Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.И. БОГДАНОВИЧ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ: КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Для студентов первого курса специальности
1-31 04 03 «Физическая электроника»

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2015

Лекция 5

Раздел 2 Электрическая цепь однофазного синусоидального тока

Тема 1 Способы соединения элементов электрической цепи однофазного синусоидального тока

Синусоидальные электрические величины

Электрические цепи, в которых ЭДС, напряжения и токи изменяются во времени по синусоидальному закону, называются цепями переменного синусоидального тока. Значение переменного тока в любой заданный момент времени называют мгновенным током i.

Электромагнитный процесс в электрической цепи, при котором мгновенные значения напряжения и токов повторяются через равные промежутки времени, называется периодическим. Наименьшие время, по истечении которого мгновенные значения периодической величины повторяются, называются периодом − T. Величина обратная периоду, т.е. число периодов в единицу времени, называется частотой: $f = \frac{1}{T}$. Частота f измеряется в Герцах (Гц).

Преобладающим видом периодического процесса в электрических цепях является синусоидальный режим - все напряжения и токи являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. Это возможно только при заданных синусоидальных значениях ЭДС и токах источника. Тем самым обеспечивается наиболее выгодный эксплутационный режим работы электрических установок.

На рисунке 1 изображена синусоидальная функция мгновенного значения напряжения $u = U_m\, sin(\omega t + \psi)$,

где U_m − амплитудное значение напряжения;

ω − угловая частота или скорость изменения аргумента $\omega = 2\pi f$;

ψ − начальная фаза, определяемая смещением синусоиды относительно начала координат. Величина $(\omega t + \psi)$, определяющая стадию изменения синусоидальных величин, называется фазовым углом или фазой.

Анализ цепей переменного тока с использованием мгновенных значений ЭДС, напряжения и тока весьма неудобен, поэтому для оценки эффективности действия синусоидально изменяющегося тока его заменяют эквивалентным неизменным во времени током, так называемым действующим.

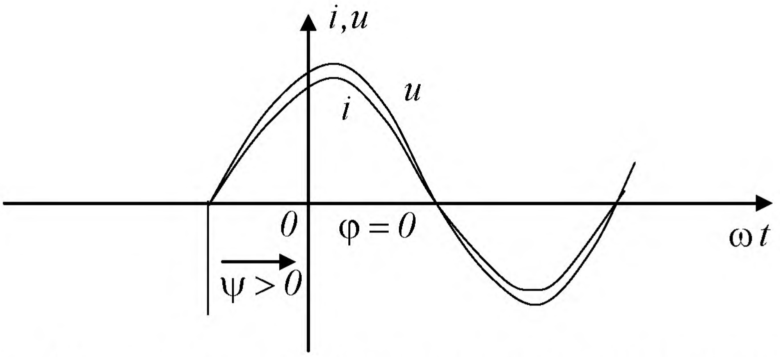

Рисунок 1 − Синусоидальная функция мгновенного значения напряжения $u = U_m \, sin(\omega t + \psi)$

Действующим значением периодически изменяющегося тока I (ЭДС, напряжения) называют среднеквадратичное значение тока за период: $I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 dt}$.

Действующее значение синусоидального тока $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot I_m$.

Действующее значение синусоидального напряжения $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot U_m$.

Действующее значение синусоидальной ЭДС $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707 \cdot E_m$.

Синусоидальный ток в сопротивлении

Пусть к резистору с сопротивлением R приложено синусоидальное напряжение вида $u = U_m \, sin(\omega t + \psi)$ (рисунок 2), то в резисторе будет протекать ток равный

$$i = \frac{U_m}{R} sin(\omega t + \psi) = I_m \, sin(\omega t + \psi).$$

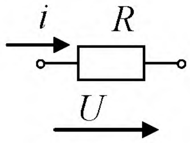

Рисунок 2 − Участок электрической цепи, содержащий сопротивление

Так как начальная фаза не изменилась, следовательно, напряжение на выводах сопротивления U_m и ток I_m, проходящий через это сопротивление, имеют одинаковую начальную фазу, или совпадает по фазе, т. е. они одновременно достигают своих амплитудных значений и соответственно одновременно проходят через нуль.

Разность начальных фаз двух синусоид, имеющих одинаковую частоту, называются фазовым сдвигом. В данном случае фазовый сдвиг между напряжением и током равен нулю: $\varphi = (\psi_u - \psi_i) = 0$.

Для описания процессов, возникающих в сопротивлении R при прохождении через него синусоидального тока, применяют не только мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока в нём, но и амплитудные и действующие значения напряжения и тока, связанные между собой законом Ома:

$U_m = RI_m;\ U = RI.$

Закон Ома для проводимости $g = 1/R$ имеет вид:

$I_m = gU_m; \quad I = gU.$

Синусоидальный ток в индуктивности

Рассмотрим катушку с индуктивностью L, активным сопротивлением которой можно пренебречь, т. е. идеальную катушку (рисунок 3). Пусть через нее проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$.

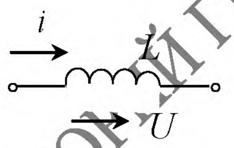

Рисунок 3 − Участок электрической цепи, содержащий индуктивность

Этот ток вызовет в катушке ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L\frac{di}{dt} = -\omega L i_m \cos(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}).$$

Напряжение на индуктивности определяется как $u_L = -e_L = U_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2})$.

Из формулы видно, что ток отстает по фазе от напряжения на угол $\frac{\pi}{2}$.

Под фазовым сдвигом понимается разность начальных фаз тока и напряжения, который для индуктивного элемента равен $\varphi = (\psi_u - \psi_i) = \frac{\pi}{2}$.

Закон Ома для амплитудных значений тока и напряжений записывается как:

$U_m = \omega L I_m = X_L I$, а для действующих значений − $U = \omega L I = X_L I$.

Величина $X_L = \omega L$ называется индуктивным сопротивлением, а - $b_L = \dfrac{1}{\omega L}$ − индуктивной проводимостью.

Амплитудное значение тока на индуктивности через проводимость запишется как, $I_m = b_L U_m$, а действующее значение тока − $I = b_L U$.

Синусоидальный ток в ёмкости

Пусть приложенное напряжение на ёмкости C синусоидально и равно $u = U_m \, sin(\omega t + \psi)$, тогда ток, протекающий по емкости (рисунок 4) запишется как

$$i = C\frac{dU}{dt} = \omega C U_m \, cos(\omega t + \psi) = I_m \, sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}).$$

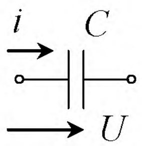

Рисунок 4 − Участок электрической цепи, содержащий емкость

Следовательно, ток i опережает приложенное напряжение по фазе на угол $\dfrac{\pi}{2}$, т. е. нулевым значением тока соответствует максимальное (положительное или отрицательное) значение напряжения U. Фактически это объясняется тем, что когда электрический заряд q и соответственно напряжение $U = \dfrac{q}{C}$ достигает максимального значения f, ток i равен нулю.

Фазовый сдвиг между напряжением и током на емкости равен

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Амплитудное и действующее значения напряжения соответственно равны

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m \,; U = X_C I.$$

Величина $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ называется емкостным сопротивлением, а − $b_C = \dfrac{1}{\omega C}$ − емкостной проводимостью.

Амплитудное и действующее значения токов соответственно равны

$$I_m = b_C U_m ; I = b_C U.$$

Последовательное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов в цепи однофазного синусоидального тока

Пусть по электрической цепи (рисунок 5) протекает ток $i = I_m sin(\omega t)$.

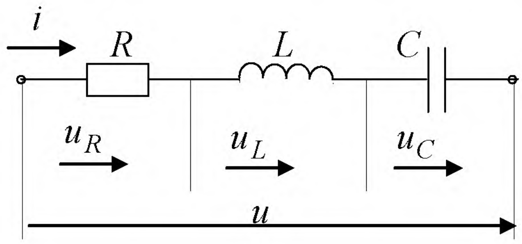

Рисунок 5 – Последовательное соединение RLC - элементов

Определим приложенное к цепи напряжение по второму правилу Кирхгофа $u = u_R + u_L + u_C$.

Напряжения u_R совпадает по фазе с током i на сопротивлении R, напряжение u_L опережает ток i по фазе на индуктивности L, а напряжение u_C отстаёт от тока I по фазе на ёмкости C на угол $\frac{\pi}{2}$.

Напряжение на выводах всей цепи будет равно:

$$U_m sin(\omega t + \varphi) = RI_m sin\omega t + \omega LI_m cos\omega t - \frac{1}{\omega C} I_m cos\omega t =$$

$$= RI_m sin\omega t + (\omega L - \frac{1}{\omega C}) I_m cos\omega t = I_m [R sin\omega t + X cos\omega t].$$

Уравнение представляет собой тригонометрическую форму записи второго правила Кирхгофа для мгновенных значений напряжений.

Полное реактивное сопротивление цепи вычисляется по формуле

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{1}{\omega C}.$$

Если $X > 0$, цепь имеет индуктивный характер, если $X < 0$, цепь имеет емкостной характер. Активное сопротивление R всегда положительно.

Амплитудное значение напряжения запишется как $U_m = I_m \sqrt{(R^2 + X^2)}$. Если полное сопротивление цепи обозначить как $Z = \sqrt{(R^2 + X^2)}$, то амплитудное значение перепишется как $U_m = ZI_m$. Учитывая, что действующее значение напряжения и амплитудное связаны следующим соотношением $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, действующее значение напряжения имеет следующий вид $U = ZI$. Угол сдвига фаз между током и напряжением можно определить следующим образом $tg\varphi = \dfrac{X}{R};\ \varphi = arctg\dfrac{X}{R}$,

Если заданно напряжение $u = U_m\, sin(\omega t + \psi)$ на выводах цепи с последовательно соединенными R, L, C элементами, то ток определяется по формуле

$$i = \frac{U_m}{Z} Sin(\omega t + \psi + \varphi).$$

Если цепь носит индуктивный характер, то угол $\varphi > 0$, при емкостном характере цепи угол $\varphi < 0$. Угол φ положителен при отстающем по фазе от напряжения токе, и угол φ отрицателен при опережающем по фазе от напряжения токе.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $X = X_L - X_C = 0$, т. е. при равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений. Такой режим цепи называется резонансом напряжений.

Если из треугольника сопротивлений выразить $R = Z\cos\varphi;\ \ X = Z\sin\varphi$, то активная составляющая напряжения запишется как $U_a = RI = ZI\cos s\varphi = U\cos\varphi$, а реактивная составляющая напряжения − $U_P = XI = ZI\sin\varphi = U\sin\varphi$.

Действующее значение напряжения определится как $U = \sqrt{U^2{}_a + U^2{}_P}$.

Параллельное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов в цепи однофазного синусоидального тока

Пусть к выводам электрической цепи (рисунок 6) приложено синусоидальное напряжение $u = U_m\, sin(\omega t + \psi)$. Мгновенное значение тока определим по первому правилу Кирхгофа $i = i_R + i_L + i_C$.

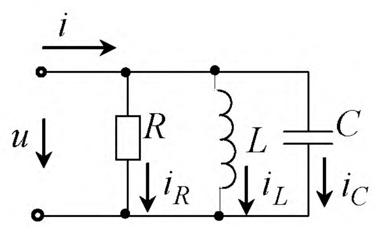

Рисунок 6 − Параллельное соединение RLC-элементов

Известно, что ток i_R в сопротивлении R совпадает по фазе с напряжением u, ток i_L в индуктивности L отстаёт, а ток i_C в ёмкости C опережает напряжение по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$.

Суммарный ток в цепи равен

$$I_m \sin(\omega t + \Psi) = \frac{1}{R} U_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \omega C U_m \cos \omega t =$$

$$= U_m \left[\frac{1}{R} \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] = U_m [g \sin \omega t - b \cos \omega t],$$

где b – полная реактивная проводимость цепи, которая вычисляется по формуле, $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C.$ Уравнение представляет тригонометрическую форму записи первого правила Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений.

Если полная реактивная проводимость цепи $b > 0$, то цепь носит индуктивный характер, если $b < 0$ – емкостной характер. Активная проводимость $g = \frac{1}{R}$ всегда положительна.

Амплитудное значение тока можно записать как $I_m = \sqrt{g^2 + b^2} U_m; \ I_m = Y U_m$, где $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$ – модуль полной проводимости рассматриваемой цепи. Действующее значение тока имеет следующий вид $I = \sqrt{g^2 + b^2} U; I = YU$.

Угол сдвига фаз между током I и напряжением U равен

$$\varphi = arctg \frac{b}{g} = arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}.$$

Если задано напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на выводах цепи с параллельно соединенными R, L, C элементами, то ток будет определяется по следующей формуле $i = g U_m Sin(\omega t + \psi + \varphi)$.

Угол $\varphi > 0$ при индуктивном характере цепи, т.е. при полной проводимости цепи $b > 0$, при этом ток отстает по фазе от напряжения. Угол $\varphi < 0$ при емкостном характере цепи, т. е. при $b < 0$, при этом ток опережает по фазе напряжение.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $b = b_L - b_C = 0$, т. е. при равенстве индуктивной и емкостной проводимостей. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом тока.

Если выразить активную проводимость как $g = y \cos \varphi$, а реактивную проводимость как $b = y \sin \varphi$, то активная составляющая тока запишется как $I_a = gU = yU\cos\varphi = I\cos\varphi$, а реактивная составляющая тока – $I_p = bU = yU\sin\varphi = I\sin\varphi$.

Тогда действующее значение суммарного тока, или модуль тока имеет вид $I = \sqrt{I^2{}_a + I^2{}_p}$.

Рассмотрим случай для участка, напряжение на котором равно $u = U_m Sin(\omega t)$, а ток равен $i = I_m Sin(\omega t + \varphi)$.

Мгновенная мощность, поступающая в цепь $p = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) = UI[\cos\varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$ состоит из двух слагаемых: постоянной величины $UI\cos\varphi$ и синусоидальной, имеющей удвоенную частоту по сравнению с частотой напряжения и тока.

Активная мощность, поступающая в цепь равна

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T ui\,dt - UI\cos\varphi.$$

Множитель $\cos\varphi$ носит название коэффициента мощности.

Активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока, умноженному на коэффициент мощности.

Чем ближе угол φ к нулю, тем ближе $\cos\varphi$ к единице и, следовательно, тем больше при заданных значениях U и I активная мощность передаётся источником приемнику.

Выражения для активной мощности может быть преобразовано следующим образом:

$$P = ZI^2\cos\varphi = RI^2,\ P = gU^2\cos\varphi = gU^2,\ P = U_a I,\ P = U\ I_a.$$

Выражение для реактивной мощности можно записать в виде:

$$Q = ZI^2\sin\varphi = XI^2,\ Q = yU^2\sin\varphi = bU^2,\ Q = U_p I,\ Q = U\ I_p.$$

Очевидно, что $S = P^2 + Q^2;\ \sin\varphi = \frac{Q}{S};\ tg\varphi = \frac{Q}{P}$.