

УДК 535.854

ЗОННАЯ ПЛАСТИНКА: РАСЧЕТ ДИФРАКЦИОННОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ

В. В. Верещагин, А. И. Лопатин и Т. М. Меланьина

В работе показано, что задача об аналитическом описании спектрального состава и распределения интенсивности света в фокальной плоскости длиннофокусной профилированной зонной пластинки может быть сведена к изучению стандартного интеграла, описывающего дифракцию сходящегося сферического фронта на круглом отверстии. Указаны границы применимости соответствующих формул и выполнено численное сравнение результатов «прямого» счета на ЭВМ с результатами, полученными аналитическим путем.

В предыдущих работах [1, 2] мы получили основные формулы, позволяющие с помощью ЭВМ рассчитать интенсивность световой волны, отраженной от профилированной зонной пластинки (ПЗП). Результаты численных расчетов, приведенные в [1, 2], показали целесообразность использования ПЗП в качестве спектрального фильтра в ИК области, что представляет значительный интерес.

Формулы, полученные в [1, 2], не дают приемлемого для практических целей решения задачи о спектральных свойствах ПЗП по двум причинам: а) получение ответа невозможно без использования ЭВМ; б) машинное время, необходимое для вычисления интегральных характеристик при реальных размерах выходной диафрагмы, слишком велико даже в том случае, когда входная диафрагма предполагается точечной. Расчет же спектральных характеристик ПЗП при реальных размерах обеих диафрагм по формулам, полученным в [1, 2], практически невозможен даже с помощью ЭВМ класса БЭСМ-6. Таким образом, следует попытаться получить более подробное аналитическое описание спектрального состава и интенсивности света, отраженного от поверхности ПЗП. В данной работе мы показываем, что в случае длиннофокусных пластинок эта задача сводится к изучению стандартного интеграла, хорошо известного в теории дифракции. Использование результатов этой теории позволяет сразу же выписать выражение для распределения интенсивности различных спектральных компонент в фокальной плоскости ПЗП; тем самым решается вопрос об аналитическом вычислении спектральных характеристик отраженного света при точечной входной диафрагме, обеспечивающей нормальное падение волнового фронта на поверхность ПЗП.

1. Прежде всего напомним результаты, полученные нами [1] при рассмотрении поля в фокальной плоскости ПЗП, и уточним границы их применимости. Предполагается, что штрихи ПЗП имеют «идеальный» профиль, уравнение коего в цилиндрических координатах таково¹

$$z_n(r) = (r - r_n) \operatorname{tg} \frac{\alpha_n}{2} \quad (r_n \leq r \leq \rho_n),$$

где α_n — угол раскрытия n -го штриха, а

$$\rho_n = r_{n+1} \frac{f + n}{f + n \frac{r_{n+1}}{r_n}}.$$

¹ Мы используем те же обозначения, что и в [1]; все величины, обладающие размерностью длины, приведены в единицах λ_0 .

При этих условиях поле, создаваемое n -ным штрихом в точке $S_0(r_0, \varphi_0, f)$, принадлежащей фокальной плоскости ПЗП, может быть представлено в виде [1]

$$U_n(S_0) = k \exp\left(i2\pi \frac{T}{N} n\right) J_0\left(kr_0 \frac{r_n}{f+n}\right), \quad (1)$$

где

$$T = N\left(1 - \frac{\lambda_0}{\lambda}\right).$$

Полное поле, создаваемое ПЗП, имеющей N штрихов, таково

$$U(S_0) = \sum_n U_n(S_0). \quad (2)$$

Выражение (1) является приближенным. Оно справедливо в области

$$r_0 \ll \sqrt{2f}. \quad (3)$$

При условии медленного изменения слагаемых, сумму (2) можно заменить интегралом. Для этого достаточно, чтобы при изменении n на единицу, аргумент функции Бесселя изменялся на величину, малую по сравнению с «периодом» ее (который можно условно принять равным 2π); то же относится к показателю экспоненты. Таким образом, замена суммы интегралом возможна, если

$$|T| \ll N, \quad (4)$$

$$r_0 \left(1 - \frac{T}{N}\right) \left(\frac{r_{n+1}}{f+n+1} - \frac{r_n}{f+n}\right) \ll 1. \quad (5)$$

Условие (4) означает, что представление суммарного поля в виде интеграла будет справедливым лишь для длин волн, достаточно близких к характеристической длине λ_0 . Все выводы, полученные ниже, относятся только к этой (весьма узкой) спектральной области. Последнее обстоятельство, однако, не является в данном случае помехой. Выше мы отмечали [2], что естественной областью использования ПЗП является создание устройств типа спектрального фильтра высокого разрешения; в подобных устройствах, как правило, производится грубая предварительная селекция излучения, обрезающая края спектра. Таким образом, наибольший интерес представляет как раз описание спектральных характеристик ПЗП в области длин волн, удовлетворяющих условию (4).

Ограничение (5) при учете (4) и условия $f \gg 1$ можно представить в виде

$$r_0 \ll r_n \quad (n = 1, 2, \dots, N),$$

т. е. окончательно

$$r_0 \ll r_1 \approx \sqrt{2f}. \quad (6)$$

Сравнение (6) с (3) показывает, что рассматриваемое условие всегда выполняется в области, где справедливо представление поля в виде (1), если значения T удовлетворяют ограничению (4).

Итак, в границах применимости формулы (2) можно заменить в ней сумму интегралом; полученное выражение будет с достаточной точностью описывать поле в фокальной плоскости ПЗП, если ограничиться рассмотрением длин волн, достаточно близких к характеристической длине λ_0 .

Заменяв в (2) сумму интегралом и выполнив в последнем замену переменной, мы получим ²

$$U(S_0) = kf \int_0^{\alpha_N} \exp\left\{i2\pi \frac{T}{\nu} \frac{1}{\cos \alpha}\right\} J_0(kr_0 \sin \alpha) \frac{\sqrt{\sin \alpha}}{\cos^2 \alpha} d\alpha, \quad (7)$$

где $\nu = N/f$.

Представление (7) послужит основой всех последующих рассуждений.

² Здесь и далее знак \doteq означает, что опущен фазовый множитель, не влияющий на интенсивность.

2. Ранее [1] мы показали, что для эффективной фокусировки света с длиной волны λ_0 необходимо использовать длиннофокусные ПЗП, у которых

$$\nu \leq 0.2. \quad (8)$$

Поскольку

$$1 + \nu = \frac{1}{\cos \alpha_N}, \quad (9)$$

то (8) дает ограничения на максимальные углы раскрытия

$$\alpha_N \leq 30^\circ. \quad (10)$$

Условие (10) позволяет представить $\cos \alpha_N$ в виде

$$\cos \alpha_N \approx 1 - \frac{\alpha_N^2}{2},$$

что, с учетом (9), дает

$$\alpha_N^2 \approx 2\nu. \quad (11)$$

Для упрощения (7) воспользуемся приближенными выражениями

$$\sin \alpha \approx \alpha, \quad \cos^{-1} \alpha \approx 1 + \frac{\alpha^2}{2}, \quad \frac{\sin \alpha}{\cos^2 \alpha} \approx \alpha \quad (12)$$

и выполним замену переменной $x = \alpha/\alpha_N$. Учет (11) позволяет представить условия применимости приближений (12) в виде

$$\nu \ll \frac{3}{2}, \quad |T| \ll \frac{1}{\nu}, \quad r_0 \ll 6 \cdot (2\nu)^{-3/2}. \quad (13)$$

Собрав воедино ограничения (5), (6) и (13) и учтя, что условие $\nu \ll 1.5$ в рассматриваемом случае всегда выполняется, мы можем окончательно сформулировать следующее утверждение: в фокальной плоскости поле отраженной от ПЗП плоской волны (падение нормальное) можно представить в виде

$$U(S_0) = 4\pi N \int_0^1 \exp\left\{i4\pi T \frac{x^2}{2}\right\} J_0(2\pi r_0 \sqrt{2\nu} x) x dx, \quad (14)$$

это представление справедливо при

$$|T| \ll \min\left\{N, \frac{1}{\nu}\right\}, \quad r_0 \ll \min\left\{\sqrt{2f}, \frac{6}{(2\nu)^{3/2}}\right\}. \quad (15)$$

Заметим, что замена знака \ll во втором из ограничений (15) на знак \leq возможна потому, что осцилляции подынтегрального выражения приводят к значительному взаимному сокращению погрешностей.

3. В качестве примера рассмотрим ограничения (15) для пластинки, характеризующейся значениями параметров $\lambda_0 = 10$ мкм, $N = 1000$, $f = 20\,000$, $\nu = 5 \cdot 10^{-2}$. При этом условия (15) имеют вид $|T| \ll 20$, $r_0 \leq 200$.

Таким образом, в данном случае представление (14) позволяет описывать отраженные волны, длины которых отличаются от λ_0 не более, чем на 1%; это описание справедливо при диаметре выходной диафрагмы, не превышающем 1 мм.

Нетрудно понять, что ошибки, обусловленные использованием приближения (12), уменьшаются с уменьшением величины ν . Уменьшение же значения ν приводит не только к улучшению фокусирующих свойств пластинки для характеристической длины волны λ_0 , но и к улучшению ее спектральных характеристик (этот вопрос будет подробно рассмотрен в дальнейшем). Таким образом, представление (14) оказывается наиболее полезным как раз для описания ПЗП, обладающих высоким разрешением.

4. Для упрощения записи введем обозначения $\tau = 4\pi T$, $\rho = 2\pi \sqrt{2\nu} r_0$, $C = 4\pi N$. В этих обозначениях (14) принимает вид

$$U(S_0) = C \int_0^1 \exp\left\{i\tau \frac{x^2}{2}\right\} J_0(\rho x) x dx. \quad (16)$$

Интегралы типа (16) хорошо изучены в теории дифракции [3, 4]. Они описывают поле прошедшего сквозь круглую диафрагму сходящегося сферического фронта в окрестности фокуса, причем параметр ρ в этом случае имеет тот же смысл, что и у нас, а параметр τ определяет расстояние вдоль оптической оси от фокуса до плоскости наблюдения. Результат интегрирования в (16) можно записать несколькими способами, формально отличающимися друг от друга, но математически полностью эквивалентными. Ниже мы приводим наиболее удобные для вычислений представления, полученные в работах [5-7].

При $|\tau| \leq \rho$ удобно найденное в [5] представление

$$U(S_0) \doteq \frac{C}{\tau} \{U_1(\tau, \rho) - iU_2(\tau, \rho)\}. \quad (17)$$

В случае $|\tau| \gg \rho$ можно использовать представление

$$U(S_0) \doteq \frac{C}{\tau} \left\{ \exp\left(-i \frac{\rho^2}{2\tau}\right) - \exp\left(i \frac{\tau}{2}\right) [V_0(\tau, \rho) - iV_1(\tau, \rho)] \right\}, \quad (18)$$

также полученное в [5]. В этих формулах U_1 , U_2 , V_0 и V_1 — функции Ломмеля двух переменных [3-5, 8, 9].

При малых $|\tau|$ и ρ весьма удобно представление, найденное в работе [6]

$$U(S_0) \doteq C \sqrt{\frac{2\pi}{|\tau|}} \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) (-i)^n J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\tau}{4}\right) \frac{J_{2n+1}(\rho)}{\rho}. \quad (19)$$

Дополнительными к (17)–(19) являются полученные в [7] формулы

$$U(S_0) \doteq \frac{C}{\tau} \left\{ \exp\left(-i \frac{\rho^2}{2\tau}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} \left(\frac{\rho^2}{2\tau}\right)^n F_n\left(-\frac{i\tau}{2}\right) \right\}, \quad (20)$$

$$U(S_0) \doteq \frac{C}{\rho^2} \sum_{n=0}^{\infty} i^n n! \left(\frac{2\tau}{\rho^2}\right)^n G_n(\rho). \quad (21)$$

Функции F_n и G_n , фигурирующие в (20) и (21), таковы

$$F_n(x) \equiv \exp(-x) \sum_{p=0}^n \frac{x^p}{p!},$$

$$G_n(x) \equiv \sum_{p=0}^n (-1)^p \frac{x^{2p}}{(2^p p!)^2} [x J_1(x) + 2p J_0(x)].$$

Представление (20) удобно при $\rho^2 < 2|\tau|$, а (21) — при $\rho^2 > 2|\tau|$.

Использование формул (17)–(21) при расчетах полей, создаваемых в окрестности фокуса ПЗП, позволяет устранить одну из отмеченных выше трудностей. Время, необходимое ЭВМ для вычислений по этим формулам, не зависит от числа штрихов N и при $N \geq 50$ существенно меньше времени, необходимого для расчетов по формуле (2). Более того, наличие достаточно подробных таблиц функций Бесселя и Ломмеля позволяет обойтись вообще без использования ЭВМ, ибо приведенные представления обладают весьма быстрой сходимостью в соответствующих областях ρ и τ . Это обстоятельство особенно полезно при расчетах акустических ПЗП, где необходимо знание картины распределения интенсивности.

5. Формулы (17)–(21), позволяющие рассчитать интенсивность светового поля в фокальной плоскости ПЗП, являются приближенными, причем величина ошибки зависит от значений параметров ν , ρ и τ . Определение погрешности чисто теоретическими методами — задача сложная, поэтому для оценки степени точности полученных результатов нужно сравнить последние с расчетами по формуле (2), выполненными с помощью ЭВМ. Поскольку ошибка уменьшается

с уменьшением величины ν , то указанное сравнение следует провести при $\nu=0.1 \div 0.2$. Ограничения (15) дают область значений τ , в которой погрешности малы. Таким образом, можно рассмотреть лишь случай $\tau=0$; этого достаточно для оценки ошибок.

В [1, 2] мы привели результаты расчетов по формуле (2) при $\nu=0.1$; ими мы и воспользуемся здесь.

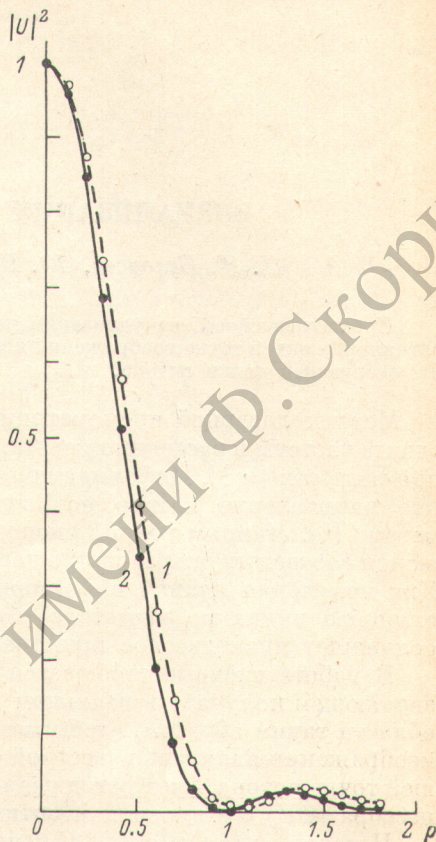
Положив в (16) $\tau=0$, находим

$$U(S_0) \doteq 2\pi N \frac{2J_1(\rho)}{\rho}. \quad (2)2$$

Для получения амплитуды, нормированной к единице, надо отбросить в (22) и в (2) множители $2\pi N$.

Результаты вычислений распределения интенсивности $|U(S_0)|^2$ по формулам (2) и (22) приведены на рисунке. Поскольку более 90% энергии собирается в двух первых максимумах, то подробное сравнение результатов при больших значениях r_0 интереса не представляет.

Сравнение приведенных на рисунке распределений показывает, что выражение (22) в области главного и первого побочного максимумов (т. е. там, где



Распределения интенсивности в околофокальной области.

1 — рассчитано по формуле (2), 2 — рассчитано по формуле (22).

собирается практически вся энергия отраженной от ПЗП плоской волны) с хорошей точностью воспроизводит результаты, полученные путем расчета по формуле (2).

Таким образом, представления (17)—(21) могут служить основой для аналитического вычисления интегральных характеристик света, отраженного от ПЗП.

Литература

- [1] В. В. Верещагин, А. И. Лопатин. Опт. и спектр., 46, 1002, 1979.
- [2] В. В. Верещагин, А. И. Лопатин. Опт. и спектр., 47, 159, 1979.
- [3] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1973.
- [4] Э. Грей, Г. Б. Мэтьюз. Функции Бесселя и их приложение к физике и механике. ИЛ, М., 1949.
- [5] E. Lommel. Abh. Bayer. Acad., 15, 231, 1885.
- [6] В. R. A. Nijboer. Physica, 13, 605, 1947.
- [7] A. Voivin. J. Opt. Soc. Am., 42, 60, 1952.
- [8] Г. Н. Ватсон. Теория бесселевых функций. ИЛ, М., 1949.
- [9] J. Walker. The analytical theory of light. Cambridge Univ. Press, London, 1904.

Поступило в Редакцию 11 декабря 1980 г.