временно будет достигаться равномерное распределение нагрузок – снижение их при горизонтальном положении «шатунов» и увеличение при вертикальном.

## Литература

1. Лискович, М. И. Анализ работы эллипсоидной звезды в цепной передаче / М. И. Лискович, Д. А. Максименко // Актуальные вопросы физики и техники: X Респуб. научн. конф. студентов, магистрантов и аспирантов : материалы: в 2 ч. Ч. 1. (Гомель, 22 апр. 2021 г.) / ГГУ им. Ф. Скорины ; редкол. : Д. Л. Коваленко (гл. ред.) [и др.]. – Гомель, 2021. – С. 305–308.

**М. В. Маркова**
(БелГУТ, Гомель)
Науч. рук. **Д. В. Леоненко**, д-р физ.-мат. наук, профессор

## МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КОЛЕБАНИЙ КРУГОВОЙ ТРЁХСЛОЙНОЙ СТУПЕНЧАТОЙ ПЛАСТИНЫ

Современное конструирование ориентировано на создание элементов, обладающих высокими показателями не только с физико-механической точки зрения, но и с экономической. Трёхслойные элементы конструкций позволяют обеспечить высокую прочность и жёсткость, обладая при этом минимальным собственным весом и наделяя конструкцию дополнительными свойствами: тепло- и звукоизоляцией, электромагнитной проницаемостью и т.д. Исследованию статического и динамического деформирования трёхслойных пластин посвящено немало работ как отечественных, так и зарубежных авторов. Однако все они относятся к пластинам, имеющим постоянную толщину.

Рассмотрим процесс колебания трёхслойной круговой ступенчатой пластины, побуждаемый внешним воздействием $q(r,t)$. Пластина образована соединением прочных и жёстких внешних несущих слоёв (толщиной $h_1$ и $h_2$) со срединным заполнителем ($h_3 = 2c$), обеспечивающим перераспределение усилий между слоями и их совместную работу. В работе [1] представлен вывод системы дифференциальных уравнений, позволяющих моделировать процесс колебания трёхслойной пластины произвольной переменной толщины: определять перемещение любой точки, и возникающие при этом в пластине внутренние усилия. Построение механико-математической модели базировалась на вариационном принципе Гамильтона [2], а деформирование пластины описывалось согласно гипотезе «ломаной нормали».

Ступенчатая пластина является частным случаем пластины переменной толщины и представляет собой совокупность сопряжённых прямолинейных участков (рисунок 1).

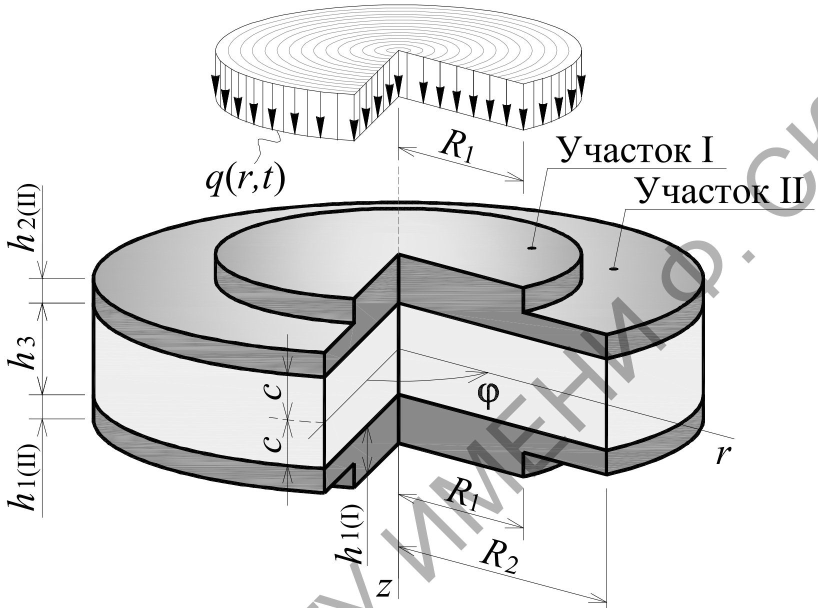


Рисунок 1 – Круговая ступенчато-выпуклая трёхслойная пластина

При $h_k = \mathrm{const}$ система уравнений, описывающая перемещения в пластине в процессе колебаний, после некоторых математических преобразований будет иметь вид

$$\Delta\Delta w + Dm\Delta\ddot{w} + DM_1\ddot{w} = Dq\,;$$

$$\psi = b_2 w,_r + C_3 r + \frac{C_4}{r} - \frac{m_2}{r}\int r\ddot{w}\,dr\ ; \qquad u = b_1 w,_r + C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{m_1}{r}\int r\ddot{w}\,dr\ ,$$

здесь $w$, $\psi$ и $u$ – прогиб пластины, относительный сдвиг в заполнителе и радиальное перемещение координатной поверхности соответственно; $\Delta$ – дифференциальный оператор Лапласа; $M_1$, $m_i$, $b_i$ и $D$ – коэффициенты, зависящие от плотности, упругих свойств материалов и толщины слоёв пластины; $C_i$ – константы интегрирования.

Для каждого участка ступенчатой пластины имеется своё решение относительно перемещений и внутренних усилий. Общее для пластины решение может быть построено с помощью смещённой функции Хевисайда ($H_0$):

$$w = w_{(\mathrm{I})} + \left(w_{(\mathrm{II})} - w_{(\mathrm{I})}\right) \cdot H_0\left(r - R_1\right);$$
$$\psi = \psi_{(\mathrm{I})} + \left(\psi_{(\mathrm{II})} - \psi_{(\mathrm{I})}\right) \cdot H_0\left(r - R_1\right);\ u = u_{(\mathrm{I})} + \left(u_{(\mathrm{II})} - u_{(\mathrm{I})}\right) \cdot H_0\left(r - R_1\right).$$

Точка изменения толщины пластины также формирует пакет дополнительных граничных условий, служащих для определения неизвестных констант интегрирования, полученных в результате решения системы дифференциальных уравнений. Так, кроме граничных условий, обусловленных способом опирания пластины, необходимо дополнительно потребовать равенства в точке изменения толщины (при $h_{1(\mathrm{I})} \to h_{1(\mathrm{II})}$; $h_{2(\mathrm{I})} \to h_{2(\mathrm{II})}$) всех возникающих перемещений и внутренних усилий: $u_{(\mathrm{I})} = u_{(\mathrm{II})}$, $\psi_{(\mathrm{I})} = \psi_{(\mathrm{II})}$, $w_{(\mathrm{I})} = w_{(\mathrm{II})}$, $w,_{r(\mathrm{I})} = w,_{r(\mathrm{II})}$, $T_{r(\mathrm{I})} = T_{r(\mathrm{II})}$, $M_{r(\mathrm{I})} = M_{r(\mathrm{II})}$, $H_{r(\mathrm{I})} = H_{r(\mathrm{II})}$ и $Q_{(\mathrm{I})} = Q_{(\mathrm{II})}$.

Используя метод Фурье [3], в [4] получено выражение, определяющее функцию прогиба собственных колебаний плоской трёхслойной пластины, также справедливое и для каждого прямолинейного участка ступенчатой пластины:

$$w_{(i)} = \left[C_5 I_0\left(r\gamma^+\right) + C_6 K_0\left(\gamma^+\right) + C_7 J_0\left(r\gamma^-\right) + C_8 Y_0\left(r\gamma^-\right)\right] \times$$
$$\times \left(A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right)\right),$$

где $\gamma^{\pm}$ – коэффициенты, зависящие от частоты колебаний пластины $\omega$; $I_0\left(r\right)$, $K_0\left(r\right)$, $J_0\left(r\right)$ и $Y_0\left(r\right)$ – функции Бесселя от действительного и мнимого аргумента; $C_i$ – константы интегрирования, определяемые из граничных условий; $A$ и $B$ – константы интегрирования, определяемые из начальных условий.

В случае, если внешнее воздействие $q(r,t)$, выводящее пластину из состояния равновесия, представлено многочленом первой степени по переменной $t$, функцию прогиба плоской трёхслойной пластины (участка ступенчатой пластины) можно записать в виде:

$$w_{(i)} = \left[ C_5 I_0\left(r\gamma^+\right) + C_6 K_0\left(\gamma^+\right) + C_7 J_0\left(r\gamma^-\right) + C_8 Y_0\left(r\gamma^-\right) \right] \times$$
$$\times \left( A\cos\left(\omega t\right) + B\sin\left(\omega t\right) \right) + C_{9(\mathrm{I,II})} + C_{10(\mathrm{I,II})} r^2 + C_{11(\mathrm{I,II})} \ln r + C_{12(\mathrm{I,II})} r^2 \ln r +$$
$$+ D\int \frac{1}{r} \int r \int \frac{1}{r} \int \left(rq\right) dr dr dr dr \,.$$

*Работа выполнена в рамках ГПНИ «Механика, металлургия, диагностика в машиностроении».*

## Литература

1. Маркова, М. В. Постановка начально-краевой задачи об осесимметричных колебаниях круговой трёхслойной пластины переменной толщины / М. В. Маркова, Д. В. Леоненко // Теоретическая и прикладная механика : междунар. науч.-техн. сб. – Минск, 2021. – Вып. 36. – С. 3–10.

2. Новацкий, В. Теория упругости / В. Новацкий. – Москва : Мир, 1975. – 872 с.

3. Араманович, И. Г. Уравнения математической физики / И. Г. Араманович, В. И. Левин. – Москва : Наука, 1969. – 288 с.

4. Маркова, М. В. Инерционная математическая модель динамического деформирования круговой трёхслойной ступенчатой пластины / М. В. Маркова // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. Естественные науки. – 2021. – № 6(129). – С. 164–170.

**И. С. Михалко**

(ГГУ имени Ф. Скорины, Гомель)

Науч. рук. **И. В. Семченко**, д-р физ.-мат. наук, профессор

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СИЛ В СЕЧЕНИЯХ ДВОЙНОЙ ДНК-ПОДОБНОЙ СПИРАЛИ ПРИ ВЫСОКОЧАСТОТНОМ РЕЗОНАНСЕ

В изучении взаимодействия двойной ДНК-подобной спирали с электромагнитным полем немалый интерес вызывают силы, возникающие в двух ветвях спирали под воздействием внешних полей, обусловленные распределением токов и зарядов вдоль спиральных линий. Силы, возникающие в ветвях очень длинной спирали, рассмот-