Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.И. БОГДАНОВИЧ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ: КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**Для студентов первого курса специальности
1-31 04 03 «Физическая электроника»**

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2015

Лекция 3

Раздел 1 Электрические цепи постоянного тока

Тема 3 Методы расчета электрических цепей постоянного тока

Анализ расчета цепей постоянного тока с одним источником ЭДС

С помощью правил Кирхгофа можно рассчитать любую электрическую цепь, в том числе цепь постоянного тока с одним источником энергии. В этом случае необходимо составить систему уравнений по правилам Кирхгофа и решать ее относительно неизвестных токов. Для определения токов и напряжений каждого элемента цепи с одним источником электрической энергии можно использовать метод эквивалентных преобразований («метод свертки»).

Суть метода рассмотрим на примере цепи, схема которой приведена на рисунке 24, а). Пусть известны значения сопротивлений резисторов $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$, ЭДС E_1 и его внутреннего сопротивления R_{01}. Требуется определить токи во всех участках цепи и напряжение, которое покажет вольтметр (сопротивление его бесконечно велико), включенный между точками a и d.

Для решения такой задачи отдельные участки электрической цепи с последовательно или параллельно соединенными элементами заменяют одним эквивалентным элементом. Схему электрической цепи упрощают постепенным преобразованием ее участков. В этом случае схеме цепи состоит из последовательно соединенного источника электрической энергии и одного эквивалентного пассивного элемента. Так, резисторы R_4 и R_5 соединены последовательно, а резистор R_6 к ним параллельно, поэтому их эквивалентное сопротивление запишется как

$$R_{456} = \frac{R_{45} R_6}{R_{45} + R_6}, \text{ где } R_{45} = R_4 + R_5.$$

Сопротивления R_3 и R_{456} соединены последовательно (рисунок 24, б), поэтому их общее сопротивление будет равно $R_{3456} = R_3 + R_{456}$.

Сопротивления R_2 и R_{3456} соединены параллельно, следовательно

$$R_{23456} = \frac{R_2 (R_3 + R_{456})}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

Эквивалентное (входное) сопротивление всей цепи находят из уравнения:

$$R_{экв} = R_{01} + R_1 + \frac{R_2(R_3 + R_{456})}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

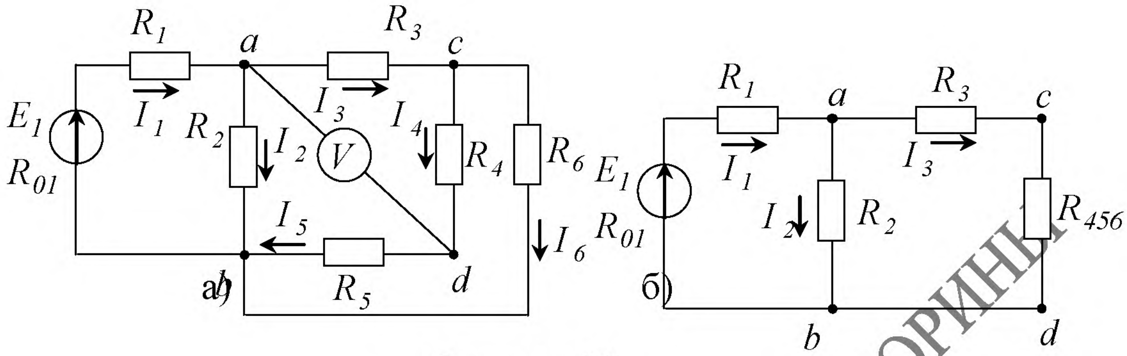


Рисунок 24

Ток I_1 в неразветвленной части схемы определяют из закона Ома:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_{экв}}.$$

Токи I_2 и I_3 определяют

$$I_2 = I_1 \frac{R_3 + R_{456}}{R_2 + R_3 + R_{456}}; I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

Токи $I_4; I_5; I_6$ определяют по следующим формулам:

$$I_4 = I_5 = I_3 \frac{R_6}{R_4 + R_5 + R_6}; I_6 = I_3 \frac{(R_4 + R_5)}{R_4 + R_5 + R_6}.$$

Зная ток I_1, можно найти ток I_2 по-другому. На основании второго правила Кирхгофа, определяем напряжение на участке ab $U_{ab} = E_1 - I_1(R_{01} + R_1)$, тогда значение тока будет равно $I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}$.

Показания вольтметра можно определить, составив уравнение по второму правилу Кирхгофа, например, для контура $abca$:

$$R_3 I_3 + R_4 I_4 = U_{ad}.$$

Правильность вычисленных значений можно проверить, воспользовавшись первым правилом Кирхгофа или уравнением баланса мощностей, которые для схемы, изображенной на рисунке 1.1, имеют вид:

$$I_1 = I_2 + I_3; I_3 = I_4 + I_6;$$

$$E_1 I_1 = (R_{01} + R_1)I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + (R_4 + R_5)I_4^2 + R_6 I_6^2.$$

Если заданы значения сопротивлений ветвей электрической цепи (рисунок 24, а) и ЭДС источника E_1, то для нахождения токов в ветвях можно воспользоваться методом подобия (методом пропорциональных величин). Этот метод применим только для расчета линейных цепей, т. е. цепей с постоянными значениями сопротивлений.

Воспользуемся свойствами линейных цепей для определения токов схемы, изображенной на рисунке 24, а) в такой последовательности: зададимся произвольным значением тока I'_6 в резисторе R_6, наиболее удаленном от источника питания. Как правило, это значение тока берут равным единице. По заданному току I'_6 и сопротивлению R_6 определяем напряжение $U'_{cb} = R_6 I'_6$. Далее определяем параметры цепи от действия тока $I'_6 = 1\ A$.

$$I'_4 = I'_5 = \frac{U'_{cb}}{R_4 + R_5}\ ;\ I'_3 = I'_4 + I'_6\,;\ I'_2 = \frac{I'_3 R_3 + I'_4 (R_4 + R_5)}{R_2}\,; I'_1 = I'_2 + I'_3.$$

После этого находим значение ЭДС E'_1 как $E' = (R_{01} + R_1)I'_1 + R_2 I'_2$.

Однако найденное значение ЭДС E'_1 в общем случае отличается от заданной величины ЭДС E_1. Поэтому для определения действительных значений токов и напряжений вычисляем так называемый коэффициент подобия $K = \dfrac{E_1}{E'_1}$. Умножая на него полученные при расчете значения токов и напряжений, находим действительные значения токов и напряжений цепи. Метод пропорциональных величин особенно эффективен при расчете разветвленных линейных электрических цепей с одним источником.

Метод расчета электрических цепей с применением правил Кирхгофа

Для расчета электрических цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа рекомендуется следующий порядок составления уравнений:

– произвольно выбирают направление токов во всех ветвях. Если принятое направление тока не совпадает с действительным, то при расчете такие токи получаются со знаком минус;

– составляют $(N-1)$ уравнения по первому правилу Кирхгофа, где N – число узлов;

– недостающие уравнения в количестве $M-(N-1)$, где M – число ветвей, составляют по второму правилу Кирхгофа, при этом обход контура можно производить как по часовой стрелке, так и против нее. Все значения ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура, записываются со знаком плюс, а те ЭДС, направления которых не совпадает – со знаком минус. Направление действия ЭДС внутри источника всегда принимают от минуса к плюсу;

– число составленных уравнений по первому и второму правилам Кирхгофа должно быть равно числу неизвестных токов;

– полученную систему уравнений решают относительно неизвестных токов.

На примере электрической цепи, схема, которой изображена на рисунке 25, составим систему уравнений по правилам Кирхгофа.

Эта схема имеет шесть ветвей и четыре узла, поэтому по первому правилу Кирхгофа для нее нужно составить три уравнения, например для узла a: $I_1 + I_3 - I_4 = 0$; для узла b: $I_2 + I_5 + I_1 = 0$; для узла c: $I_5 - I_6 + I_4 = 0$.

Выбрав направления обхода контура, составляем три уравнения по второму правилу Кирхгофа для трех произвольно выбранных контуров:

– для контура abc: $E_1 = I_1R_1 - I_5R_5 + I_4R_4$;

– для контура bcd: $E_2 = I_2R_2 - I_6R_6 - I_5R_5$;

– для контура acd: $0 = I_3R_3 + I_4R_4 + I_6R_6$.

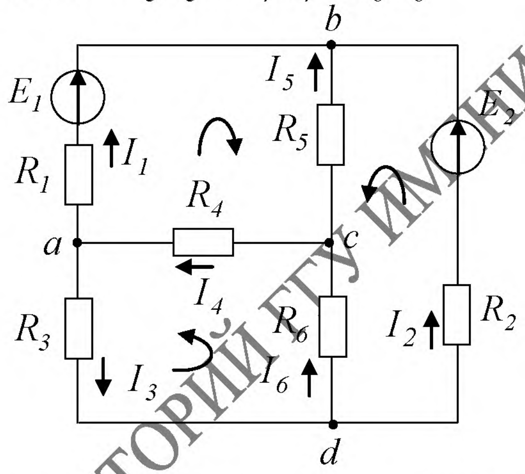


Рисунок 25 – Схема замещения разветвленной электрической цепи с двумя источниками электрической энергии для расчета с применением правил Кирхгофа

Решая совместно записанные уравнения, вычисляют все шесть неизвестных токов. Если в результате решения этих уравнений получаются токи со знаком минус, то это означает, что истинные направления токов в ветвях цепи противоположны тем направлениям, для которых составлены уравнения.

Правильность вычисленных значений можно проверить, воспользовавшись первым правилом Кирхгофа или уравнением баланса мощностей.

Метод расчета электрических цепей с применением контурных токов

Этот метод заключается в том, что вместо действительных токов в ветвях на основании второго правила Кирхгофа определяются так называемые контурные токи. Контурным называется такой расчетный ток, который замыкается только по своему контуру, оставаясь вдоль него неизменным. Тогда действительный ток в любой ветви, принадлежащий только одному контуру, численно равен контурному току, а в ветви, принадлежащей нескольким контурам, равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих через эту ветвь.

Число уравнений, составленных по второму правилу Кирхгофа, в этом случае равно числу независимых контуров. Контур считается независимым, если в нем имеется хотя бы одна ветвь, не принадлежащая другим контурам. Число независимых контуров можно определить $M-(N-1)$, где M – число ветвей, N – число узлов. Направление обхода контура выбирают произвольно, обычно это направление совпадает с направлением контурного тока. Значение ЭДС берется со знаком плюс, если направление обхода контура совпадает с положительным направлением ЭДС, и со знаком минус, если не совпадает.

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 26.

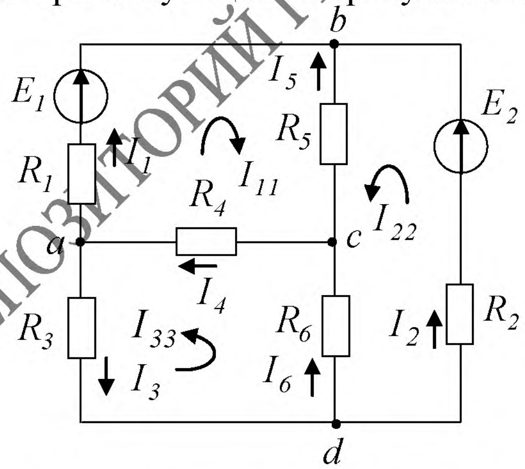


Рисунок 26 – Схема замещения разветвленной электрической цепи с двумя источниками электрической энергии для расчета методом контурных токов

Составим уравнения для трех независимых контуров по методу контурных токов:

– для контура abc: $E_1 = I_{11}(R_1 + R_5 + R_4) + I_{22}R_5 + I_{33}R_4$;

– для контура bcd: $E_2 = I_{11}R_5 + I_{22}(R_2 + R_6 + R_5) - I_{33}R_6$;

– для контура acd: $0 = I_{11}R_4 - I_{22}R_6 + I_{33}(R_4 + R_3 + R_6)$.

Решая совместно уравнения, определяем контурные токи. В том случае, когда контурный ток получается со знаком минус, это означает, что его направление противоположно выбранному на схеме. Зная контурные токи, определяем действительные токи в ветвях схемы следующим образом

$$I_1 = I_{11};\ I_2 = I_{22};\ I_3 = I_{33};\ I_5 = -I_{11} - I_{22};\ I_4 = I_{11} + I_{33};\ I_6 = I_{33} - I_{22}.$$

Метод расчета электрических цепей с применением метода наложения

Этот метод применим только в линейных электрических цепях, т. е. в цепях, в которых сопротивления элементов не изменяются при прохождении через них тока или приложенного к ним напряжения. Расчет основывается на том, что в ветвях цепи определяют токи от действия каждого источника в отдельности (частичные токи), а затем действительные токи определяются как алгебраическая сумма частичных токов. Рассмотрим схему на рисунке 27, а). Исключим в ней источник E_2, т. е. $E_2 = 0$. Тогда схема примет вид рисунка 27, б).

Ток в неразветвленной части цепи будет равен общему току от действия первой ЭДС, т. е.

$$I'_{общ} = I'_1 = \frac{E_1}{R'_{экв}}, \text{ где } \quad R'_{экв} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

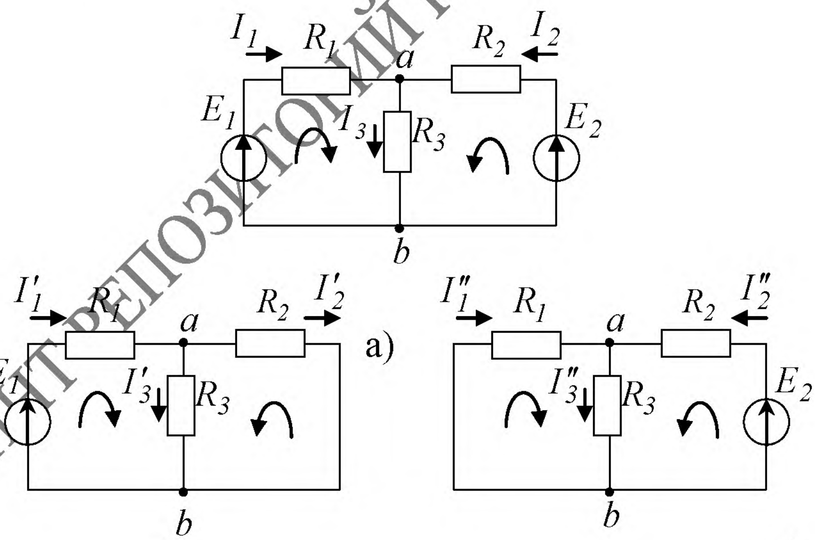


Рисунок 27 – Схема замещения разветвленной электрической цепи с двумя источниками электрической энергии (а) и схемы замещения для определения частичных токов от действия ЭДС E_1 (б) и ЭДС E_2 (в)

Ток I'_3 определим как $I'_3 = \dfrac{E_1 - I'_1 R_1}{R_3}$, а $I'_2 = I'_1 - I'_3$.

Токи I'_2, I'_3 можно определить и так $I'_2 = I'_1 \dfrac{R_3}{R_2 + R_3}$, $I'_3 = I'_1 \dfrac{R_2}{R_2 + R_3}$.

Исключим источник E_1, т. е. $E_1 = 0$. Тогда схема примет вид, указанный на рисунке 27, в). Ток в неразветвленной части цепи определим как

$$I''_{общ} = I''_2 = \frac{E_2}{R''_{экв}}, \text{ где } \quad R''_{экв} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

Ток I''_3 определим как $I''_3 = \dfrac{E_2 - I''_2 R_2}{R_3}$, а $I''_1 = I''_3 - I''_2$

Токи I'_1, I'_3 можно определить и так $I''_1 = I''_2 \dfrac{R_3}{R_1 + R_3}$, $I''_3 = I''_2 \dfrac{R_1}{R_1 + R_3}$.

Действительные токи определим как алгебраическую сумму частичных токов (рисунок 2.3):

$$I_1 = I'_1 + I''_1; \; I_2 = I''_2 - I'_2; \; I_3 = I'_3 + I''_3.$$

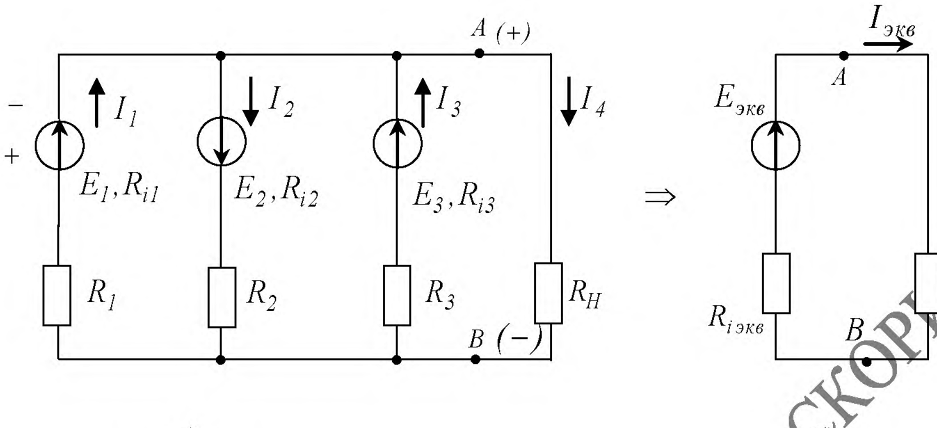
Метод двух узлов

Если имеется несколько ветвей, соединённых параллельно (рисунок 28, а), в каждой из которых находятся источники напряжения и резистивные сопротивления, то все эти ветви можно заменить одной ветвью с некоторой эквивалентной ЭДС $E_{экв}$ и эквивалентным внутренним сопротивлением $R_{i\,экв}$ (рисунок 28, б). В этом случае расчет эквивалентной ЭДС $E_{экв}$ производиться по следующей формуле:

$$E_{экв} = \frac{\sum EG}{\sum G}; \; G = \frac{1}{R_{i\,экв}} = \sum \frac{1}{R_i},$$

где $\sum EG$ − алгебраическая сумма произведений ЭДС E ветви на резистивную проводимость G этой ветви.

Рассчитаем токи для электрической цепи изображенной на рисунке 28, а). Для этого определим $E_{экв}$ и $R_{i\,экв}$. Пусть например эквивалентная ЭДС направлена к точке A, т. е. на точке $A(+)$,а на точке B $(-)$. В этом случае в формуле для $E_{эк} = \dfrac{\sum EG}{\sum G}$ со знаком плюс следует записать не ЭДС, которые в исходной схеме направлены стрелками к точке A, а со знаком минус – те ЭДС стрелки, которых направлены к точке B. Все резистивные проводимости записываются со знаком плюс.



а) б)

Рисунок 28 − Исследуемая электрическая цепь

$$E_{экв} = \frac{\sum EG}{\sum G} = \frac{E_1(\frac{1}{R_{i1}+R_1}) - E_2(\frac{1}{R_{i2}+R_2}) + E_3(\frac{1}{R_{i3}+R_3})}{\frac{1}{R_{i1}+R_1} + \frac{1}{R_{i2}+R_2} + \frac{1}{R_{i3}+R_3}}.$$

Затем подставляются численные значения, и вычисляется значение ЭДС $E_{экв}$. Если $E_{экв}$ получается со знаком плюс, то это означает, что предполагаемая полярность источника $E_{экв}$ выбрана правильно, а если со знаком минус, то действительная полярность противоположна выбранной. После проведенных преобразований получается неразветвленная цепь, в которой, зная значения ЭДС $E_{экв}$, эквивалентного внутреннего сопротивления $R_{экв}$, сопротивления нагрузки R_H, можно составить уравнение по второму правилу Кирхгофа:

$$E_{экв} = U_{Riэкв} + U_{R_H},$$

откуда $E_{экв} = R_{iэкв} I_{экв} + R_H I_{экв} = (R_{iэкв} + R_H) I_{экв}$, а $I_H = \frac{E_{'rэкв}}{R_{iэкв} + R_H}$.

Определим напряжение на узлах U_{AB}. Предположим, что в ветви с нагрузочным сопротивлением, ЭДС равна нулю $(E_4 = 0)$. В этом случае вся цепь превращается в разомкнутую цепь с ЭДС $E_{экв}$, но в разомкнутой ветви напряжение на внешних зажимах равно ЭДС источника, т.е. $U_{AB} = E_{экв}$. Следовательно

$$U_{AB}=\left(\frac{\sum EG}{\sum G}\right)=\frac{\dfrac{E_1}{R_{i1}+R_1}-\dfrac{E_2}{R_{i2}+R_2}+\dfrac{E_3}{R_{i3}+R_3}}{\dfrac{1}{R_{i1}+R_1}+\dfrac{1}{R_{i2}+R_2}+\dfrac{1}{R_{i3}+R_3}+\dfrac{1}{R_H}}.$$

Выбрав произвольно направления токов в ветвях и зная значение U_{AB}, рассчитываем токи в ветвях.

$$I_1=\frac{E_1-U_{AB}}{R_1+R_{i1}};\;\; I_2=\frac{E_2+U_{AB}}{R_{i2}+R_2};\; I_3=\frac{E_3-U_{AB}}{R_{i3}+R_3};\; I_H=\frac{U_{AB}}{R_H}.$$