

СВОЙСТВА КОЛЬЦЕВОГО ОПТИЧЕСКОГО РЕЗОНАТОРА С РАЗЪЮСТИРОВАННОЙ ПРОСТРАНСТВЕННО НЕОДНОРОДНОЙ СРЕДОЙ

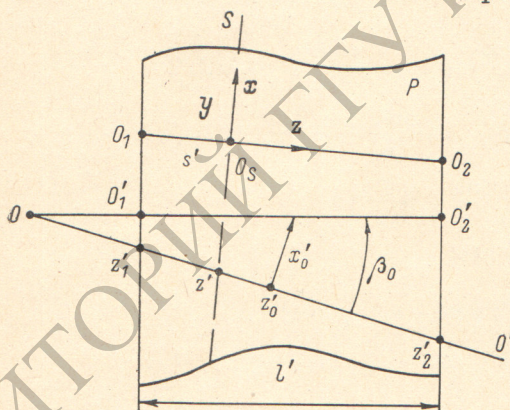
В. Ф. Бойцов и А. Г. Владимиров

Показано, что существует различие в пространственном распределении полей встречных волн, обусловленное разъюстировкой. Она приводит к тому, что оси каустик встречных волн не совпадают, и встречные пучки на торцах среды и на зеркалах образуют два пятна. Фазовые фронты испытывают поворот и изменяют свою кривизну. Частотный спектр резонатора содержит добавку, линейную по разъюстировке.

Рассмотрим кольцевой резонатор, состоящий из двух плоских и одного сферического зеркала радиуса R . Зеркала полагаем достаточно большими и пренебрегаем дифракцией на их краях. Внутри резонатора находится среда P с комплексным показателем преломления, изменяющимся по «квадратичному» закону

$$n(r) = 1 + \frac{\chi^{(1)}}{kl'} \left(1 - \frac{N_p k}{L} r^2 \right),$$

$$N_p = \frac{L}{ka_p^2}. \quad (1)$$



Система координат, описывающая разъюстированную среду P .

Орт y ортогонален плоскости чертежа. Сечение S ортогонально линии $O_1 O_2$ и находится на расстоянии s' от левого торца среды P .

Здесь r — расстояние, отсчитываемое от оси симметрии среды $O'_1 O'_2$ (см. рисунок), k — волновое число, L — длина осевого контура пустого резонатора, a_p — эффективный поперечный размер среды P . $\chi^{(1)} = \chi_1^{(1)} - i\chi_2^{(1)}$, где $\chi_1^{(1)}$ характеризует дисперсию вещества, а $\chi_2^{(1)}$ — его усиление на оси $O'_1 O'_2$. Разъюстировка среды P происходит в плоскости осевого контура и задается с помощью смещения центра среды на x'_0 и поворота ее оси на угол β_0 относительно оптической оси OO' пустого резонатора. Предполагается выполнение неравенств

$$x_0 \equiv x'_0/L \ll 1, \quad \beta_0 \ll 1.$$

Координаты торцов среды z'_1 и z'_2 и ее центра z'_0 отсчитываются от сферического зеркала. $O_1 O_2$ — часть осевого контура резонатора с учетом разъюстировки среды. Расчет этого контура для «короткой» трубки ($l' \ll L$) в приближениях «неоднородной» и «однородной» в поперечном направлении среды, обеспечивающих устойчивость оптической оси при разъюсти-

ровке, приведен в [1]. Вычисления проведены с точностью до величин, линейных по разъюстировке.

Для приближения «неоднородной» среды при разъюстировке сдвиг осевого луча пропорционален $\chi_1^{(1)} N_p x'_0 / L$ и не зависит от β_0 . Для приближения «однородной» среды сдвиг осевого луча пропорционален $\chi_1^{(1)} / kL \beta_0$ и не зависит от x'_0 .

Поля встречных волн в резонаторе, его пороговое усиление и частотный спектр рассчитаны нами методом интегральных уравнений [2].

Приведем формулы для пространственного распределения поля основной моды для волны, распространяющейся внутри среды по часовой стрелке

$$\Phi(x', y', z') = \prod_{\tau=x, y} C_{\tau}(z) \varphi_{\tau}(\tau) \varphi_{1\tau}(\tau) \varphi_{2\tau}(\tau). \quad (2)$$

Здесь x' , y' и z' — размерные координаты, отсчитываемые вдоль ортов прямоугольной системы (x, y, z) , изображенной на рисунке,

$$x = x' \sqrt{k/L}, \quad y = y' \sqrt{k/L}, \quad z = z'/L. \quad (3)$$

Функция $\varphi_{\tau}(\tau) = \exp\{-Q_{0\tau}(z) \tau^2/2\}$ не зависит от разъюстировки, выражение для $Q_{0\tau}(z)$ содержится в [2, 3]. Функция $\varphi_{1\tau}(\tau)$ не зависит от разъюстировки и имеет вид

$$\varphi_{1\tau}(\tau) = \exp\left\{-\frac{\chi^{(1)}}{2kL} W_{\tau}(z) \tau^2\right\}, \quad (4)$$

$w_{\tau}(z)$ приведено в Приложении. Функция $\varphi_{2\tau}(\tau)$ определяется разъюстировкой

$$\varphi_{2\tau}(\tau) = \exp\left\{-\frac{1}{2} [\Delta A_{\tau} \tau^2 - i \Delta B_{\tau} \tau^2 - i \Delta D_{\tau} \tau]\right\}. \quad (5)$$

Выражения ΔA_{τ} , ΔB_{τ} и ΔD_{τ} в приближении «неоднородной» и «однородной» среды приведены в Приложении.

В нашем случае функция $\Phi(x', y', z')$ удовлетворяет параболическому уравнению

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y'^2} + 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial z'} = -2k \left[\frac{\chi^{(1)}}{l'} - k_2(x'^2 + y'^2) + k_1 x' \right] \Phi, \quad (6)$$

аналогичному уравнению из работы [4]. Подставляя функцию Φ в виде (2) в уравнение (6), используя приближение «короткой» трубки и малость разъюстировки, получаем $k_2 = \chi^{(1)} N_p k / l' L$, $k_1 = 2\chi^{(1)} N_p x'_0 / l' L$ в случае «неоднородной» среды и $k_1 = 0$ — в случае «однородной». Тогда величина в квадратных скобках в формуле (6) может быть преобразована в выбранных приближениях к виду

$$\frac{\chi^{(1)}}{l'} \left[1 - \frac{N_p k}{L} ((x' - x'_0)^2 + y'^2) \right]$$

и пропорциональна коэффициенту диэлектрической восприимчивости из (1) для квадратичной среды, ось симметрии которой смещена относительно оптической оси на x'_0 . Одновременно с коэффициентами k_1 и k_2 из уравнения (6) определяются функции $C_{\tau}(\tau)$ из (2)

$$C_{\tau}(z) = C_{\tau} |Q_{\tau}(z)|^{1/2} \exp\left\{\frac{1}{2} \left[i \arg(Q_{\tau}(z)) - \int_{z_1}^z \frac{2k'_2 dz}{Q_{\tau}(z)} \right]\right\}. \quad (7)$$

Здесь C_{τ} — произвольная комплексная постоянная, $k'_2 = \chi^{(1)} N_p / l$,

$$Q_{\tau}(z) = -\Delta B_{\tau} - i \left[Q_{0\tau}(z) + \frac{\chi^{(1)}}{kL} W_{\tau}(z) + \Delta A_{\tau} \right]. \quad (8)$$

Выражение для функции $C_{\tau}(z)$ можно получить также с помощью принципа Кирхгофа, путем интегрирования функции пространственного распределения $\prod_{\tau=x, y} \varphi_{\tau}(\tau) \varphi_{1\tau}(\tau) \varphi_{2\tau}(\tau)$ поля по некоторому фиксированному

сечению внутри среды. В этом случае переменная z в $C_\tau(z)$ будет отсчитываться от этого фиксированного сечения.

В Приложении выписаны значения интеграла из показателя экспоненты в (7) и $|Q_\tau(z)|^2$.

Приведем вид моды с поперечными индексами m и n для волны, бегущей по часовой стрелке

$$\Phi_{mn}(x', y', z') = \Phi(x', y', z') \left(\frac{C_x^2(z)}{\sqrt{A_x + \Delta A_x}} \right)^m \times \left(\frac{C_y^2(z)}{\sqrt{A_y + \Delta A_y}} \right)^n H_m[\sqrt{A_x + \Delta A_x}(x + \Delta)] H_n[\sqrt{A_y + \Delta A_y}y], \quad (9)$$

где функция $\Phi(x', y', z')$ определена в (2), а H_m и H_n — полиномы Эрмита. A_τ зависят от z и совпадают с функциями $U^2(z)$ из формулы (4-28) работы [3]. Величина Δ приведена в Приложении.

Для получения функции пространственного распределения встречной волны нужно в выражениях, входящих в формулы (2) и (9), сделать замену $z \rightarrow (1-z)$, $z_1 \rightarrow (1-z_2)$, $z_2 \rightarrow (1-z_1)$, $\beta_0 \rightarrow -\beta_0$. Переменная $s = z - z_1$, встречающаяся в Приложении, при переходе к встречной волне заменяется на $l - s = z_2 - z$.

Полученные результаты справедливы также, когда на сферическом зеркале находится «гауссова» диафрагма с «эффективной» полушириной a и центром, расположенным на оптической оси. Безразмерный параметр дифракции $N \equiv L/ka^2 \ll 1$. Если пренебречь членами, пропорциональными $x_0 N$ и $\beta_0 N$, то смещение центра диафрагмы на величину порядка разъюстировки оказывается несущественным. В этом случае диафрагма дает вклад лишь в функцию $\varphi_\tau(\tau)$ [2, 3].

Пороговое усиление основной моды x_2 не содержит поправок, линейных по разъюстировке, и имеет вид

$$x_2 = \left[\gamma + \frac{1}{2} \left(\frac{N_x}{\sqrt{1 - g_{0x}^2}} + \frac{N_y}{\sqrt{1 - g_{0y}^2}} \right) \right] \left[1 - \frac{1}{kL} \left(\sqrt{\frac{1 - g_{0x}}{1 + g_{0x}}} + \sqrt{\frac{1 - g_{0y}}{1 + g_{0y}}} \right) P(N_p) \right] P(N_p), \quad (10)$$

где γ — коэффициент пропускания зеркала. Эта формула переходит в (6) из работы [5], если пренебречь слагаемым, пропорциональным $1/kL$.

$$g_{0x} = 1 - (1 - g_0)/\cos \alpha, \quad g_{0y} = 1 - (1 - g_0) \cos \alpha, \quad g_0 = 1 - \frac{L}{R}. \quad (11)$$

Множитель $P(N_p)$ приведен в Приложении.

Частотный спектр резонатора, когда основная мода находится на пороге, определяется формулой

$$\nu_{qmn} = \nu_{qmn}^{(0)} - \frac{c}{2\pi L} \left[x_1 - \sum_{\tau=x,y} \left(h_\tau + \frac{1}{2} \right) \left(\varphi_\tau(N_\tau, N_p) - \frac{x_1 \Delta g_\tau}{\sqrt{1 - g_{0\tau}^2}} \right) \right], \quad (12)$$

где $h_x = m$, $h_y = n$, x_1 характеризует дисперсию на резонаторной частоте. Выражение для φ_τ находится в Приложении, $\nu_{qmn}^{(0)}$ — спектр пустого резонатора [3], в приближении «неоднородной» среды

$$\Delta g_x = -x_0 N_p (1 - g_{0x}) \operatorname{tg} \alpha, \quad \Delta g_y = x_0 N_p (1 - g_{0y}) \operatorname{tg} \alpha, \quad (13)$$

в приближении «однородной» среды

$$\Delta g_x = \Delta g_y = 0. \quad (14)$$

Частотный спектр резонатора ν_{qmn} (12) содержит слагаемые, линейные по разъюстировке (см. (13), (14)). Поясним их происхождение. Если при выводе ядра интегрального уравнения рассчитать кубичные по смещениям

члены (первая абберрация), то при разъюстировке резонатора они приведут к возникновению добавок, пропорциональных разъюстировке и квадратичных по смещениям. Не зависящие от разъюстировки части первой абберрации нами не учитываются. Аналогичные добавки (ΔA_τ и ΔB_τ) входят в функции $\varphi_{2\tau}(\tau)$ из (5). Подчеркнем, что они входят не только в функцию $\varphi_{2x}(x)$, но и в функцию $\varphi_{2y}(y)$, хотя разъюстировка происходит только в плоскости (x, z) .

Перейдем к анализу влияния разъюстировки на пространственное распределение собственных полей. Разъюстировка создает дополнительную деформацию к полям, полученным в работе [6]. Она определяется членами ΔA_τ , ΔB_τ и ΔD_x из формулы (5). Представим ΔD_x в виде суммы двух слагаемых ΔD_{1x} и ΔD_{2x} , определенных формулой (П. 6). При переходе к встречной волне величины ΔA_τ и ΔD_{2x} остаются неизменными, а ΔB_τ и ΔD_{1x} изменяют свой знак, определяя дополнительную невзаимность. Деформация полей зависит от положения z_0 центра среды P и от параметра конформальности g_0 . В приближении «неоднородной» среды деформация полей пропорциональна $\kappa^{(1)} N_p x_0$, а в приближении «однородной» $\kappa^{(1)} \beta_0 / kL$. Поэтому в первом случае разъюстировка x_0 оказывает на свойства резонатора более сильное влияние, чем разъюстировка β_0 во втором случае. В приближении «однородной» среды диафрагма создает обычно большую невзаимность, чем разъюстировка. На практике разъюстировка широких трубок не должна приводить к существенной деформации полей.

В приближении «однородной» среды оси каустик (центры тяжести световых пучков) при разъюстировке совпадают с оптической осью. Для «неоднородной» среды оси каустик встречных волн не совпадают. Они пересекаются в сечении z_0 на оптической оси.

Расстояние $\delta(s)$ между осями в разных сечениях среды выражается формулой

$$\delta(s) = \sqrt{\frac{L}{k}} \frac{p_{0x}^2(z_0) \operatorname{Im} \Delta D_{1x}}{\sqrt{1 - g_{0x}^2}} = \frac{2x_0' \kappa_2^{(1)} N_p p_{0x}^2(z_0) \left(1 - \frac{2s}{l}\right)}{\sqrt{1 - g_{0x}^2}}. \quad (15)$$

Неколлинеарность пучков встречных волн приводит к появлению двух световых пятен на торцах среды и зеркалах. Расстояние между центрами этих пятен на торцах среды для случая $x_0' = 5 \cdot 10^{-2}$ см, $z_0 = 0.2$, $g_{0x} = 0.7$, $\kappa_2^{(1)} N_p = 2 \cdot 10^{-2}$ равно $2.5 \cdot 10^{-3}$ см. Отметим, что невзаимность $\delta(s)$ носит чисто дифракционный характер и нельзя сделать потери волн разными, «диафрагмируя» одну из них.

В результате разъюстировки поверхности одинаковых фаз полей испытывают поворот относительно осей каустик и изменяют свою кривизну. Линии постоянной амплитуды поля не ортогональны эквифазовым поверхностям. Объемы полей при разъюстировке изменяются для встречных волн одинаковым образом.

Следует особо выделить резонаторы, близкие к «плоскому», для которых деформации полей за счет разъюстировки малы. Наиболее значительное изменение полей имеет место у резонаторов, близких к концентрическому ($g_{0x} \geq -1$). Это связано с неустойчивостью осевого контура при разъюстировке [1]. При помещении центра среды в точку $z_0 = 0.5$ в приближении «неоднородной» среды разъюстировка сказывается только в смещении осей каустик.

Величины ΔA_τ и ΔB_τ в наших приближениях вещественны. Эти добавки могут быть получены, если в собственных функциях неразъюстированного резонатора сделать замены

$$\alpha \rightarrow \alpha + \Delta\alpha, \quad z' \rightarrow z' - \Delta x_1 \sin \alpha. \quad (16)$$

$\Delta\alpha$ и Δx_1 пропорциональны разъюстировке. $\Delta\alpha$ — изменение угла, который осевой контур составляет с нормалью к сферическому зеркалу, вызванное

разъюстировкой, Δx_1 — смещение осевого контура на сферическом зеркале. В приближении «неоднородной» среды

$$\Delta x = x_1^{(1)} N_p x_0, \quad \Delta x_1 = \frac{x_1^{(1)} N_p x_0' (1 - 2z_0)}{(1 + g_{0x}) \cos \alpha}, \quad (17)$$

а в приближении «однородной» среды

$$\Delta x = 0, \quad \Delta x_1 = \frac{x_1^{(1)} \beta_0}{k (1 + g_{0x}) \cos \alpha}. \quad (18)$$

Линейная по разъюстировке поправка к собственным частотам резонатора также может быть получена с помощью замен (16) в собственных частотах неразъюстированного резонатора.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Функции $W_\tau(z)$ выражаются формулой

$$W_\tau(z) = \left[g_{0\tau} - (1 - g_{0\tau}) \left(1 - \frac{2s}{l} \right) (2z - 1) \right] \left[\sqrt{1 - g_{0\tau}^2} - i (2z - 1) (1 - g_{0\tau}) \right] \times \\ \times (p_{0\tau}^2(z))^{-2} - \left[\sqrt{\frac{1 - g_{0\tau}}{1 + g_{0\tau}}} g_{0\tau} + i \left(1 - \frac{2s}{l} \right) (1 - g_{0\tau}) \right] (p_{0\tau}^2(z))^{-1} \quad (\tau = x, y), \\ s = s'/L, \quad p_{0\tau}^2(z) = 1 - 2z(1 - z)(1 - g_{0\tau}). \quad (II. 1)$$

В приближении «неоднородной» среды имеем

$$\Delta A_x = x_0 x_1^{(1)} N_p \frac{\sqrt{1 - g_{0x}^2}}{p_{0x}^2(z_0)} \left(\frac{3}{p_{0x}^2(z_0)} - \frac{5}{1 + g_{0x}} \right) \operatorname{tg} \alpha, \quad (II. 2)$$

$$\Delta A_y = x_0 x_1^{(1)} N_p \frac{\sqrt{1 - g_{0y}^2}}{p_{0y}^2(z_0)} \left[\frac{1}{p_{0y}^2(z_0)} \left(\frac{2(1 + g_{0y})}{1 + g_{0x}} - 1 \right) - \right. \\ \left. - \frac{4}{1 + g_{0x}} + \frac{1}{1 + g_{0y}} \right] \operatorname{tg} \alpha, \quad (II. 3)$$

$$\Delta B_x = x_0 x_1^{(1)} N_p (2z_0 - 1) \frac{1 - g_{0x}}{p_{0x}^2(z_0)} \left(\frac{3}{p_{0x}^2(z_0)} - \frac{2}{1 + g_{0x}} \right) \operatorname{tg} \alpha, \quad (II. 4)$$

$$\Delta B_y = x_0 x_1^{(1)} N_p (2z_0 - 1) \frac{1 - g_{0y}}{p_{0y}^2(z_0)} \left[\frac{1}{p_{0y}^2(z_0)} \left(\frac{2(1 + g_{0y})}{1 + g_{0x}} - 1 \right) - \frac{2}{1 + g_{0x}} \right] \operatorname{tg} \alpha, \quad (II. 5)$$

$$\Delta D_x = \Delta D_{1x} + \Delta D_{2x}, \quad \Delta D_{1x} = -2\bar{x}_0 N_p \left[x_1^{(1)} \frac{1 - g_{0x}}{1 + g_{0x}} (2z_0 - 1) + x_1^{(1)} \left(1 - \frac{2s}{l} \right) \right],$$

$$\Delta D_{2x} = 2\bar{x}_0 x_2^{(1)} N_p \sqrt{\frac{1 - g_{0x}}{1 + g_{0x}}}, \quad \bar{x}_0 = x_0' \sqrt{k/L}, \quad \Delta D_y = 0. \quad (II. 6)$$

В приближении «однородной» среды имеем

$$\Delta A_x = \frac{x_1^{(1)} \beta_0}{kL} \frac{\sqrt{1 - g_{0x}^2}}{p_{0x}^2(z_0)} \frac{2(2z_0 - 1)(1 - g_{0x})}{p_{0x}^2(z_0)(1 + g_{0x})} \operatorname{tg} \alpha, \quad (II. 7)$$

$$\Delta A_y = \frac{x_1^{(1)} \beta_0}{kL} \frac{\sqrt{1 - g_{0y}^2}}{p_{0y}^2(z_0)} \frac{2(2z_0 - 1)(1 - g_{0y})}{p_{0y}^2(z_0)(1 + g_{0x})} \operatorname{tg} \alpha, \quad (II. 8)$$

$$\Delta B_x = \frac{x_1^{(1)} \beta_0}{kL} \frac{2(1 - g_{0x})}{p_{0x}^2(z_0)} \left(\frac{1}{1 + g_{0x}} - \frac{1}{p_{0x}^2(z_0)} \right) \operatorname{tg} \alpha, \quad (II. 9)$$

$$\Delta B_y = \frac{x_1^{(1)} \beta_0}{kL} \frac{2(1 - g_{0y})}{p_{0y}^2(z_0)} \left(1 - \frac{1 + g_{0y}}{p_{0y}^2(z_0)} \right) \frac{\operatorname{tg} \alpha}{1 + g_{0x}}, \quad (II. 10)$$

$$\Delta D_x = \Delta D_{1x} = 2 \frac{x_1^{(1)} \beta_0 (1 - g_{0x})}{\sqrt{kL} (1 + g_{0x})}, \quad \Delta D_y = 0. \quad (II. 11)$$

Значение интеграла из экспоненты в выражении (7) и $|Q_\tau(z)|^2$ имеет вид

$$\int_{z_1}^z \frac{2k'_2 dz}{Q_\tau(z)} = k'_2 \left(\bar{z}(1-z) + i \sqrt{\frac{1+g_{0\tau}}{1-g_{0\tau}}} \bar{z} \right) \Big|_{z_1}^z, \quad (\text{П. 12})$$

$$|Q_\tau(z)|^2 = \left| Q_{0\tau}(z) + \frac{\chi^{(1)}}{kL} W_\tau(z) \right|^2 + \frac{2(1-g_{0\tau})}{p_{0\tau}^2(z_0)} \Delta Q_\tau \operatorname{tg} \alpha. \quad (\text{П. 13})$$

В приближении «неоднородной» среды

$$\Delta Q_x = x_0 \chi_1^{(1)} N_p \left(\frac{3}{p_{0x}^2(z_0)} - \frac{4}{1+g_{0x}} \right), \quad (\text{П. 14})$$

$$\Delta Q_y = x_0 \chi_1^{(1)} N_p \left[\frac{1}{p_{0y}^2(z_0)} \left(\frac{2(1+g_{0y})}{1+g_{0x}} - 1 \right) - \frac{4}{1+g_{0x}} \right]. \quad (\text{П. 15})$$

В приближении «однородной» среды

$$\Delta Q_x = \frac{\chi^{(1)} \beta_0}{kL} \frac{2(2z_0-1)(1-g_{0x})}{p_{0x}^2(z_0)(1+g_{0x})}, \quad (\text{П. 16})$$

$$\Delta Q_y = \frac{\chi^{(1)} \beta_0}{kL} \frac{2(2z_0-1)(1-g_{0y})}{p_{0y}^2(z_0)(1+g_{0x})}. \quad (\text{П. 17})$$

Функция $P(N_p)$ из формулы (10) имеет вид

$$P(N_p) = \left\{ 1 - \frac{1}{2} N_p \left[\frac{a_{4x}(z_0)}{\sqrt{1-g_{0x}^2}} + \frac{a_{4y}(z_0)}{\sqrt{1-g_{0y}^2}} \right] \right\}^{-1}. \quad (\text{П. 18})$$

Функция $\varphi_\tau(N_\tau, N_p)$ из формулы (12) имеет вид

$$\varphi_\tau(N_\tau, N_p) = \left[\left(2z_0(1-z_0) - \frac{l^2}{6} \right) N_\tau \chi_2 N_p + \chi_1 N_p a_{4\tau}(z_0) \right] (1-g_{0\tau}^2)^{-1/2},$$

$$a_{4\tau}(z) = p_{0\tau}^2(z) + \frac{l^2}{6} (1-g_{0\tau}). \quad (\text{П. 19})$$

Величина Δ из формулы (9) в приближении «неоднородной» среды имеет вид

$$\Delta = - \frac{i \chi_2^{(1)} N_p \bar{x}_0 p_{0x}^2(z_0)}{1+g_{0x}}, \quad (\text{П. 20})$$

а в приближении «однородной» среды $\Delta = 0$.

Литература

- [1] В. Ф. Бойцов. Опт. и спектр., 43, 1006, 1977.
- [2] В. Ф. Бойцов. Опт. и спектр., 43, 734, 1977.
- [3] В. Ф. Бойцов, С. Г. Слюсарев. Вестн. ЛГУ, 10, 35, 1979.
- [4] L. W. Casperson. J. Opt. Soc. Am., 66, 1373, 1976.
- [5] В. Ф. Бойцов. Опт. и спектр., 47, 184, 1979.
- [6] В. Ф. Бойцов, С. Г. Слюсарев. Вестн. ЛГУ, 16, 38, 1979.

Поступило в Редакцию 22 мая 1980 г.