УДК 539.184.01

К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ ОПТИЧЕСКОЙ НАКАЧКИ

С. В. Божокин и Б. Г. Матисов

Произведен анализ уравнения оптической накачки, описывающего пространственно-временное распределение ориентированных атомов. Указаны пределы его применимости. Получены решения уравнения для различных геометрий источника накачки, используемых в методе зонной накачки.

1. При разработке приборов квантовой электроники (квантовые меры частоты, магнитометры и др.) и постановке физических экспериментов по измерению коэффициентов диффузии, столкновительного или светового времен релаксаций, использующих метод оптической ориентации, часто необходимо знать пространственно-временное распределение ориентированных атомов в газовой ячейке. Такое распределение описывается уравнением оптической накачки [1]

$$\frac{\partial N}{\partial t}(\mathbf{R},\ t)=D\Delta N(\mathbf{R},\ t)-\varkappa N(\mathbf{R},\ t)+w(\mathbf{R},\ t)\,[N_0-N(\mathbf{R},\ t)], \tag{1}$$

где $N(\mathbf{R},\ t)$ — концентрация оптически ориентированных атомов, D — коэффициент диффузии ориентированных атомов через буферный газ, $\varkappa$ — скорость дезориентации атомов при соударениях с атомами или молекулами буферного газа, $w(\mathbf{R},\ t)$ — скорость оптической накачки, N_0 — концентрация рабочих атомов. В работе [1] уравнение (1) приведено без вывода и без указания пределов его применимости. Поэтому для правильного понимания пределов применимости (1) к реальным ситуациям мы считаем целесообразным в настоящей работе воспроизвести его вывод, указав при этом основные приближения, в рамках которых оно справедливо. Наиболее удобным и общим методом вывода (1) является метод, основанный на уравнении для матрицы плотности рабочих атомов.

Рассмотрим систему рабочих атомов (щелочные атомы), взаимодействующих с полем оптической накачки и атомами или молекулами буферного газа. Будем считать, что спектр оптической накачки захватывает только один из сверхтонких подуровней (например, нижний) основного состояния. К системе приложено статическое магнитное поле, так что различные зеемановские компоненты разрешены (хотя это и не обязательно). Кинетические уравнения для населенностей состояний P и S рабочих атомов вид имеют

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\rho_{FM}}{\partial t}&=D_P\Delta\rho_{FM}-\rho_{FM}\sum_{\Phi\mu}A^{FM}_{\Phi\mu}+\sum_{\Phi\mu}w^{FM}_{\Phi\mu}\,\delta_{\Phi}\mu\,\rho_{\Phi\Phi_1}-\sum_{F'M'}\Gamma^{F'M'}_{FM}(\rho_{FM}-\rho_{F'M'}),\\ \frac{\partial\rho_{\Phi\mu}}{\partial t}&=D_S\Delta\rho_{\Phi\mu}+\sum_{FM}A^{FM}_{\Phi\mu}\rho_{FM}-\rho_{\Phi\mu}\sum_{FM}w^{FM}_{\Phi\mu}\delta_{\Phi\Phi_1}-\sum_{\Phi'\mu'}\Gamma^{\Phi'\mu'}_{\Phi\mu}(\rho_{\Phi\mu}-\rho_{\Phi'\mu'}).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Здесь ρ_{FM} — населенность P-состояния с полным моментом F и его проекцией M, ρ_{Φ_μ} — населенность S-состояния с полным моментом Φ и его проекцией μ, Φ_1 — момент нижнего сверхтонкого подуровня основного состояния, D_P и D_S — коэффициенты диффузии рабочего атома в P- и S-состояниях в атмосфере буферного газа соответственно, $A^{\Phi M}_{\varphi\mu}$ — матрица спонтанной релаксации из P-состояния, $w^{FM}_{\Phi\mu}$ — матрица, описывающая оптическую накачку из основного состояния, $\Gamma^{F'M'}_{FM}$ и $\Gamma^{\Phi'\mu'}_{\Phi\mu}$ — матрицы, описывающие столкновительное перемешивание в P- и S-состояниях соответственно. Считая, что скорость оптической накачки много меньше скорости спонтанного распада P-состояния, пренебрежем диффузией рабочих атомов в возбужденном состоянии, а также их эволюцией по сравнению с эволюцией атомов в S-состоянии. В результате из первого уравнения системы (2) получим

$$\rho_{FM}=\frac{\sum\limits_{\Phi\mu} w^{FM}_{\Phi\mu}\rho_{\Phi\mu}\delta_{\Phi_1\Phi}+\sum\limits_{F'M'}\Gamma^{F'M'}_{FM}\rho_{F'M'}}{\sum\limits_{\Phi\mu}A^{FM}_{\Phi\mu}+\sum\limits_{F'M'}\Gamma^{F'M'}_{FM}}. \qquad (3)$$

Дальнейший вывод уравнения (1) связан с применением приближения «однородного» перемешивания [2], суть которого заключается в том, что все кинетические коэффициенты предполагаются не зависящими от квантовых чисел. Подробный анализ приближения «однородного» перемешивания с указанием всех его достоинств и недостатков проведен в [3]. Однако укажем здесь, что это приближение справедливо при условии, что вероятность столкновительного перемешивания в возбужденном состоянии много больше вероятности спонтанного перехода в основное состояние, и что это приближение приводит к существенным ошибкам в расчетах для случая накачки поляризованным светом.

Используя последнее допущение и формулу (3), получим из (2)

$$\frac{\partial\rho_{\Phi_2}}{\partial t}=D\Delta\rho_{\Phi_2}-\varkappa\left(\rho_{\Phi_2}-\frac{2\Phi_2+1}{g_S}\right)+\frac{2\Phi_2+1}{g_S}w'\rho_{\Phi_1}, \qquad (4)$$

$$\frac{\partial\rho_{\Phi_1}}{\partial t}=D\Delta\rho_{\Phi_1}-\varkappa\left(\rho_{\Phi_1}-\frac{2\Phi_1+1}{g_S}\right)-\frac{2\Phi_2+1}{g_S}w'\rho_{\Phi_1}, \qquad (5)$$

где $\varkappa=g_S\Gamma$, $\left(\Gamma\equiv\Gamma^{\Phi'\mu'}_{\Phi\mu}\right)$, g_S — кратность вырождения S-уровня, $w'=\sum\limits_{FM}w^{FM}_{\Phi_1}$, $\Phi_2=\Phi_1+1$ — полный момент верхнего сверхтонкого подуровня основного состояния,

$$\rho_{\Phi_1}=\sum_{\mu}\rho_{\Phi_1\mu},\quad \rho_{\Phi_2}=\sum_{\mu}\rho_{\Phi_2\mu},\quad D\equiv D_S.$$

Вычитая (5) из (4) окончательно имеем уравнение оптической накачки

$$\frac{\partial N}{\partial t}=D\Delta N-\varkappa N+w\,(N_0-N).$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}N&=\frac{g_S}{g_S-2}\left(\rho_{\Phi_2}-\rho_{\Phi_1}-\frac{2}{g_S}\right)N_0,\\ w&=\frac{2\Phi_2+1}{g_S}w'.\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Следует отметить, что основным допущением при выводе (1) является приближение «однородного» перемешивания, применение которого к экспериментальным ситуациям требует осторожности. Это необходимо иметь в виду при сопоставлении теоретических расчетов на основе (1) с экспериментальными данными.

Уравнение (1) с математической точки зрения представляет собой довольно сложное уравнение параболического типа с переменными коэффициентами, поэтому в ранних работах рассматривались решения его упрощенных вариантов. Так, при исследованиях релаксации атомов на стенках ячейки [4–6] решалось уравнение вида

$$\frac{\partial N}{\partial t}=D\Delta N-\varkappa N. \qquad (7)$$

Физически уравнение (7) описывает движение ориентированных атомов в атмосфере буферного газа при выключенной оптической накачке. В случае же, если мы интересуемся пространственно-временным или стационарным распределением атомов при наличии оптической накачки, необходимо искать решение (1). Однако и здесь можно предварительно ограничиться решением уравнения

$$\frac{\partial N}{\partial t}(\mathbf{R},\ t) = D\Delta N(\mathbf{R},\ t) - \varkappa N(\mathbf{R},\ t) + w(\mathbf{R},\ t) N_0, \tag{8}$$

которое справедливо при малых скоростях оптической накачки. Уравнение (8), называемое уравнением слабой накачки, впервые рассматривалось в [7]. При наличии же достаточно сильной оптической накачки (такая ситуация осуществляется в методе зонной накачки [8]) распределение ориентированных атомов по ячейке должно описываться (1). В [9] численно исследовалось стационарное решение (1) при скорости оптической накачки, заданной в виде $w = w_0 \exp(-\lambda z)$ для ячейки цилиндрической формы. Существенным результатом [9] оказалась слабая зависимость решения от параметра λ.

В данной работе получены аналитические решения уравнения (1) и (8) для разных геометрий накачивающего луча света. Эти решения могут быть использованы для оптимального подбора параметров в методе зонной накачки, а также для независимого определения коэффициента диффузии путем сравнения экспериментальных и теоретических кривых.

2. Рассмотрим вначале уравнение слабой накачки (8), которое мы будем решать для различных пространственно-временных зависимостей $w(\mathbf{R}t)$. Для решения уравнений (1), (8) удобно ввести безразмерные координаты $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)$ и время τ

$$r = \sqrt{\frac{\varkappa}{D}}\, R,\quad \tau = \varkappa t. \tag{9}$$

В новых переменных уравнение (8) имеет вид

$$\frac{\partial N}{\partial \tau} = \Delta N - N + f(\mathbf{r},\ \tau), \tag{10}$$

где $f(\mathbf{r},\ \tau) = w(\mathbf{R},\ t) N_0/\varkappa$ — функция, описывающая источник оптической накачки. Предположим, что в начальный момент времени $\tau = 0$ концентрация оптически ориентированных атомов равна нулю $N(\mathbf{r},\ \tau = 0) = 0$. Для нахождения единственного решения уравнения параболического типа необходимо к уравнениям (1), (8) поставить граничные условия. Мы будем рассматривать решение уравнения (8) для бесконечного интервала, требуя при этом ограниченность функции $N(\mathbf{r},\ \tau)$ и подразумевая, что все характерные пространственные масштабы изменения функции $N(\mathbf{r},\ \tau)$, получающиеся из решения уравнения, меньше всех характерных пространственных масштабов, задаваемых экспериментальной ситуацией. Решение уравнения (10) для бесконечного промежутка может быть выражено в виде

$$N(\mathbf{r},\ \tau) = \int_0^\tau d\xi \int d\mathbf{r}' G(\mathbf{r} - \mathbf{r}';\ \xi) \exp(-\xi) f(\mathbf{r}';\ t - \xi), \tag{11}$$

где $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}';\ \xi)$ — функция Грина трехмерного уравнения параболического типа

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}';\ \xi) = \frac{1}{[2\sqrt{\pi\xi}]^3} \exp\left(-\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{4\xi}\right). \tag{12}$$

Исследуем некоторые частные случаи пространственно-временного распределения ориентированных атомов для различных источников оптической накачки.

1. $f(\mathbf{r},\ \tau) = F(\mathbf{r})\,\Theta(\tau)$, где $\Theta(\tau)$ — тэта-функция ($\Theta(\tau) = 1,\ \tau > 0;\ \Theta(\tau) = 0,\ \tau < 0$). Источник оптической накачки имеет амплитуду $F(\mathbf{r})$ и в момент включения $\tau = 0$ сразу достигает своего амплитудного значения $F(\mathbf{r})$. В этом случае выражение (11) может быть записано в виде

$$N(\mathbf{r},\ \tau) = \frac{1}{8\pi} \int \frac{d\mathbf{r}' F(r')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left\{\exp(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)\, \mathrm{erfc}\left(\frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\tau}\right) + \right.$$

$$+\exp(-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)\operatorname{erfc}\left(\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{2\sqrt{\tau}}-\sqrt{\tau}\right)\Bigg\}, \tag{13}$$

где $\operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x$, $\operatorname{erf} x$ — интеграл вероятности, определенный в [10]. Интегрирование в выражении (13) для произвольной функции $F(\mathbf{r})$ представляет довольно трудную задачу, поэтому мы будем интересоваться стационарным решением этого уравнения $N(\mathbf{r}) = \lim\limits_{\tau\to\infty} N(\mathbf{r}, \tau)$, т. е. мы будем интересоваться концентрацией $N(\mathbf{r})$ в момент времени, когда установилось равновесие между диффузией оптически ориентированных атомов, рекомбинацией в результате столкновений с атомами буферного газа и процессом оптической накачки

$$N(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi}\int d\mathbf{r}' \frac{F(\mathbf{r}')\exp(-|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}. \tag{14}$$

2. $F(r) = F_0\Theta(b-\rho)f(z)$. Источник оптической накачки имеет цилиндрическую симметрию и представляет собой цилиндр радиуса b, параллельный оси z; $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$. Однако амплитуда источника падает вдоль оси z и характеризуется ограниченной функцией $f(z)$, причем $f(z) = f(-z)$. Стационарное пространственное распределение оптически ориентированных атомов имеет вид

$$N(\mathbf{r}) = \frac{F_0 b}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dk \exp(ikz)\frac{f(k)}{\sqrt{k^2+1}} I_1\left(b\sqrt{k^2+1}\right) K_0\left(\rho\sqrt{k^2+1}\right), \tag{15}$$

где $K_0(x)$ — функция Макдональда нулевого порядка,

$$f(k) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} dz f(z)\exp(-ikz).$$

Пусть $f(z) = \exp(-|z|)$, тогда

$$N(\mathbf{r}) = \frac{2F_0 b}{\pi}\int\limits_0^{\infty} dt \frac{\cos(|z|\operatorname{sh} t)\, I_1(b\operatorname{ch} t)\, K_0(\rho\operatorname{ch} t)}{\operatorname{ch}^2 t}. \tag{16}$$

Пусть $f(z) = 1$. В этом случае можно найти пространственно-временное распределение, которое имеет вид

$$N(\mathbf{r}, \tau) = F_0 b\int\limits_0^{\infty} dk \frac{J_1(bk)\, J_0(k\rho)}{k^2+1}\{1-\exp[-(k^2+1)\tau]\}. \tag{17}$$

Для стационарного распределения $N(\mathbf{r}) = \lim\limits_{\tau\to\infty} N(\mathbf{r}, \tau)$ для $\rho > b$ получим

$$N(\mathbf{r}) = F_0 b I_1(b)\, K_0(\rho). \tag{18}$$

Используя асимптотику функции Макдональда при больших значениях аргумента $K_0(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\exp(-\rho)$, находим, что концентрация оптически ориентированных атомов затухает $\exp(-\rho)/\sqrt{\rho}$ в направлении перпендикулярном оси z на расстояниях $\rho \gg 1$, $R \gg \sqrt{D}/\varkappa$.

Предположим, что эксперимент по оптической накачке проводится в цилиндрической ячейке конечного радиуса R_0, причем $R_0 \sim R \gg \sqrt{D}/\varkappa$. В этом случае влиянием граничных условий на цилиндрической поверхности этой ячейки можно пренебречь, и тогда распределение оптически ориентированных атомов в такой ячейке также описывается формулами (16), (17).

3. Рассмотрим теперь случай сильной накачки, при которой пространственно-временное распределение оптически ориентированных атомов $N(\mathbf{r}, \tau)$ описывается уравнением (1). Запишем (1) в безразмерных переменных (9)

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \Delta N - N + w_0(\mathbf{r}, \tau)(N_0 - N), \tag{19}$$

где $w_0(\mathbf{r}, \tau) = w(\mathbf{R}, t)/\varkappa$. Уравнение (19) будем решать для различных зависимостей $w_0(\mathbf{r}, \tau)$ с использованием интегральных преобразований Фурье и Лапласа.

1. $w_0(\mathbf{r}, \tau) = \begin{cases} w_0 & 0<\rho<b \\ 0 & b<\rho<a \end{cases}$ $N(\rho=a)=0$. Данный источник представляет собой бесконечный цилиндр, параллельный оси z, радиус которого равен b, причем на границе цилиндрической ячейки радиуса a $(a>b)$ ставится граничное условие $N(\rho=a)=0$, означающее полную дезориентацию атомов на границе ячейки. Нашей задачей является нахождение ограниченной функции $N(\mathbf{r})$, описывающей стационарное распределение оптически ориентированных атомов в такой ячейке, удовлетворяющей данному граничному условию. Решение стационарного уравнения сильной оптической накачки для такого источника имеет вид

$$\left.\begin{aligned} N(\rho) &= \frac{w_0 N_0}{m^2}\left\{1 - \frac{[I_0(a)K_1(b)+K_0(a)I_1(b)]\,I_0(m\rho)}{\begin{gathered} mI_1(mb)\,[K_0(b)I_0(a)-K_0(a)I_0(b)]+ \\ +I_0(mb)\,[I_0(a)K_1(b)+K_0(a)I_1(b)]\end{gathered}}\right\}, \quad \rho<b, \\ N(\rho) &= \frac{w_0N_0I_0(a)I_1(mb)\left[K_0(\rho)-\dfrac{K_0(a)}{I_0(a)}I_0(\rho)\right]}{\begin{gathered} m\,\{mI_1(mb)\,[K_0(b)I_0(a)-K_0(a)I_0(b)]+ \\ +I_0(mb)\,[I_0(a)K_1(b)+K_0(a)I_1(b)]\}\end{gathered}}, \quad b<\rho<a, \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

где $m^2=1+w_0$; $K_0(x)$; $K_1(x)$ — функции Макдональда, $I_0(x)$, $I_1(x)$ — функции Бесселя мнимого аргумента.

2. $w(\mathbf{r}, \tau) = w_0\,\delta(z)\,\Theta(a-\rho)\,\Theta(\tau)$, $N(\rho=a)=0$, $N(\tau=0)=0$. Данный источник оптической накачки представляет собой бесконечно тонкий диск радиуса a, расположенный в плоскости $z=0$, причем на поверхности цилиндрической ячейки радиуса a плотность оптически ориентированных атомов равна нулю. Для нахождения искомой ограниченной функции $N(\mathbf{r}, \tau)$, удовлетворяющей уравнению (19), данному граничному и начальному условиям используем метод Фурье. Разлагая функцию источника по собственным функциям и используя формулы коэффициентов ряда Фурье—Бесселя, находим пространственно-временное распределение оптически ориентированных атомов.

$$\begin{aligned} N(\mathbf{r}, \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{w_0 N_0 J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{a}\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)} \Bigg\{ & \frac{\exp\left(-\sqrt{1+\frac{\mu_n^2}{a^2}}\,|z|\right)}{2\sqrt{1+\frac{\mu_n^2}{a^2}}+w_0} \times \\ & \times \operatorname{erfc}\left[\frac{|z|}{2\sqrt{\tau}} - \sqrt{\left(1+\frac{\mu_n^2}{a^2}\right)\tau}\right] - \\ - & \frac{\exp\left(\sqrt{\left(1+\frac{\mu^2}{a^2}\right)}\,|z|\right)}{2\sqrt{1+\frac{\mu_n^2}{a^2}}-w_0} \operatorname{erfc}\left(\frac{|z|}{2\sqrt{\tau}} + \sqrt{\left(1+\frac{\mu_n^2}{a^2}\right)\tau}\right) + \\ + & \frac{w_0 \exp\left\{\left[\frac{w_0^2}{4} - \left(1+\frac{\mu_n^2}{a^2}\right)\right]\tau + \frac{w_0|z|}{2}\right\}}{2\left(1+\frac{\mu_n^2}{a^2}\right) - \frac{w_0^2}{2}} \operatorname{erfc}\left(\frac{|z|}{2\sqrt{\tau}} + \frac{w_0}{2}\sqrt{\tau}\right), \end{aligned} \tag{21}$$

где μ_n — корни уравнения $J_0(\mu)=0$. Стационарное распределение оптически ориентированных атомов в этом случае имеет вид

$$N(z, \rho) = 2N_0 w_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\mu_n \frac{\rho}{a}\right) \exp\left(-\sqrt{1+\frac{\mu_n^2}{a^2}}\,|z|\right)}{\mu_n J_1(\mu_n)\left[2\sqrt{1+\frac{\mu_n^2}{a^2}}+w_0\right]}. \tag{22}$$

Если $a \ll 1$, то для достаточно больших $|z| \gg 1$ можно ограничиться первым слагаемым этого ряда.

В заключение отметим основные результаты настоящей работы.

1. Указаны пределы применимости уравнения оптической накачки (1).

2. Получены решения уравнений слабой и сильной оптической накачки для различных геометрий источника оптической накачки. Как известно, в методе зонной накачки наиболее благоприятной ситуацией является медленное пространственное спадание концентрации оптически ориентированных атомов. Анализ полученных результатов показывает, что в случае источника накачки в виде «диска» концентрация затухает экспоненциально в направлении, перпендикулярном плоскости диска, тогда как в случае источника в виде «цилиндра» концентрация в направлении, перпендикулярном лучу накачки, спадает быстрее (см. формулу (18)). Таким образом, по нашему мнению, более оптимальной для метода зонной накачки является геометрия в виде «диска», которая легко может быть осуществлена в эксперименте.

3. В стационарном случае независимое определение коэффициентов D или $\varkappa$ путем сравнения теоретических и экспериментальных кривых затруднительно, поскольку полученные формулы зависят только от отношения $D/\varkappa$.

Литература

[1] **W. Franz.** Phys. Rev. A, *6*, 1921, 1972.
[2] **G. Missout, J. Vanier.** Can. J. Phys., *53*, 1030, 1975.
[3] **М. Б. Горный, Б. Г. Матисов.** Докл. на XIII НТК мол. спец. ГОИ, 1980.
[4] **W. Franzen.** Phys. Rev., *115*, 850, 1959.
[5] **Н. С. Преображенский, С. В. Сенина.** Опт. и спектр., *17*, 809, 1964.
[6] **S. Legowski.** Bull. Acad. Polon. Sci. Math. Astron. Phys., *13*, 515, 1965.
[7] **P. Minguzzi, R. Strumia, P. Violino.** Nuovo Cimento, *46*, 145, 1966.
[8] **Э. И. Алексеев, Е. Н. Базаров, В. П. Губин.** Радиотехн. и электрон., *19*, 1901, 1974.
[9] **J. Malik, K. Posinski.** Acta phys. Polon., *A55*, 721, 1979.
[10] Справочник по специальным функциям. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. 119. «Наука», М., 1979.

Поступило в Редакцию 7 июля 1980 г.