$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z_1^2 Z_2^2}{\hbar^4 |\vec{k}_0 - \vec{k}|^4} \qquad (16)$$

или с использованием (9)

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4Z_1^2 Z_2^2}{16E^2} \sin^{-4}\left(\frac{\theta}{2}\right), \qquad (17)$$

где было использовано определение $E = \hbar^2 k_0^2 / 2m$. Полученное выражение называют формулой Резерфорда [3].

Заключение. В ходе работы было получено выражение для рассеянной волны в борновском приближении. Полученное выражение использовано для вычисления дифференциального сечения для сферически-симметричного потенциала. Как результат работы получена известная формула Резерфорда.

Литература

1. Давыдов, А. С. Квантовая механика: учебное пособие / С. А. Давыдов. – Спб.: БХВ-Петербург, 2011. – 704 с.
2. Ландау, Л. Д., Лифшиц, Е. М. Курс теоретической физики в 10 томах. Т.3. Квантовая механика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. – М.: Физматлит, 2008. – 800 с.
3. Блохинцев, Д. И. Основы квантовой механики: учебное пособие / Д. И. Блохинцев. – М.: Наука, 1976. – 664 с.

А. В. Ивашкевич
(Институт физики НАН Беларуси, Минск)
Науч. рук. **В. М. Редьков**, д-р физ.-мат. наук

СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ БЕЗМАССОВОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2, КАЛИБРОВОЧНАЯ СИММЕТРИЯ

После работ Паули–Фирца [1] и Рариты–Швингера [2] в физической литературе всегда присутствовал интерес к теории частиц с высшими спинами, в том числе и к частице со спином 3/2 [3]. Для описания такой частицы требуется 16 компонентная волновая функция с трансформационными свойствами вектор-биспинора относительно группы Лоренца. Отдельный интерес представляет случай безмассовой частицы со спином 3/2. Как показали Паули и Фирц [1], здесь существует специфическая калибровочная симметрия, выражающаяся в том, что 4-градиент от произвольной биспинорной функции дает решения безмассового волнового уравнения. Т. е. в безмассовом случае среди множества решений волнового уравнения всегда присутствуют 4 калибровочные, которые являются физически ненаблюдаемыми, поскольку не дают вклада в тензор энергии-импульса частицы. В данной работе мы проследим за степенями свободы безмассовой частицы со спином 3/2 на основе построения решений типа плоских волн в явном виде, и найдем те решения, которые не содержат калибровочных компонент.

Уравнение для безмассового поля со спином 3/2 может быть приведено к виду

$$\partial_a (\bar{\Gamma})_m^{\ k} \bar{\Psi}_k = 0, \quad -\partial_a [i\gamma^5 \varepsilon_m^{\ akn} \gamma_n] \Psi_k = 0 . \tag{1}$$

Вектор-биспинор в виде градиента от произвольного биспинора $\Phi(x)$

$$\bar{\Psi}_k^{grad}(x) = \partial_k \Phi(x) \tag{2}$$

всегда будет решением уравнения (1). Это свойство иначе называют калибровочной симметрией. Уравнение (1) можно записать в безындексной форме, если вести 6 матриц:

$$\varepsilon_m^{\ nak} = (\mu^{[na]})_m^{\ k}, \quad \mu^{[na]} = -\mu^{[an]}; \quad -i\gamma^5 \gamma_n \partial_a \otimes \mu^{[na]} \bar{\Psi} = 0 , \tag{3}$$

Для простоты будем искать решения уравнения (3) в виде плоских волн, ориентированных вдоль оси x_3:

$$[\bar{\Psi}_{\alpha n}] = e^{-i\varepsilon t} e^{ikz} \bar{\Phi}, \quad \bar{\Phi}_{\alpha n} = \begin{vmatrix} \bar{f}_0 & \bar{f}_1 & \bar{f}_2 & \bar{f}_3 \\ \bar{g}_0 & \bar{g}_1 & \bar{g}_2 & \bar{g}_3 \\ \bar{h}_0 & \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 \\ \bar{d}_0 & \bar{d}_1 & \bar{d}_2 & \bar{d}_3 \end{vmatrix} . \tag{4}$$

После разделения переменных находим 16 уравнений:

$$I,\quad \begin{vmatrix} -ik & -i\varepsilon & 0 & -(k+\varepsilon) \\ k & \varepsilon & -(\varepsilon+k) & 0 \\ 0 & 0 & ik & -k \\ 0 & 0 & -i\varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{d}_0 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \mathrm{II},\quad \begin{vmatrix} ik & i\varepsilon & 0 & (\varepsilon-k) \\ -k & -\varepsilon & -(\varepsilon-k) & 0 \\ 0 & 0 & -ik & -k \\ 0 & 0 & i\varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{h}_0 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\mathrm{III},\quad \begin{vmatrix} -ik & -i\varepsilon & 0 & -(\varepsilon-k) \\ -k & -\varepsilon & (\varepsilon-k) & 0 \\ 0 & 0 & ik & -k \\ 0 & 0 & -i\varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{g}_0 \\ \bar{g}_3 \\ \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{vmatrix} = 0; \qquad \mathrm{IV},\quad \begin{vmatrix} ik & i\varepsilon & 0 & (k+\varepsilon) \\ -k & -\varepsilon & -(k+\varepsilon) & 0 \\ 0 & 0 & -ik & -k \\ 0 & 0 & i\varepsilon & \varepsilon \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{f}_0 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Будем строить решения, предполагая $\varepsilon > 0$. Это означает, что исследуем случай частиц. Положительность энергии возможна в двух случаях: $k > 0,\ \varepsilon = k$ и $k < 0,\ \varepsilon = -k$; следим за вариантом $k > 0$.Тогда приведенные выше уравнения упрощаются (сразу приводим их решения):

$$I,\quad \begin{vmatrix} -i & -i & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{d}_0 \\ \bar{d}_3 \\ \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \bar{d}_0 - \text{любое},\ \bar{d}_3 = -\bar{d}_0,\ \bar{h}_1 = 0,\ \bar{h}_2 = 0; \quad (5a)$$

$$II,\quad \begin{vmatrix} i & i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{h}_0 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \bar{h}_0,\ \bar{d}_2 - \text{любые},\ \bar{h}_3 = -\bar{h}_0,\ \bar{d}_1 = i\bar{d}_2; \quad (5b)$$

$$III,\quad \begin{vmatrix} -i & -i & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i & -1 \\ 0 & 0 & -i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{g}_0 \\ \bar{g}_3 \\ \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{vmatrix} = 0, \quad \bar{g}_0,\ \bar{f}_2 - \text{любые},\ \bar{g}_3 = -\bar{g}_0,\ \bar{f}_1 = -i\bar{f}_2; \quad (5c)$$

$$IV,\quad \begin{vmatrix} i & i & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -i & -1 \\ 0 & 0 & i & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{f}_0 \\ \bar{f}_3 \\ \bar{g}_1 \\ \bar{g}_2 \end{vmatrix} = 0, \bar{f}_0 - \text{любое},\ \bar{f}_3 = -\bar{f}_0,\ \bar{g}_1 = 0,\ \bar{g}_2 = 0. \quad (5d)$$

Общее решение можно разложить в суперпозицию 6-ти независимых:

$$\bar{\Phi}=\begin{vmatrix}\bar{f}_0 & 0 & 0 & -\bar{f}_0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ \bar{g}_0 & 0 & 0 & -\bar{g}_0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \bar{h}_0 & 0 & 0 & -\bar{h}_0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+$$

$$+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ \bar{d}_0 & 0 & 0 & -\bar{d}_0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & -i\bar{f}_2 & f_{\bar{2}} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i\bar{d}_2 & \bar{d}_2 & 0\end{vmatrix}. \qquad (6)$$

Калибровочные решения имеют вид (множитель $e^{-i\varepsilon t}e^{ikz}$ опускаем)

$$\bar{\Phi}_0^K=-i\varepsilon\begin{vmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{vmatrix},\quad \bar{\Phi}_1^K=0,\quad \bar{\Phi}_2^K=0,\quad \bar{\Phi}_3^K=ik\begin{vmatrix}L_1\\ L_2\\ L_3\\ L_4\end{vmatrix}, \qquad (7)$$

где $L_1,...,L_4$ – произвольные числовые параметры. Для матрицы общего калибровочного решения имеем представление (учитываем $\varepsilon = k > 0$)

$$\Phi^K=\begin{vmatrix}-iL_1 & 0 & 0 & iL_1\\ -iL_2 & 0 & 0 & iL_2\\ -iL_3 & 0 & 0 & iL_3\\ -iL_4 & 0 & 0 & iL_4\end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Замечаем, что первые четыре решения в суперпозиции (6) являются чисто калибровочными. Таким образом, остаются только два независимых решения:

$$\bar{\Phi}=\begin{vmatrix}0 & -i\bar{f}_2 & \bar{f}_2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & i\bar{d}_2 & \bar{d}_2 & 0\end{vmatrix}. \qquad (9)$$

Литература

1. Pauli, W. Ьber relativistische Feldleichungen von Teilchen mit beliebigem Spin im elektromagnetishen Feld / W. Pauli, M. Fierz // Helv.

Phys. Acta. – 1939. – Bd. 12. – S. 297–300; Fierz, M. On relativistic wave equations for particles of arbitrary spin in an electromagnetic field / M. Fierz, W. Pauli // Proc. Roy. Soc. London. A. – 1939. – Vol. 173. – P. 211–232.

2. Плетюхов, В. А. Релятивистские волновые уравнения и внутренние степени свободы / В. А. Плетюхов, В. М. Редьков, В. И. Стражев. – Минск: Беларуская навука, 2015. – 328 с.

3. Elementary Particles with Internal Structure in External Fields. Vol I. General Theory / V. V. Kisel, E. M. Ovsiyuk, O. V. Veko, Y. A. Voynova, V. Balan, V. M. Red'kov. – New York: Nova Science Publishers Inc., 2018. – 404 p.

А. В. Ивашкевич
(Институт физики НАН Беларуси, Минск)
Науч. рук. **В. М. Редьков**, д-р физ.-мат. наук

СТРУКТУРА ПЛОСКИХ ВОЛН ДЛЯ МАССИВНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 3/2

Для описания частицы со спином 3/2 [1–3] требуется 16 компонентная волновая функция с трансформационными свойствами вектор-биспинора относительно группы Лоренца. В работе исследуется вопрос о числе независимых степеней свободы для этого поля на основе построения в явном виде решений типа плоских волн.

Исходим из уравнения для массивной частицы, записанного в матричной форме в базисе Рариты–Швингера [2]:

$$\left[\partial_a (\Gamma^a)_k{}^l + \mu \beta_k{}^l\right]\Psi_l = 0\,, \tag{1a}$$

$$(\Gamma^a)_k{}^l = \gamma^a\ \delta_k^l - \frac{1}{3}\gamma^l \delta_k^a - \frac{1}{3}\gamma_k g^{al} + \frac{1}{3}\gamma_k \gamma^a \gamma^l, \quad \beta_k{}^l = \delta_k{}^l - \frac{1}{3}\gamma_k \gamma^l\,; \tag{1b}$$

μ – некоторый массовый параметр. Учитывая формулу для произведения трех матриц Дирака, уравнение можно записать так:

$$\left[\partial_a (\frac{2}{3}\gamma^a\ \delta_k^l - \frac{i}{3}\gamma^5 \varepsilon_k{}^{aln}\gamma_n) + \mu(\delta_k{}^l - \frac{1}{3}\gamma_k \gamma^l)\right]\Psi_l = 0. \tag{1c}$$

В матричной форме оно принимает вид