Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

В.И. БОГДАНОВИЧ

ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ: КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

**Для студентов первого курса специальности
1-31 04 03 «Физическая электроника»**

**Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2015**

Лекция 6

Раздел 2 Электрическая цепь однофазного синусоидального тока

Тема 2 Применение комплексных чисел и векторных диаграмм к расчёту электрических цепей однофазного синусоидального тока

Представление синусоидальных функций в виде проекций вращающихся векторов

При расчёте более сложных цепей тригонометрическая форма расчёта затруднительна, поэтому применяют метод комплексных амплитуд. Комплексный метод основан на представлении векторов в комплексной плоскости и на записи их комплексными числами. Это позволяет для цепей синусоидального тока применять законы Ома и правила Кирхгофа и вытекающие из них методы расчета цепей в той же форме, что и для цепей постоянного тока. Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, которое можно записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

Комплексным числом называют сумму действительного и мнимого числа

$$\dot{A} = A_1 + jA_2 = A\cos\varphi + jA\sin\varphi = Ae^{j\alpha},$$

где A – модуль, α – аргумент или функция, $j = \sqrt{-1}$ – комплексное число.

Очевидно, что $A^2 = A_1^2 + A_2^2$; $\alpha = arctg\dfrac{A_2}{A_1}$.

Вектор, вращающийся в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, с угловой скоростью ω может быть выражен (рисунок 7):

$$Ae^{j(\omega t+\alpha)} = \dot{A}e^{j\omega t},$$

где $\dot{A} = Ae^{j\alpha}$ – комплексная амплитуда.

Множитель $e^{j\omega t}$ – оператор вращения (рисунок 8). Умножение комплексной амплитуды $\dot{A}$ на $e^{j\omega t}$ означает поворот вектора $\dot{A}$ на угол ωt в положительном направлении.

$$Ae^{j(\omega t+\alpha)} = A\cos(\omega t+\alpha) + jA\sin(\omega t+\alpha);$$

$$A\sin(\omega t+\alpha) = Im(\dot{A}e^{j\omega t}); \quad A\cos(\omega t+\alpha) = Re(\dot{A}e^{j\omega t}).$$

Если синусоидальные функции имеют одну и туже частоту, то соответствующие этим функциям векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью и поэтому углы между ними сохраняются неизменными:

$$U_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1);$$

$$U_2 = U_{2m} \sin(\omega t - \psi_2); \varphi = \psi_1 - (-\psi_2) = \psi_1 + \psi_2.$$

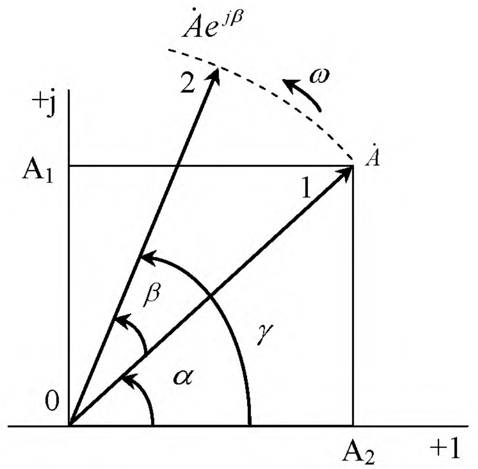


Рисунок 7 − Вектор, вращающийся в положительном направлении

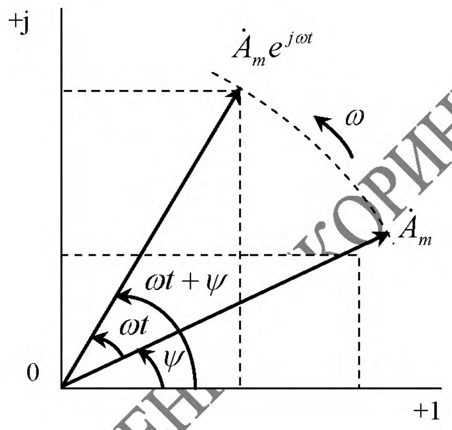


Рисунок 8 − Оператор вращения

Диаграмма, изображающая совокупность векторов, построенных с соблюдением их взаимной ориентации по фазе, называется векторной диаграммой.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB\cos(\alpha - \beta)}; \quad tg\gamma = \frac{A\sin\alpha + B\sin\beta}{A\cos\alpha + B\cos\beta}.$$

Правила сложения и вычитания векторов приведены на рисунках 9, 10.

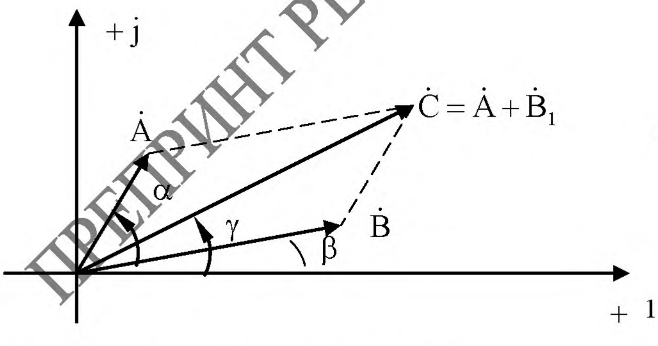


Рисунок 9 – Сложение векторов

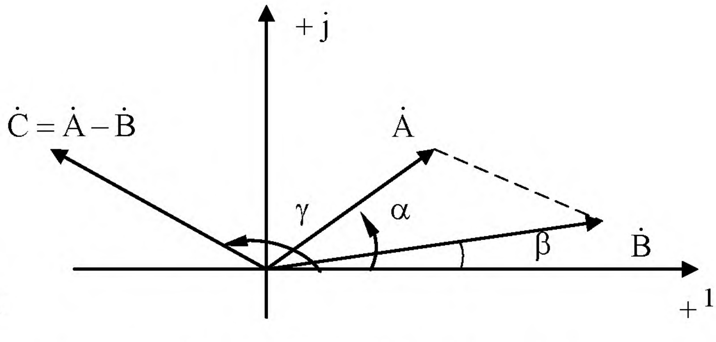


Рисунок 10 – Вычитание векторов

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.
Последовательное соединение R, L, C элементов

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 11.

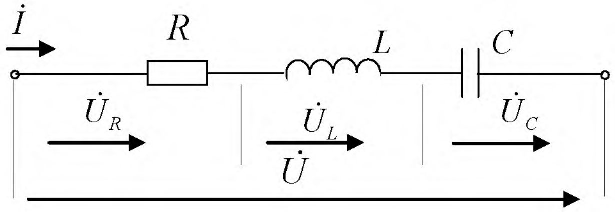


Рисунок 11 – Последовательное соединение RLC - элементов

Запишем второе правило Кирхгофа в комплексной форме

$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$.

Выразим его через амплитудные значения тока и напряжения:

$$\dot{U} = R\dot{I}_m + j\omega\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m.$$

Если комплексное сопротивление рассматриваемой цепи равно

$$\underline{Z} = R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = R + jX,$$

то закон Ома для амплитудных значений примет вид

$\dot{U}_m = \underline{Z}\dot{I}_m$.

С учетом $\frac{U_m}{\sqrt{2}}$ и $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ для действующих значений закон Ома примет вид:

$\dot{U} = \underline{Z}\dot{I}$.

Выразим полное сопротивление цепи в тригонометрической и показательной формах

$$\underline{Z} = Z\cos\varphi + jZ\sin\varphi = Ze^{j\varphi},$$

где $Z = |\underline{Z}|$ – модуль комплексного числа $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$; $\varphi = arctg\frac{X}{R}$.

Построим векторную диаграмму. Пусть реактивное сопротивление цепи имеет индуктивный характер ($X > 0$), ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$). Напряжение $\dot{U}_R = R\dot{I}$ совпадает с током по фазе, $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$ – напряжение на индуктивности L (опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$), $\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$ – напряжение на емкости (отстает от тока I на угол $\frac{\pi}{2}$) (рисунок 12).

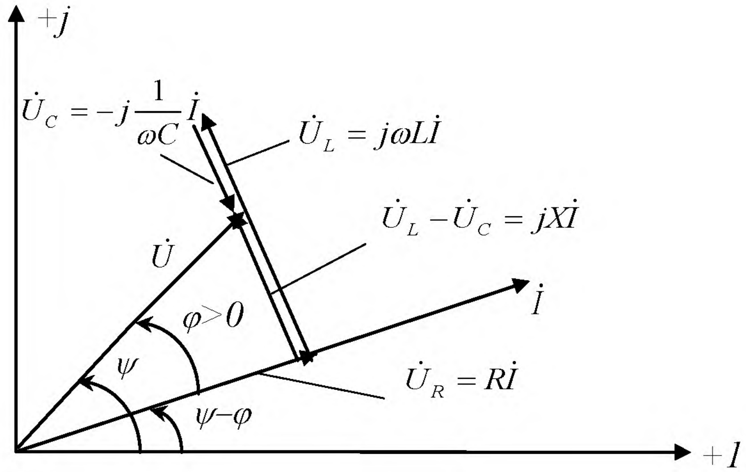


Рисунок − Векторная диаграмма

Если реактивное сопротивление цепи емкостное $X < 0$, ток опережает на фазе напряжение на угол $\frac{\pi}{2}(\varphi < 0)$. Тогда векторная диаграмма имеет вид (рисунок 13).

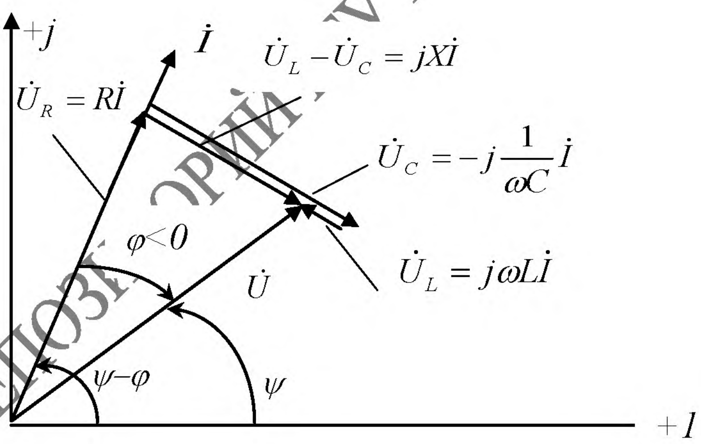


Рисунок 13 − Векторная диаграмма

Геометрическая сумма векторов $\dot{U}_R, \dot{U}_L, \dot{U}_C$ даёт вектор приложенного к цепи напряжения $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$.

Построим треугольник сопротивлений для двух случаев: если $X > 0$ и $X < 0$ (рисунок 14):

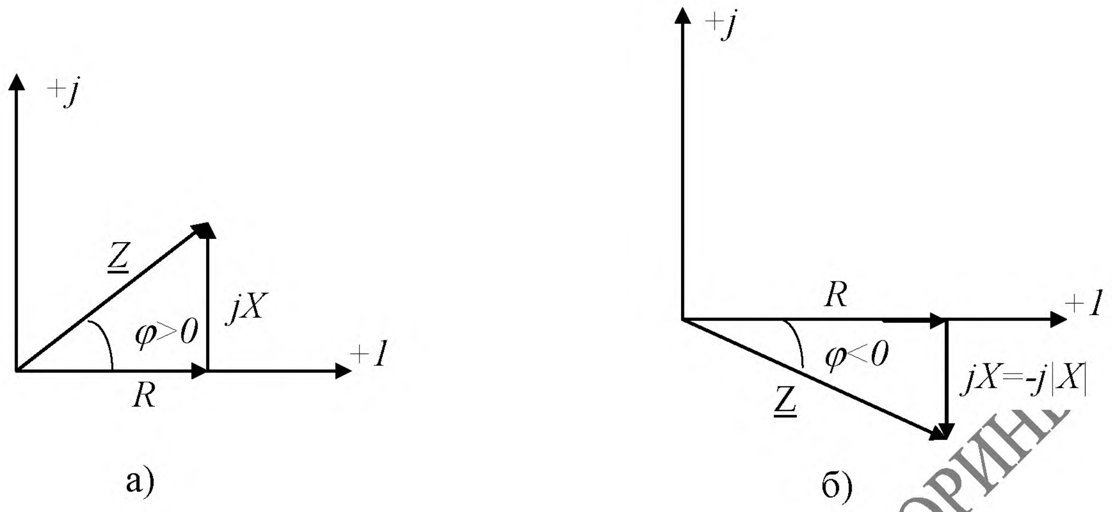


Рисунок 14 − Треугольник сопротивлений

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Параллельное соединение R,L,C элементов

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 15.

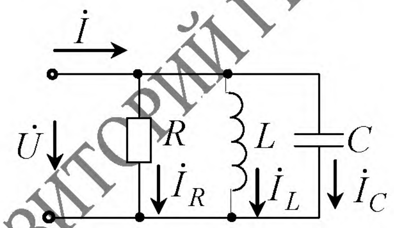


Рисунок 15 – Параллельное соединение RLC-элементов

Запишем первое правило Кирхгофа для этой цепи

$$\dot{I} = g\dot{U} + \frac{1}{g\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C,$$

где $\dot{I} = g\dot{U}$ ток в сопротивлении R (ток совпадает по фазе с напряжением); $\dot{I}_L = -j\dfrac{1}{\omega L}\dot{U}$ ток индуктивности (ток отстаёт от напряжения на угол $\dfrac{\pi}{2}$); $\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}$ – ток в ёмкости (ток опережает напряжение на угол $\dfrac{\pi}{2}$).

Формула для определения комплексной проводимости запишется $\underline{Y} = g - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C) = g - jb$, где g – активная, b – реактивная проводимости.

Запишем закон Ома в комплексной форме $\dot{I} = \underline{Y}\dot{U}$,
где $\underline{Y} = Y\cos\varphi - jY\sin\varphi$ или $\underline{Y} = Y\, e^{-j\varphi}$, где $Y = |Y|$ – модуль комплексного числа, а $\underline{Y}$ – полная проводимость цепи равная $\underline{Y} = g - jb$, а $\varphi = arctg\frac{b}{g}$ – сдвиг фаз в цепи.

Построим векторные диаграммы. Рассмотрим электрическую цепь, у которой проводимость имеет индуктивный характер, т. е. $b > 0$ и $\varphi > 0$ (рисунок 16).

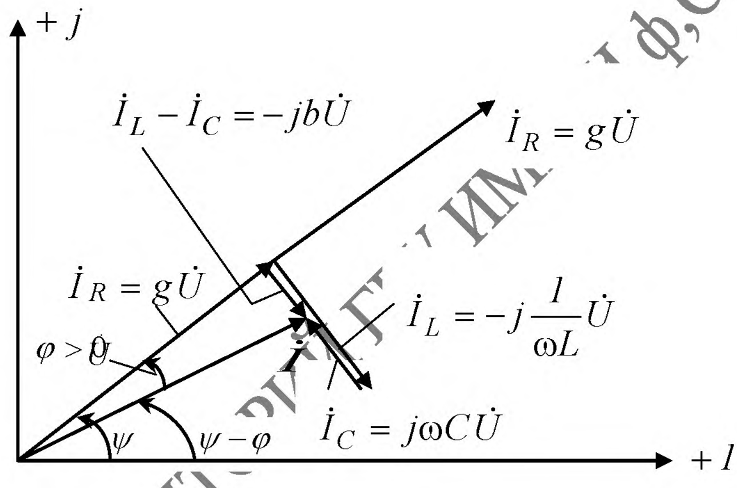


Рисунок 16 – Векторная диаграмма

Для случая, когда реактивная проводимость имеет емкостной характер, т. е. $b < 0$, $\varphi < 0$, векторная диаграмма представлена на рисунке 17.

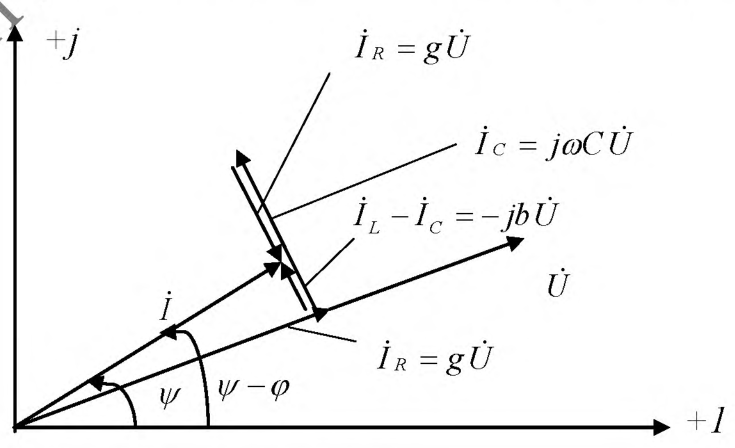
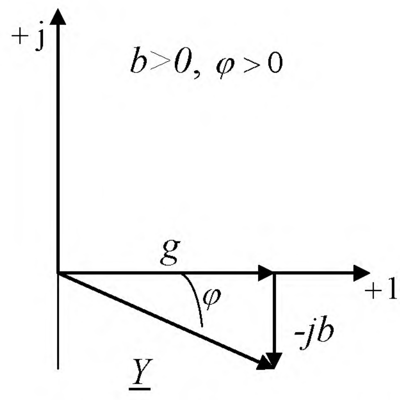


Рисунок 17 – Векторная диаграмма

Нарисуем треугольник проводимостей для двух случаев. Если полная проводимость цепи $b > 0$ и полная проводимость цепи $b < 0$ (рисунок 18):



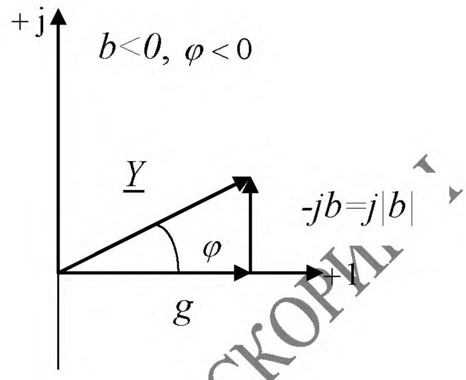


Рисунок 18 – Треугольники проводимостей

Уравнение напряжения для основных элементов цепи в общей форме (дифференциальной, интегральной) и при синусоидальном режиме в тригонометрической форме и комплексной

Элементы	Общая форма	Синусоидальный режим	
		Тригонометрическая форма	Комплексная форма
Сопротивление	$U = Ri$ $i = gU$	$U = RI_m \sin(\omega t + \psi)$ $i = gU_m \sin(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = R\dot{I}$ $\dot{I} = g\dot{U}$
Индуктивность	$U = L\dfrac{di}{dt}$ $i = \dfrac{1}{L}\int\limits_{-\infty}^{t} U dt$	$U = \omega L I_m \sin(\omega t + \psi)$ $i = -\dfrac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = j\omega L\dot{I}$ $\dot{I} = -j\dfrac{1}{\omega L}\dot{U}$
Ёмкость	$U = \dfrac{1}{C}\int\limits_{-\infty}^{t} i\, dt$ $I = C\dfrac{du}{dt}$	$U = \dfrac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi)$ $I = \omega C u_m \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = -j\dfrac{1}{\omega C}\dot{I}$ $\dot{I} = j\omega C\dot{U}$

Цепь	$\underline{Z}$ при последовательном соединении	$\underline{Y}$ при параллельном соединении
R, L	$R + j\omega L$	$\dfrac{1}{R} - j\dfrac{1}{\omega L}$

R, C	$R - j\dfrac{1}{\omega C}$	$\dfrac{1}{R} + j\omega C$
R, L, C	$R + j(\omega L - \dfrac{1}{\omega C})$	$\dfrac{1}{R} - j(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C)$

Комплексная форма записи мощности электрической цепи однофазного синусоидального тока

Комплекс полной мощности цепи запишется

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI\cos\varphi + jUI\sin\varphi = P + jQ,$$

где $\dot{I} = Ie^{j\psi_1}$; $\dot{U} = Ue^{j\psi_2}$, а $\varphi = \psi_2 - \psi_1$ – фазовый сдвиг.

Основные методы расчёта однофазных цепей синусоидального тока

При расчете однофазных цепей синусоидального тока возможно применение всех ранее рассмотренных методов. Все эти методы применимы к расчету цепей однофазного синусоидального тока, с той лишь разницей, что следует применять законы Ома, правила Кирхгофа в комплексном виде и вместо сопротивлений R определять комплексные сопротивления $\underline{Z}$.

Рассмотрим анализ цепей однофазного синусоидального тока с одним источником на примере цепи, схема которой представлена на рисунке 25. Пусть необходимо определить токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ и напряжения на участках $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}$, активную, реактивную и полную мощности и построить векторную диаграмму в предложенной схеме рисунок 19, если известно, что

$U = 120\ В;\ R_1 = 10\ Ом;\ R_2 = 24\ Ом;\ R_3 = 15\ Ом;\ L_1 = 19{,}1\ мГн;\ L_3 = 63{,}5\ мГн;$
$C_2 = 455\ мкФ;\ f = 50\ Гц.$

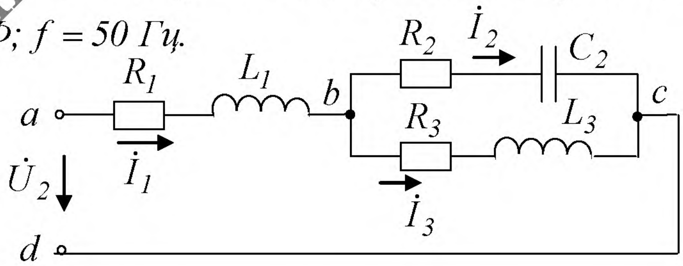


Рисунок 19 – Расчетная электрическая цепь

Решение: Определим комплексные значения сопротивлений в ветвях цепи в алгебраической и показательной формах:

$\underline{Z} = R \pm jX = Ze^{\pm j\varphi}$.

Первая ветвь содержит активно индуктивное сопротивление, которое вычисляется по формуле в алгебраической форме

$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j6\, Ом.$

В показательной форме оно имеет вид

$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi 1} = 11{,}6 \cdot e^{j31^\circ}\ Ом.$

Вторая ветвь содержит активно емкостное сопротивление, которое вычисляется как

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j\frac{1}{\omega C_2} = 24 - j7 = 25e^{-j16^\circ}\ Ом..$$

Третья ветвь содержит активно индуктивное сопротивление, которое вычисляется как $\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 = 15 + j20 = 25e^{j53^\circ 05'}\ Ом.$

Выразим заданное значение напряжения в комплексном виде

$\dot{U} = Ue^{j0} = 120\, В.$

Определим полное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 24{,}4 + j10{,}8 = 26{,}7e^{j23^\circ 5'}\ Ом.$$

Определим токи в ветвях

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = 4{,}5e^{-j23^\circ 5'}\ А; \qquad \dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} = 2{,}7e^{j10^\circ 45'}\ А;$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 2{,}7e^{-j58^\circ 35'}\ А.$$

Запишем формулу для определения комплекса полной мощности цепи

$$\widetilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = 540e^{j23^\circ 55'} = 540\cos 23^\circ 55' + j540\sin 23^\circ 55' =$$

$$= (494 + j218)\, В \cdot А$$

и из нее определим значения активной и реактивной мощности.

$P = 494\, Вт; \quad Q = 218\, Вар.$

Построим векторную диаграмму и из нее определим значения напряжения $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}$ (рисунок 20).

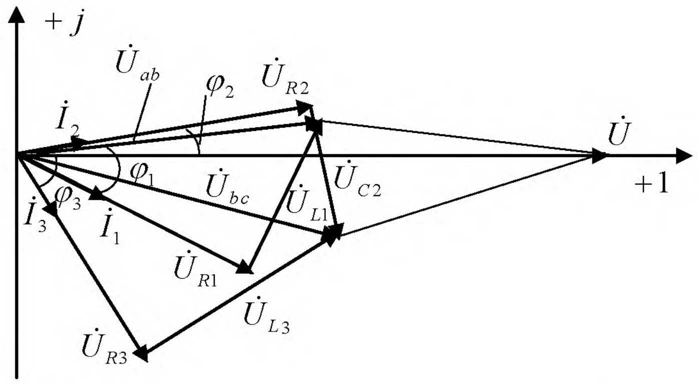


Рисунок 20 – Векторная диаграмма для электриченской цепи рисунка 19

Символический метод расчета цепей однофазного синусоидального тока

При синусоидальном токе, можно перейти от уравнений, составляемых для мгновенных значений и являющихся дифференциальными к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и ЭДС:

$\dot{E} \Rightarrow \dot{E}_m$

$\dot{U}_R = Ri \Rightarrow R\dot{I}_m$ – напряжение совпадает по фазе с током;

$\dot{U}_L = L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow \dot{I}_m j\omega L$ – напряжение опережает ток на угол $\dfrac{\pi}{2}$;

$\dot{U}_C = \dfrac{1}{C}\int idt \Rightarrow \dot{I}_m(-\dfrac{j}{\omega C})$ – напряжение отстает от тока на угол $\dfrac{\pi}{2}$.

На примере цепи, схема которой изображена на рисунке 21, рассмотрим применение символического метода.

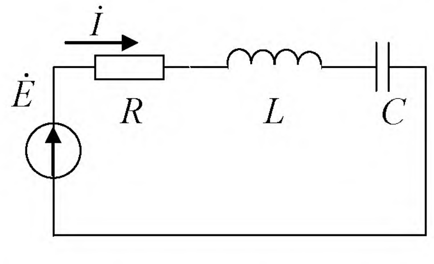


Рисунок 21 – Исследуемая электрическая цепь для символического метода

Составим уравнение по второму правилу Кирхгофа для мгновенных значений: $u_R + u_L + u_C = e$, $iR + L\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}\int idt = e$. Перейдем от него к записи для амплитудных значений токов и напряжений $\dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m(-\frac{j}{\omega C}) = \dot{E}_m$, т. е. получим закон Ома в комплексной форме $\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$.

Для действующих значений ток в электрической цепи при последовательном соединении элементов R, L, C запишется как

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})}$$

Рассмотрим применение символического метода на примере.

Для предложенной электрической цепи рисунка 22 определить значения, $\dot{I}, \dot{U}_{R1}, \dot{U}_{R2}, \dot{U}$, если известно, что

$$e = 141 sin\,\omega t\, B, R_1 = 3 Ом, R_2 = 2 Ом, L = 0{,}0095\, Г, \omega = 314\, c^{-1}.$$

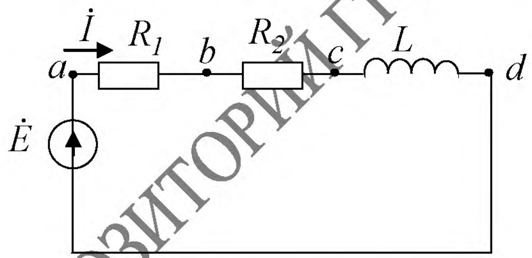


Рисунок 22 – Расчетная электрическая цепь

Запишем уравнение для мгновенных значений по второму правилу Кирхгофа $i(R_1 + R_2) + L\frac{di}{dt} = e$. Перейдем от него к уравнению в комплексной форме $\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L\dot{I} = \dot{E}$.

Полное сопротивление цепи определим, как $Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 5 + j3 = 5{,}8e^{j31^\circ}$. Действующее значение напряжение определим, как $\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100B$, тогда значение тока в цепи будет $\dot{I} = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}} = 17{,}2e^{-j31^\circ} A$. Вычислим напряжение на элементах цепи

$\dot{U}_{R1} = \dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 = 51{,}6e^{-j31^\circ}$ В;

$\dot{U}_{R2} = \dot{U}_{bc} = \dot{I}R_2 = 34{,}4e^{-j31^\circ}$ В; $\dot{U}_L = \dot{U}_{cd} = j\omega L\dot{I} = 51{,}6e^{j59^\circ}$ В.

Построим векторную диаграмму (рисунок 23), для чего направим значение ЭДС E по положительной оси. Ток отстает по фазе от ЭДС на угол 31°. На активных сопротивлениях R_1 и R_2 ток и напряжение совпадает по фазе. На индуктивном элементе напряжение опережает на угол $\frac{\pi}{2}$.

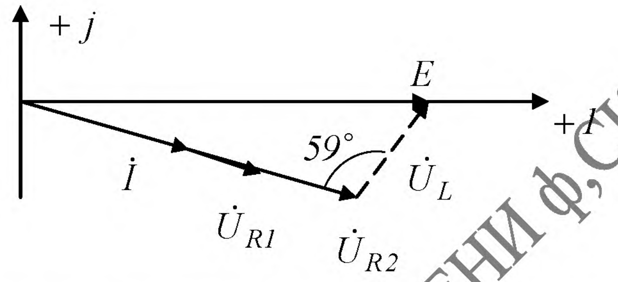


Рисунок 23 – Векторная диаграмма электрической цепи рисунка 22