss, R. Pictures, Paths, Particles, Processes. Feynman Diagrams And All That And The Standard Model / R. Kleiss. — IMAPP, Radboud University, Nijmegen, the Netherlands, 2008. — P. 289. — <http://www.hef.ru.nl/kleiss/qft.pdf> <http://www.hef.ru.nl/~kleiss/qft.pdf>.

29. Ахиезер, А. И. Квантовая электродинамика / А. И. Ахиезер, В. Б. Берестецкий. — Москва: Наука, 1981. — 432 с.



30. Бьеркен, Д. Д. Релятивистская квантовая теория: в 2 т. / Д. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл. — Москва: Наука, 1978. — Т.1: Релятивистская квантовая механика. — 296 с.

31. Вайнберг, С. Квантовая теория полей: в 3 т. / С. Вайнберг. — Москва: Мир, 2001. — 2 т.

32. Берестецкий, В. Б. Теоретическая физика: в 10 т. / В. Б. Берестецкий, Е. М. Лившиц, Л. П. Питаевский. — 3-е изд., испр. — Москва: Наука. Главная ред. физ.-мат. лит-ры, 1989. — Т.IV: Квантовая электродинамика — 728 с.

33. Пескин, М. Е. Введение в квантовую теорию поля / М. Е. Пескин, Д. В. Шрёдер. — Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика", 2001. — 784 с.

34. Шишкина, Т. В. Физика элементарных частиц: Курс лекций / Т. В. Шишкина, Н. М. Шумейко. — Минск: БГУ, 2002. — 112 с.

35. Андреев, В. В. Аналитические вычисления для амплитуд процессов с участием элементарных частиц / В. В. Андреев, А. М. Сейтлиев // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. — 2006. — № 6(39), часть 2. — С. 36–39.

36. Berends, F. A. Recursive calculations for processes with  $n$  gluons / F. A. Berends, W. T. Giele // Nucl. Phys. — 1988. — Vol. B306. — P. 759–808.

37. Berends, F. A. The six-gluon process as an example of Weyl-Van der Warden spinor calculus / F. A. Berends, W. T. Giele // Nucl. Phys. — 1987. — Vol. B294. — P. 700–732.

38. Dittmaier, S. LUSIFER: A LUCid approach to Six FERmion production / S. Dittmaier, M. Roth // Nucl. Phys. — 2002. — Vol. B642. — P. 307–343.

39. Accomando, E. WPHACT 2.0: A fully massive Monte-Carlo



generator for four fermion physics at  $e^+e^-$  colliders / E. Accomando, A. Ballestrero, E. Maina // *Comput. Phys. Commun.* — 2003. — Vol. 150. — P. 166–196.

40. Андреев, В. В. Релятивистский межкварковый потенциал / В. В. Андреев, А. А. Ючко // *Известия Вузов. Физика.* — 2006. — № 11. — С. 87–94.

41. Андреев, В. В. Пуанкаре-ковариантные модели двухчастичных систем с квантовополевыми потенциалами / В. В. Андреев. — Гомель: УО “Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины”, 2008. — 294 с.

42. Бьеркен, Д. Д. Релятивистская квантовая теория: в 2 т. / Д. Д. Бьеркен, С. Д. Дрелл. — Москва: Наука, 1978. — 2 т.

43. Газиорович, С. Физика элементарных частиц / С. Газиорович. — Москва: Наука, 1969. — 744 с.

44. Андреев, В. В. Аналитическое вычисление фейнмановских амплитуд / В. В. Андреев // *Ядерная физика.* — 2003. — Т. 66, № 2. — С. 410–420.

45. Андреев, В. В. Методы вычисления амплитуд в квантово-полевых теориях и моделях / В. В. Андреев. — Гомель: УО “Гомельский государственный университет им.Ф. Скорины”, 2004. — 235 с.

46. Andreev, V. V. Analytical calculation of  $S$ -matrix elements of reaction with fermions / V. V. Andreev // *Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A.* — 2003. — Vol. 502, N 2-3. — P. 607–609.

47. Hagiwara, K. Helicity amplitudes for heavy lepton production in  $e^+e^-$  annihilation / K. Hagiwara, D. Zeppenfeld // *Nucl. Phys.* — 1986. — Vol. B274. — P. 1–32.

48. Probing the weak boson sector in  $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$  / K. Hagiwara, R. D. Peccei, D. Zeppenfeld, K. Hikasa // *Nucl. Phys.* — 1987.



— Vol. B282. — P. 253–307.

49. Jadach, S. Global positioning of spin GPS scheme for half spin massive spinors / S. Jadach, B. Ward, Z. Was // Eur.Phys.J. — 2001. — Vol. C22. — P. 423–430.

50. Андреев, В. В. Улучшенная спинорная техника расчетов амплитуд процессов с массивными фермионами / В. В. Андреев // Известия ВУЗов. Физика. — 2000. — № 11. — С. 9–14.

51. Caffo, M. Evaluation of transient amplitudes between Dirac spinors / M. Caffo, E. Remiddi // Helvetica Phys. Acta. — 1982. — Vol. 55. — P. 339–347.

52. Бондарев, А. Л. Техника ковариантного вычисления амплитуд процессов с участием поляризованных частиц со спином  $1/2$  и ее применение к расчетам интерференционных членов в сечениях таких процессов / А. Л. Бондарев // ТМФ. — 1993. — Т. 96, № 1. — С. 96–108.

53. Галынский, М. В. Диагональный спиновый базис и вычисление процессов с поляризованными частицами / М. В. Галынский, С. М. Сикач // ЭЧАЯ. — 1998. — Т. 29. — С. 1133–1193.

54. Vega, R. A covariant method for calculating helicity amplitudes / R. Vega, J. Wudka // Phys. Rev. — 1996. — Vol. D53. — P. 5286–5292. — *Erratum*: Phys. Rev. — 1997. — Vol. D56. — P.6037–6038.

55. Wolfram, S. The Mathematica book / S. Wolfram. — 4th edition. — Addison-Wesley, 1999.

56. Char, B. W. Maple V Language Reference Manual / B. W. Char [et al.]. — Springer, 1991.

57. Hearn, A. C. REDUCE user's manual Version 3.5 / A. C. Hearn. — Santa Monica, 1993. — 112 P. — (Preprint RAND publication).



58. Vermaseren, J. A. M. Symbolic Manipulation with FORM / J. A. M. Vermaseren. — Amsterdam: Computer Algebra Netherlands, 1991.

59. Küblbeck, J. FeynArts: computer algebraic generation of Feynman graphs and amplitudes / J. Küblbeck, M. Böhm, A. Denner // Comp. Phys. Commun. — 1990. — Vol. 60. — P. 165–190.

60. Hsieh, A. HIP: Symbolic high-energy physics calculations / A. Hsieh, E. Yehudai // Comput. Phys. — 1992. — Vol. 6. — P. 253–261.

61. Andreev, V. V. Analytical calculation of quantum electrodynamics  $S$ -matrix / V. V. Andreev // Nuclear Inst. and Methods in Physics Research, A. — 2003. — Vol. 502, N 2-3. — P. 605–606.

62. Andreev, V. V. MBSCalc program for FeynArts package / V. V. Andreev, A. M. Seytliyev // Proc. of Int. school-seminar “Actual problems of Microworld Physics”, 28 July - 8 August 2003, Gomel, Belarus / ed. by P. Starovoitov JINR. — Vol. 2. — Dubna: JINR, 2004. — P. 112–118.

63. Andreev, V. V. Programm for analytical evaluation of “FeynArts” matrix element / V. V. Andreev, A. M. Seytliyev // Proceedings of the XIIIth Annual Seminar NPC'S'2005 “Nonlinear phenomena in complex systems”, May 17-20, 2005, Minsk, Belarus / ed. by V. I. Kuvshinov, L. Babichev Joint Institute of Power and Nuclear Research. — Minsk: Joint Institute of Power and Nuclear Research, 2005. — P. 15–19.



## Явный вид матриц Гелл-Манна

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_8 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$