УДК 621.373 : 535.01

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ФУНКЦИИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА ЛАЗЕРНОГО ПОЛЯ

В. В. Рахвалов и *В. А. Степанов*

Рассмотрены пространственные корреляционные функции четвертого порядка в рамках волновой теории когерентности лазерного излучения. Получены выражения для функции корреляции интенсивности и корреляции флюктуаций интенсивности излучения с произвольным числом поперечных мод. Проведен анализ полученных выражений при одновременной генерации четырех поперечных мод различной мощности и сравнение их с аналогичными функциями второго порядка. Показано, что корреляционные функции четвертого порядка характеризуют распределение биений в поле интерференции двух пучков и позволяют повысить по сравнению с известными способами чувствительность метода определения чистоты режима генерации моды TEM_{00}.

В настоящее время волновая теория когерентности лазерного излучения представлена в основном работами по определению корреляционных функций второго порядка [1], которые не описывают всего многообразия когерентных свойств вынужденного излучения. Так, например, известно, что при описании нелинейно преобразованного излучения недостаточно корреляционных функций второго порядка, а его интенсивность и статистика определяются главным образом корреляционными функциями высших порядков первичного излучения [2, 3].

В данной работе рассмотрены корреляционные функции четвертого порядка и возможность использования этих функций в двухлучевом эксперименте. Для выяснения связи биений между модами с корреляционными функциями четвертого порядка рассмотрим схему двухлучевого интерферометра Юнга с одним фотоприемником. В этой схеме квадрат интенсивности сигнала, регистрируемого фотоприемником, в поле интерференции можно выразить в виде

$$I^2(t) = I_1^2(t+\tau) + I_2^2(t) + 2I_1(t+\tau) I_2(t) + 4 [\mathrm{Re}\, V_1(t+\tau) V_2^*(t)]^2 + \\ + 4I_1(t+\tau) \mathrm{Re}\, V_1(t+\tau) V_2^*(t) + 4I_2(t) \mathrm{Re}\, V_1(t+\tau) V_2^*(t), \tag{1}$$

где $V_1(t+\tau)$, $V_2(t)$, $I_1(t+\tau)$, $I_2(t)$ — аналитические сигналы и интенсивности двух пучков, разделенных временным интервалом τ. Выражение (1) характеризует распределение не только постоянной составляющей интенсивности, но и сигналов биений между модами в поле интерференции. После усреднения во времени и одновременного усреднения по небольшому интервалу задержек τ, равному по величине нескольким периодам оптических колебаний, выражение (1) преобразуется к виду

$$\langle I^2(t)\rangle = \langle I_1^2(t)\rangle + \langle I_2^2(t)\rangle + 10\Gamma_{12}^{(2,2)}(\tau), \tag{2}$$

где $\Gamma_{12}^{(2,2)}(\tau) = \langle I_1(t+\tau) I_2(t)\rangle$ — функция корреляции интенсивности в двух пространственно-временных точках. Выражение (2) позволяет по измеренным значениям квадратов интенсивностей каждого из пучков и квадрата интенсивности в поле интерференции, включающими в себя постоянную составляющую электрического сигнала и сигналы биений, определить функцию корреляции четвертого порядка.

В то же время корреляционная функция четвертого порядка может быть получена расчетным путем. Для получения выражения пространственной функции корреляции $\Gamma_{12}^{(2,2)}(0)$ многомодового лазерного излучения представим аналитические сигналы поля в произвольной точке в виде

$$V(t)=\sum_{m=0}^{m=M-1} A_m(p)\exp i\left[\omega_m t+\varphi_m(p)\right], \tag{3}$$

где $A(p)$, ω, $\varphi(p)$ — амплитуды, частоты и начальные фазы поля каждой моды; m — индекс суммирования; M — количество поперечных мод. Тогда мгновенная интенсивность в этой точке будет равна

$$I(t)=V(t)V^*(t)=\sum_{m=0}^{m=M-1} A_m^2(p)+2\sum_{k=1}^{k=M-1}\sum_{m=0}^{m=M-1-k} A_m(p)A_{m+k}(p)\times$$
$$\times\cos\left[(\omega_m-\omega_{m+k})t+\varphi_m(p)-\varphi_{m+k}(p)\right], \tag{4}$$

где k — промежуточный индекс суммирования, принимающий значения от 1 до $M-1$.

Для определения функции взаимной корреляции интенсивности в двух произвольных пространственных точках необходимо произвести перемножение интенсивностей в этих точках и усреднить во времени. При этом члены, полученные от перемножения слагаемых с различными частотами биений, при усреднении обращаются в нуль. Как и в работе [4], считаем, что начальная фаза каждой моды зависит тоько от выбора пространственной точки и не зависит от выбора типа колебания, а пространственное распределение амплитуды является четной или нечетной функцией координат. При этом для симметрично расположенных точек относительно начала координат функция взаимной корреляции интенсивности после преобразований имеет вид

$$\Gamma_{12}^{(2,2)}(0)=\left[\sum_{m=0}^{m=M-1} A_m^2(p)\right]^2+2\sum_{k=1}^{k=M-1}(-1)^k\left[\sum_{m=0}^{m=M-1-k} A_m^2(p)A_{m+k}^2(p)\right]. \tag{5}$$

Если в резонаторе наблюдается частотное вырождение отдельных мод, то в формуле (5) вместо амплитуды $A_m(p)$ следует использовать приведенную величину, равную сумме амплитуд всех мод с одинаковыми частотами.

Нормированное значение функции когерентности четвертого порядка определяется как

$$\gamma_{12}^{(2,2)}(0)=\frac{\Gamma_{12}^{(2,2)}(0)}{\langle I_1^2(t)\rangle^{1/2}\langle I_2^2(t)\rangle^{1/2}}=$$
$$=\frac{\left[\sum_{m=0}^{m=M-1} A_m^2(p)\right]^2+2\sum_{k=1}^{k=M-1}(-1)^k\left[\sum_{m=0}^{m=M-1-k} A_m^2(p)A_{m+k}^2(p)\right]}{\left[\sum_{m=0}^{m=M-1} A_m^2(p)\right]^2+2\sum_{k=1}^{k=M-1}\left[\sum_{m=0}^{m=M-1-k} A_m^2(p)A_{m+k}^2(p)\right]}. \tag{6}$$

Выражение (6) позволяет провести расчет нормированной корреляционной функции четвертого порядка в двух симметричных точках лазерного пучка, содержащего произвольное число поперечных мод.

Для анализа выражения (6) проведем конкретизацию модели излучения лазера. Поведение корреляционной функции (6) существенно зависит от распределения амплитуды каждой моды в поперечном сечении пучка, которое может отличаться от поля моды пустого резонатора вследствие нелинейной связи между ними. Анализ корреляционной функции в этом случае можно провести, например, представляя реальные моды в виде разложения по идеальным модам [4]. Однако при относительно малых взаимных возмущениях мод, характер поведения корреляционной функции изменяется незначительно [4]. Поэтому для выяснения общих закономерностей поведения выражения (6) достаточно представить излучение лазера в виде независимых резонаторных мод. Без учета нелинейных явлений среды рассмотрим случай одновременной генерации четырех поперечных мод TEM_{00}, TEM_{10}, TEM_{20} и TEM_{30} в резонаторе с прямоугольной формой зеркал. Представляя амплитуды поля в виде $A_m(p) = \sqrt{p_m}\Psi_m(p)$, где P_m — мощность излучения поперечного типа с индексом m, $\Psi_m(p)$ — полиномы Эрмита—Гаусса, получим после преобразования (6) следующее выражение:

$$\gamma(X) = \frac{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)^2 - 2(a_0^2a_1^2 + a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2) + 2(a_0^2a_2^2 + a_1^2a_3^2) - 2a_0^2a_3^2}{(a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2(a_0^2a_1^2 + a_1^2a_2^2 + a_2^2a_3^2) + 2(a_0^2a_2^2 + a_1^2a_3^2) + 2a_0^2a_3^2}, \quad (7)$$

где $a_0 = I$; $a_1 = \sqrt{2a}\,X$, $a_2 = \sqrt{2b}\,(X^2 - 0.5)$; $a_3 = 2\sqrt{c/3}\,(X^2 - 1.5)\,X$ — коэффициенты распределения поперечных мод вдоль фиксированного направ-

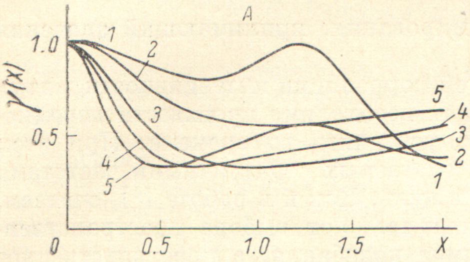
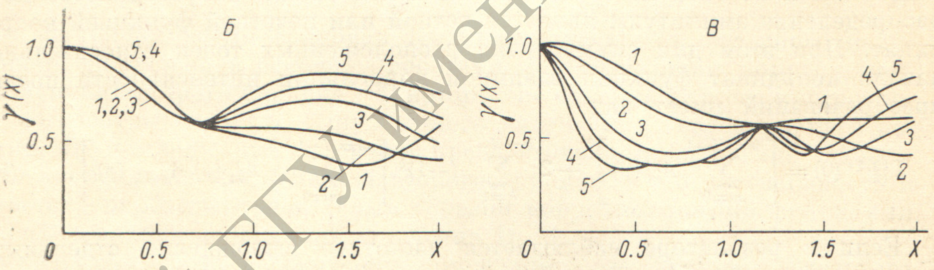


Рис. 1. Зависимость коэффициента корреляции интенсивности от координаты в пучке при генерации мод TEM_{10}, TEM_{00}, TEM_{20} и TEM_{30} различных мощностей.

А — $b=0.1$; $c=0.1$; a — 0, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 соответственно для кривых *1, 2, 3, 4, 5*. *Б* — $a=0.1$; $c=0.1$; $b=0$, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 соответственно для кривых *1, 2, 3, 4, 5*. *В* — $a=0.1$; $b=0.1$; $c=0$, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 соответственно для кривых *1, 2, 3, 4, 5*.



ления x, $X = x\sqrt{2}/w$ — координата точки P, нормированная к радиусу пятна на уровне $1/e$ от максимальной амплитуды; $a = P_{10}/P_{00}$; $b = P_{20}/P_{00}$; $c = P_{30}/P_{00}$ — мощности излучения мод TEM_{10}, TEM_{20} и TEM_{30}, нормированные к мощности низшей поперечной моды TEM_{00}.

Анализ функций (7) и графиков, представленных на рис. 1, которые построены с помощью уравнения (7) для различных соотношений величин a, b и c, позволяет установить ряд общих закономерностей.

1. Достаточным условием предельной пространственной корреляции интенсивности является генерация одной поперечной моды.

2. Функция корреляции интенсивности включает в себя характеристики как стационарных составляющих интенсивностей, так и не стационарной интерференции — биений в области наложения двух оптических полей.

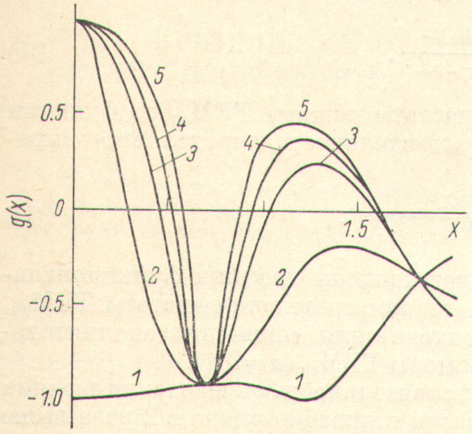
3. Основной причиной нарушения пространственной когерентности четвертого порядка, как и пространственной когерентности второго порядка, является одновременная генерация мод различной четности. При этом генерация мод одной четности для симметричных точек пучка дает предельную пространственную когерентность. Для несимметричных точек пространственная когерентность уменьшается за счет фазового сдвига колебаний в соседних максимумах каждой поперечной моды.

4. Коэффициент пространственной корреляции нелинейно зависит от мощности генерируемых мод. Небольшое добавление любой моды (изменение коэффициентов a, b и c в пределах от 0 до 0.5) существенно изменяет величину и характер поведения коэффициента корреляции, в то время как

при дальнейшем изменении мощности изменение функции когерентности незначительное.

5. Функциональная зависимость степени пространственной когерентности от координаты точки в пучке связана с неоднородным пространственным распределением каждой поперечной моды. Экстремальные точки на графиках и точки пересечения различных кривых обусловлены равенством интенсивностей различных поперечных мод в данной точке сечения, экстремальным или нулевым значением пространственного распределения моды.

6. Графики функций $\gamma\ \ (X)$ не переходят в область отрицательных значений, как это имело место для функций когерентности второго порядка, и не имеют значений, меньших чем 0.33. . . . Это связано с влиянием постоянной составляющей в интенсивности пучка, которая всегда больше



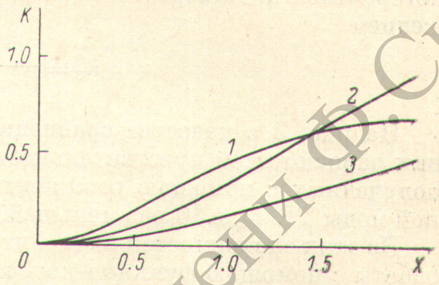


Рис. 2. Зависимость коэффициента корреляции биений от координаты в пучке при генерации мод TEM_{00}, TEM_{10}, TEM_{20} и TEM_{30} различных мощностей.

$a=0.1$; $c=0.1$; $b=0$, 0.1, 0.5, 1.0, 2.0 соответственно для кривых *1*, *2*, *3*, *4*, *5*.

Рис. 3. Зависимость чувствительности измерения мощности моды TEM_{10} от координаты в пучке первым (*1*), вторым (*2*) и третьим (*3*) методами для значения коэффициента $a=0.1$.

переменной составляющей. При этом функция когерентности принимает наименьшее значение, когда амплитуды биений различной четности максимальны, а это возможно в тех точках пучка, в которых интенсивности поперечных мод равны.

Из выражения (7) легко получить корреляционную функцию флуктуаций интенсивности, которая характеризует связь биений между поперечными модами в различных пространственных точках

$$g_{12}^{(2,2)}(0)=\frac{\langle \Delta I_1(t)\,\Delta I_2(t)\rangle}{\langle[\Delta I_1(t)]^2\rangle^{1/2}\langle[\Delta I_2(t)]^2\rangle^{1/2}}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{k=1}^{k=M-1}(-1)^k\left[\sum\limits_{m=0}^{m=M-1-k}A_m^2(p)A_{m+k}^2(p)\right]}{\sum\limits_{k=1}^{k=M-1}\left[\sum\limits_{m=0}^{m=M-1-k}A_m^2(p)A_{m+k}^2(p)\right]}. \qquad (8)$$

Типичные зависимости (8) представлены на рис. 2. Основной особенностью корреляционной функции флуктуаций интенсивности является наличие полной пространственной корреляции при одновременной генерации двух пространственных мод. Появление в излучении небольшой по мощности третьей моды ведет к сильному ухудшению коэффициента корреляции, который может принимать как положительные, так и отрицательные значения и имеет бо́льшую крутизну изменения от координаты, чем соответствующий коэффициент для интенсивностей.

Одним из практических приложений корреляционных функций четвертого порядка является их использование для контроля за чистотой режима генерации лазерного излучения TEM_{00}. Известно [5], что появление в излучении дополнительной поперечной моды TEM_{10} ведет к изменению как интенсивности, так и корреляционных функций второго порядка. Измерение любой из этих величин в произвольной точке дает возможность определить относительную мощность дополнительной поперечной моды TEM_{10}. Чувствительность метода определяется отношением полезного сигнала к полному и для известных способов определяется соответственно

$$K_1 = \frac{2aX^2}{1+2aX^2}, \tag{9}$$

$$K_2 = \frac{4aX^2}{1+2aX^2}. \tag{10}$$

Аналогично, для метода анализа чистоты режима TEM_{00} по функции когерентности четвертого порядка чувствительность определяется выражением

$$K_3 = \frac{8aX^2}{(1+2aX^2)+4aX^2}. \tag{11}$$

На рис. 3 в качестве сравнения представлены графики функциональных зависимостей чувствительности методов определения чистоты TEM_{00}, полученных с помощью различных подходов для мощности дополнительной моды TEM_{10} в 10 раз меньшей, чем моды TEM_{00} ($a=0.1$).

Из этих зависимостей видно, что чувствительность определения режима работы с помощью функции когерентности второго порядка в 2 раза выше в центральной части пучка, чем методом измерения распределения плотности мощности; в наиболее интенсивной части пучка чувствительность определения режима работы с помощью функции когерентности четвертого порядка выше, чем первым и вторым методами, и зависит от относительной мощности моды TEM_{10} и координаты точки в пучке.

Авторы благодарны Т. М. Гравшиной, В. А. Касельскому и А. В. Козлову за большую помощь при расчетах на ЭВМ.

Литература

[1] А. Т. Мирзаев, В. В. Рахвалов, В. А. Степанов. Когерентность излучения лазеров, ч. 1, сер. Электровакуумные и газоразрядные приборы. ЦНИИ «Электроника», вып. 2, 525, М., 1978.

[2] С. А. Ахманов, А. С. Чиркин. Статистические явления в нелинейной оптике. Изд. МГУ, М., 1971.

[3] Б. А. Сотский. ДАН БССР, *12*, 888, 1968.

[4] Е. П. Остапченко, В. В. Рахвалов, Н. И. Рублева, В. А. Степанов. Опт. и спектр., *40*, 859, 1976.

[5] Д. В. Гордеев, Г. В. Мелехин, А. Ф. Степанов, В. А. Степанов. Электронная техника, сер. Газоразрядные приборы, вып. 4 (12), 34, 1968.

Поступило в Редакцию 9 июня 1980 г.