УДК 535.31

ОБ ОПИСАНИИ АБЕРРАЦИЙ ОПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

С. А. Родионов

Рассмотрены основные свойства аберрационной функции в обобщенных координатах, введенной ранее автором для описания аберраций оптических систем. Получены универсальные выражения для производных этой функции по предметным и зрачковым координатам, параметрам фокусировки, а также для ее полных дифференциалов. Как следствия этих выражений получены условия изопланатизма, показано, что применяющиеся в настоящее время в технической оптике функции для описания аберраций и условия изопланатизма есть частные случаи рассмотренных.

В предыдущих работах автора [1, 2] было показано, что как общая теория изопланатизма, основанная на ограничении пучков реальной апертурной диафрагмой, так и дифракционная теория оптического изображения приводят к не-

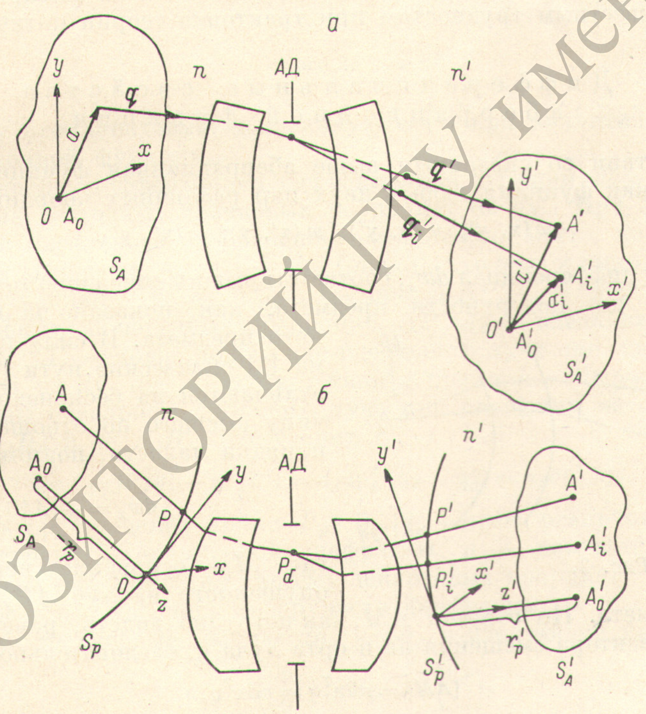

Рис. 1.

обходимости описания аберраций оптических систем новой функцией, представляющей собой оптическую длину луча $AP_dA'_i$ (рис. 1), выходящего из точки A предмета, терпящего в общем случае излом в точке P_d его пересечения с апертурной диафрагмой и попадающего в точку A'_i идеального изображения точки A

$$w = [AP_dA'_i]. \qquad (1)$$

Аргументами функции являются векторы обобщенных координат на предмете или изображении $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$ и векторы обобщенных входных или выходных зрачковых координат $\mathbf{y}$ или $\mathbf{y}'$. Обобщенные координаты $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$ при этом определяются следующим образом. Для близкого предмета или изображения[1] (рис. 1, *а*)

$$\mathbf{x} = \mathbf{a};\ \mathbf{x}' = \mathbf{a}';\ \mathbf{y} = n\mathbf{q};\ \mathbf{y}' = n'\mathbf{q}', \tag{2}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}'$ — двумерные радиус-векторы проекций точек A и A' на координатные плоскости oxy и $o'x'y'$ соответственно, $\bar{\mathbf{q}}$ и $\bar{\mathbf{q}}_i'$ — двумерные векторы проекций ортов $\mathbf{q}$ и $\mathbf{q}_i'$ лучей на эти плоскости; n и n' — показатели преломления в пространствах предмета и изображения. Для удаленного предмета и изображения имеем (рис. 1, *б*)

$$\mathbf{x} = -r_p^{-1}\mathbf{a};\ \mathbf{x}' = -r_p'^{-1}\mathbf{a}';\ \mathbf{y} = n\mathbf{p};\ \mathbf{y}' = n'\mathbf{p}_i', \tag{3}$$

где r_p и r_p' — радиусы сфер S_p и S_p', проведенных через полюсы o, o' и имеющих центры в точках A_0 и A_0' — центрах зон предмета и изображения, $\mathbf{p}$, $\mathbf{p}_i'$ — двумерные радиус-векторы проекций точек P и P_i' пересечения лучей AP_d и P_dA_i' со сферами S_p и S_p' на координатные плоскости oxy и $o'x'y'$ соответственно.

В настоящей работе мы проанализируем основные свойства аберрационной функции (1), являющейся обобщением понятий волновой аберрации и эйконалов. Отметим полную симметрию приведенных определений по отношению к обращению хода лучей, т. е. инвариантность их при замене предмета на изображение; в силу этого достаточно рассмотреть свойства в пространстве изображений, чтобы свойства в пространстве предметов получить по аналогии. Эта инвариантность правильно отражает действительность, а именно обратимость оптических систем. Применяемые в настоящее время для описания аберраций эйконалы или волновая аберрация не обладают такой инвариантностью, что приводит к известным трудностям при трактовке теории оптического изображения [3].

Дифференциальные свойства аберрационной функции

В соответствии со сказанным выше аберрационная функция может быть представлена как функция любых двух пар различных координат

$$w(\mathbf{x},\ \mathbf{y});\ w(\mathbf{x},\ \mathbf{y}');\ w(\mathbf{x}',\ \mathbf{y});\ w(\mathbf{x}',\ \mathbf{y}').$$

Рассмотрим дифференциал dw_x, соответствующий смещению точки предмета A на вектор $d\mathbf{x}$ по поверхности предмета, как показано на рис. 2 для близкого предмета. В силу принципа Ферма [4] оптические пути $[MP_d]$ и $[A_1P_d]$ отличаются на бесконечно малую величину высшего по отношению к $\|d\mathbf{x}\|$ порядка малости, поэтому

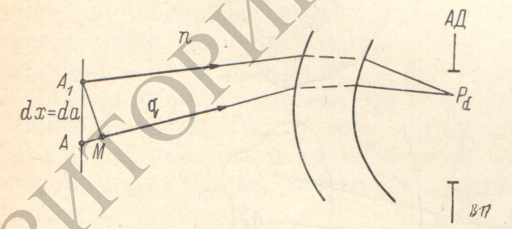

Рис. 2.

$$dw_x = -[AM], \tag{4}$$

где M — основание перпендикуляра, опущенного на луч AP_d из смещенной точки A_1 предмета. Но отрезок AM, как нетрудно видеть, равен скалярному произведению вектора смещения $d\mathbf{a}$ и орта луча $\mathbf{q}$, следовательно,

$$[AM] = n d\mathbf{a}^T\mathbf{q} = n d\mathbf{x}^T\mathbf{q}.$$

(В предыдущей формуле скалярное произведение записано в матричном виде, T — индекс транспонирования). В соответствии с определением (2) для близкого предмета окончательно имеем

$$dw_x = -d\mathbf{x}^T\mathbf{y}\ \text{ и, аналогично, }\ dw_{x'} = d\mathbf{x}'^T\mathbf{y}'. \tag{5}$$

[1] В соответствии с определением, введенным ранее в работах [1, 2], под предметом или изображением близкого типа (на «конечном расстоянии») будем понимать такие, для которых координаты $\mathbf{x}$ или $\mathbf{x}'$ рассматриваются как линейные, для предмета или изображения удаленного типа (на «бесконечности») координаты $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ рассматриваются как угловые, при этом расстояние до удаленного предмета или изображения не обязательно должно быть бесконечно велико, важно лишь восприятие их размеров как угловых.

Тот же результат в обобщенных координатах можно получить и для удаленных предмета и изображения.

Формулами (5) можно пользоваться, если точка предмета A и точка идеального изображения A'_i смещаются на векторы $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}'$ независимо друг от друга, например, при подборе точки наилучшего изображения в присутствии аберраций. На самом деле $d\mathbf{x}$ и $d\mathbf{x}'$ не независимы, а связаны матрицей $\mathbf{V}$ обобщенных увеличений [1, 5],

$$d\mathbf{x}' = \mathbf{V} d\mathbf{x}. \tag{6}$$

В этом случае из (5) и (6) получаем

$$dw_x = d\mathbf{x}^T (\mathbf{V}^T \mathbf{y}' - \mathbf{y}) \quad \text{или} \quad \nabla w_x = \mathbf{V}^T \mathbf{y}' - \mathbf{y}, \tag{7}$$

где ∇w_x обозначает вектор градиента w в пространстве $\mathbf{x}$ (с учетом (6)). Выражение (7) описывает изменение аберраций при смещении предмета и представляет

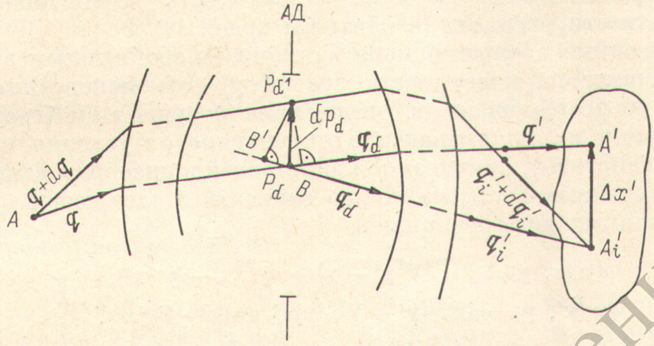

Рис. 3.

собой теорему изопланатизма, доказанную в [1] при аналитическом определении аберрационной функции.

Найдем теперь дифференциал аберрационной функции $dw_{y'}$, соответствующий изменению выходных зрачковых координат на $d\mathbf{y}'$. При этом точки A и A'_i предмета и идеального изображения остаются на месте, но луч смещается по апертурной диафрагме на вектор $d\mathbf{p}_d$ (рис. 3), входные и выходные зрачковые координаты изменяются на $d\mathbf{y}$ и $d\mathbf{y}'$. На рис. 3 $AP_dA'_i$ — реальный луч, $\Delta\mathbf{x}' = \mathbf{x}' - V\mathbf{x}$ — вектор поперечных аберраций, $AP_d A'_i$ — идеальный луч, идущий в точку A'_i, $AP_d^1A'_i$ — новое положение идеального луча при изменении зрачковых координат на $d\mathbf{y}$, $d\mathbf{y}^1$. В соответствии с принципом Ферма изменение оптической длины идеального ломаного луча при смещении на $d\mathbf{p}_d$ ограничится отрезками $[P_dB]$ и $-[P_dB']$ и составит

$$dw_{y'} = [P_dB] - [P_dB'] = n_d d\bar{\mathbf{p}}_d^T (\bar{\mathbf{q}}_d - \bar{\mathbf{q}}'_d) = n_d d\bar{\mathbf{p}}_d^T \Delta\bar{\mathbf{q}}_d, \tag{8}$$

где $d\bar{\mathbf{p}}_d$ — вектор смещения точки P_d; $\bar{\mathbf{q}}_d$, $\bar{\mathbf{q}}_d$ —орты реального и идеального лучей в пространстве апертурной диафрагмы, n_d — показатель преломления в этом пространстве. Поместим систему декартовых координат в точку P_d, так, чтобы плоскость oxy касалась поверхности диафрагмы.

Представим трехмерные векторы $d\bar{\mathbf{p}}_d$ и $\Delta\bar{\mathbf{q}}_d$ в следующем блочном виде:

$$d\bar{\mathbf{p}}_d = \begin{pmatrix} d\mathbf{p}_d \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \Delta\bar{\mathbf{q}}_d = \begin{pmatrix} \Delta\mathbf{q}_d \\ \Delta Z_d \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где $d\mathbf{p}_d$, $\Delta\mathbf{q}_d$ — двумерные векторы, проекции $d\bar{\mathbf{p}}_d$ и $\Delta\bar{\mathbf{q}}_d$ на плоскость oxy. Тогда из (8) получим

$$dw_{y'} = -n_d d\mathbf{p}_d^T \Delta\mathbf{q}_d. \tag{10}$$

Если реальный луч P_dA' везде лежит в пределах гауссовой окрестности [6] идеального луча $P_dA'_i$, т. е. в пределах той области, в которой справедливы линейные соотношения между дифференциалами в пространстве диафрагмы и в пространстве изображений, то из общего оптического дифференциального инварианта [7] следует

$$n_d d\mathbf{p}_d^T \Delta\mathbf{q}_d = n' d\mathbf{q}_i'^T \Delta\mathbf{x}'.$$

Так как для рассматриваемого случая близкого изображения $n'd\mathbf{q}'_i = d\mathbf{y}'$, то из (10) следует

$$dw_{y'} = -d\mathbf{y}'^T \Delta\mathbf{x}' = -d\mathbf{y}'^T (\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}),$$

или

$$\nabla w_{y'} = -\Delta\mathbf{x}' = -(\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}). \tag{11}$$

Рассуждения для удаленного изображения аналогичны и дают те же результаты, что и (11), в обобщенных координатах. В силу симметрии определений (1) — (3) имеем еще два равенства

$$dw_{x'} = d\mathbf{x}'^T (\mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}) \text{ или } \nabla w_{x'} = \mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}, \tag{12}$$

$$dw_y = d\mathbf{y}(\mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}') \text{ или } \nabla w_y = \mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}' = \Delta\mathbf{x}. \tag{13}$$

В этих формулах $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}' = -\mathbf{V}^{-1}\Delta\mathbf{x}'$ есть вектор поперечных аберраций на поверхности предмета (в обратном ходе).

Итак, производные аберрационной функции по обобщенным зрачковым координатам (градиент на поверхности зрачка $\mathbf{y}$) есть поперечные аберрации, а производные ее по обобщенным предметным координатам (градиент на поверхности предмета $\mathbf{x}$), показывающие отступление от условия изопланатизма (короче, неизопланатизм), оказываются дисторсией в преобразовании зрачковых координат. Полученные формулы можно записать в следующей симметричной форме в виде полных дифференциалов

$$\left.\begin{aligned}
dw(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) &= d\mathbf{x}^T(\mathbf{V}^T\mathbf{y}' - \mathbf{y}) + d\mathbf{y}^T(\mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}'),\\
dw(\mathbf{x}',\ \mathbf{y}) &= d\mathbf{x}'^T(\mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}) + d\mathbf{x}(\mathbf{x} - \mathbf{V}^{-1}\mathbf{x}'),\\
dw(\mathbf{x},\ \mathbf{y}') &= d\mathbf{x}^T(\mathbf{V}^T\mathbf{y}' - \mathbf{y}) + d\mathbf{y}'^T(\mathbf{x}' - \mathbf{V}\mathbf{x}),\\
dw(\mathbf{x}',\ \mathbf{y}') &= d\mathbf{x}'^T(\mathbf{y}' - \mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}) + d\mathbf{y}'^T(\mathbf{x} - \mathbf{V}\mathbf{x}).
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Подчеркнем, что полученные выражения являются точными, если величины поперечных аберраций не выходят за пределы гауссовой окрестности данного реального луча, что в большинстве практических случаев соблюдается.

Изменение аберрационной функции при фокусировке

Представим процесс фокусировки как продольное перемещение поверхностей предмета и изображения по нормалям к ним, при этом обобщенным пара-

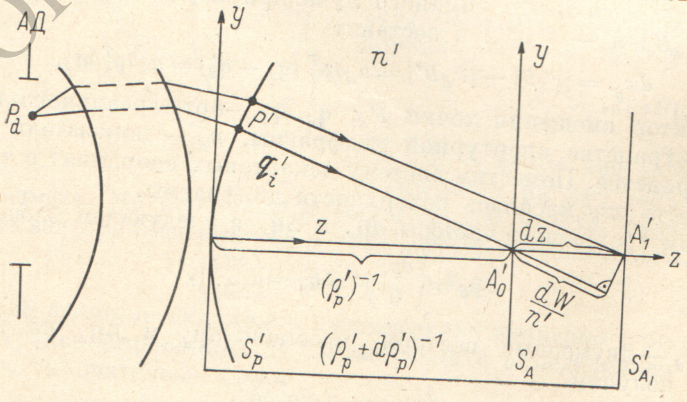

Рис. 4.

метром фокусировки ds или ds' для близкого предмета или изображения будем считать само перемещение dz или dz' в единицах длины (рис. 4), а для удаленного — изменение кривизны входной или выходной сфер $d\rho_p$ или $d\rho_p'$:

$$\left.\begin{aligned}
&ds = dz;\ ds' = dz' \ \text{(мм) для близкого предмета или изображения},\\
&ds = d\rho_p;\ ds' = d\rho_p' \ \text{(килодптр) для удаленного предмета или изображения}.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Из рис. 4 легко получить для пространства изображений

$$dw_{z'}=n'dz'(Z_i'-1)=n'dz'\frac{-\mathbf{q}_i'^T\mathbf{q}'}{1+Z_i'},\tag{16}$$

где Z_i' — проекция орта $\bar{\mathbf{q}}_i'$ идеального луча на ось z', $\mathbf{q}_i'$ — двумерный вектор проекции этого орта на плоскость $o'x'y'$. Для близкого изображения в соответствии (2) и (15) $\mathbf{q}_i'=(1/n')\mathbf{y}'$; $dz'=ds'$. Для удаленного изображения в соответствии с (3) $\mathbf{q}_i'=-\rho_p'\mathbf{p}_i'=-(1/n')\rho_p'\mathbf{y}'$ и в соответствии с (15) $qz'=-ds'/\rho'^2$. Подставляя эти результаты в (16) получим обобщенную формулу, справедливую для обоих типов изображения

$$\frac{\partial w}{\partial s'}=\frac{\mathbf{y}'^T\mathbf{y}'}{n'(1+Z_i')}(-1)^i,\tag{17}$$

где $\mathbf{y}'$ — вектор обобщенных выходных зрачковых координат, определяемых формулами (2) или (3), i — признак типа изображения, $i==1$ — для близкого изображения, $i=0$ — для удаленного. В силу симметрии определений (1)—(3) можно записать аналогичное обобщенное выражение для пространства предметов

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\mathbf{y}^T\mathbf{y}}{n(1+Z)}(-1)^{0+1},\tag{18}$$

где O — признак типа предмета.

Условия изопланатизма и преобразования зрачковых координат

Неизопланатизм оптических систем заключается в изменении аберраций при смещении предмета, поэтому в соответствии с [1] величина неизопланатизма определяется производной аберрационной функции по координате предмета $\mathbf{x}$. Общее выражение (7) связывает эту производную с преобразованием зрачковых координат и позволяет получить различные формулировки условий изопланатизма.

В наиболее строгом случае изопланатизм предусматривает независимость аберрационной функции от координаты предмета $\mathbf{x}$, и строгое условие изопланатизма получается приравниванием (7) нулю

$$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}}=\mathbf{V}^T\mathbf{y}'-\mathbf{y}=0 \quad \text{или} \quad \mathbf{y}'=\mathbf{V}^{T^{-1}}\mathbf{y}.\tag{19}$$

В большинстве случаев (при некогерентном освещении) на структуру изображения не влияет постоянная по зрачку составляющая аберрационной функции, а лишь ее производные $dw/d\mathbf{y}'$, следовательно, при этом условие изопланатизма (менее жесткое, чем (19)) получается в дифференциальном или разностном виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{x}'\partial \mathbf{y}'}=\frac{\partial\Delta\mathbf{x}'}{\partial \mathbf{x}'}=\Delta_I=\left(\mathbf{V}^T\frac{\partial \mathbf{y}'}{\partial \mathbf{y}}\right)^{-1}-\mathbf{I}=0,\tag{20}$$

где $d\mathbf{y}'/d\mathbf{y}$ — матрица производных (матрица Якоби) вектора выходных зрачковых координат по входным, $\mathbf{I}$ — единичная матрица. Зметим, что в левой части (20) стоит по сути дела относительное изменение поперечных аберраций (по отношению к смещению изображения), поэтому матрицу Δ_I можно назвать матрицей относительного неизопланатизма. Величина относительного неизопланатизма определяется нормой матрицы Δ_I.

Полученные условия (19) и (20) есть наиболее общие формулировки изопланатизма в оптических системах, при этом выражение (19) одновременно определяет преобразование обобщенных зрачковых координат, выполняемое любой оптической системой при соблюдении изопланатизма, как мы видим, это преобразование линейно, причем обратно транспонированное по отношению к преобразованию между координатами на предмете и изображении. Отступления от этого преобразования, определяемые величиной относительного неизопланатизма, в практических случаях не превышают нескольких процентов.

Условие (20) применимо к произвольным оптическим системам и к любым зонам предмета. Существующие в оптике условия изопланатизма охватывают лишь случай осевой зоны центрированных оптических систем с круговой симметрией. В этом случае вместо матрицы $\mathbf{V}$ и векторов $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}'$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}'$, $\Delta\mathbf{x}'$ имеем соответствующие скаляры, причем определения (2) и (3) обобщенных зрачковых координат приобретают вид

$$\left.\begin{aligned} &y=-n\sin\sigma;\ y'=-n'\sin\sigma'_i \text{ для близкого предмета или изображения,}\\ &y=nh;\ y'=n'h' \text{ для удаленного предмета или изображения,}\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

где σ, σ'_i — углы, образованные с осью системы определенным выше ломаным лучом, h, h' — высоты точек пересечения этого луча со сферами S_p и S'_p (рис. 5).

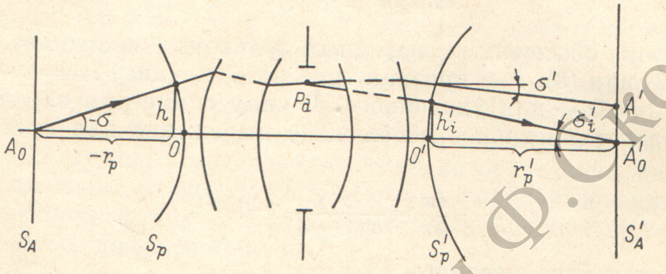

Рис. 5.

Условие изопланатизма (20) при этом запишется в следующей форме, похожей на закон синусов Аббе

$$\delta_i=\frac{y}{v_0y'}-1=0 \tag{22}$$

или в дифференциальной форме

$$\delta_i=\frac{\partial y}{\partial y'}\frac{1}{v_0}-1=0. \tag{22a}$$

Так, для предмета и изображения близкого типа («репродукционная система» [7, 8]) условие (22) в соответствии с (21) запишется в виде

$$\delta_i=\frac{n\sin\sigma}{v_0n'\sin\sigma'_i}-1=0. \tag{23}$$

Для системы типа «фотографический объектив» с удаленным предметом и близким изображением, если расстояние до предмета бесконечно велико, в соответствии с [8] обобщенное увеличение становится равным переднему фокусному расстоянию $V_0=f=-(n/n')f'$, и условие изопланатизма (22) с учетом (21) приобретает следующую форму:

$$\delta_i=\frac{h}{f'\sin\sigma'_i}-1=0. \tag{24}$$

Аналогичные формулы можно записать и для других типов оптических систем — «телескопической системы» и «микроскопа». Отличие формул (22) и (23) от классического закона синусов Аббе заключается в том, что угол σ'_i относится не к реальному лучу, имеющему в общем случае аберрации, а к «идеальному», идущему из точки пересечения реального луча с апертурной диафрагмой в центр изображения. Благодаря этому условия (23), (24) и аналогичные им становятся справедливыми не только в безаберрационных системах, как закон синусов Аббе, но и при наличии любых аберраций, т. е. заменяют собой условия Штебле—Лигоцкого и другие условия изопланатизма. В соответствии с этим формулу (22) и вытекающие из нее (23) и (24) можно назвать обобщенным законом синусов.

Аналогичное рассмотрение изменения аберраций при расфокусировке для точки на оси систем с круговой симметрией приводит к условию продольного изопланатизма (в системах типа «11»):

$$\frac{\sqrt{n}\,\sin\frac{\sigma}{2}}{v_0\sqrt{n'}\,\sin\frac{\sigma_i}{2}} - 1 = 0.$$

Эту формулу можно назвать обобщенным условием Гершеля, в отличие от классического [9] оно справедливо при наличии любых аберраций, а не только в идеальном случае.

Приведенный анализ показывает, что описание аберраций оптических систем при помощи предложенной аберрационной функции в обобщенных координатах позволяет получить простые и в то же время универсальные соотношения, справедливые для любых типов и классов оптических систем. В частных случаях (в зависимости от положения изображения апертурной диафрагмы) аберрационная функция и условия изопланатизма переходят в известные функции и условия. Так, если апертурная диафрагма сопряжена с выходной сферой, то w становится тождественной волновой аберрации, а условие (22) — условию Гопкинса [10], если точки P_d пересечения лучей с апертурной диафрагмой сопряжены с основаниями перпендикуляров, опущенных на лучи из центра выходного зрачка, условие изопланатизма (22) становится эквивалентно условию Штебле—Лигоцкого или Велфорда [11], если точки P_d сопряжены с точками, находящимися на расстоянии r'_p от точек пересечения лучей с плоскостью изображения, то w переходит в эйконал Зейделя—Шварцшильда, а условие (22) в дифференциальной форме — в условие Слюсарева [12]. Если точка пересечения луча с диафрагмой сопряжена с бесконечностью, что w переходит в смешанный эйконал [9], а условие (22) — в условие синусов Аббе. Таким образом, применимость того или иного описания аберраций или справедливость того или иного условия изопланатизма целиком определяется не соображениями удобства или соглашением, как иногда считают [11], а положением в пространстве изображений точек, сопряженных апертурной диафрагме. В реальных системах эти точки в большинстве случаев не могут быть определены однозначно, поэтому ни одна из перечисленных функций и ни одно из частных условий изопланатизма не применимы, так как не соответствуют физической реальности, таким образом, именно требование соответствия реальности приводит к необходимости описания аберраций оптических систем функцией (1) в координатах (2), (3).

Литература

[1] С. А. Родионов. Опт. и спектр., *46*, 556, 1979.
[2] С. А. Родионов. Опт. и спектр., *46*, 776, 1979.
[3] W. Eichler. Feingerätetechnik, *22*, 422, 1973.
[4] М. Борн, Э. Вольф. Основы оптики. «Наука», М., 1970.
[5] С. А. Родионов. Изв. вузов, приборостроение, *20*, № 10, 117, 1977.
[6] С. А. Родионов. Опт. и спектр., *50*, 969, 1981.
[7] М. Герцбергер. Современная геометрическая оптика. ИЛ, М., 1962.
[8] С. А. Родионов. Тр. ЛИТМО, вып. 75, 36, 1974.
[9] А. И. Тудоровский. Теория оптических приборов, I часть. АН СССР, М.—Л., 1948.
[10] H. H. Hopkins. Proc. Phys. Soc., *58*, 92, 1948.
[11] W. T. Welford. Opt. Comm., *3*, 1, 1971.
[12] Г. Г. Слюсарев. Методы расчета оптических систем. «Машиностроение», Л., 1968.

Поступило в Редакцию 30 июля 1980 г.