

Тема 3 Особенности моделирования процессов лазерного термораскалывания в рамках теории термоупругости и механики разрушения

Перечень изучаемых вопросов :

- 1.Связанная динамическая задача термоупругости. Несвязанная квазистатическая задача термоупругости.
- 2.Ограничения аналитических методов.
- 3.Основная концепция и алгоритм реализации метода конечных элементов.
- 4.Источники погрешности при численном моделировании процессов термораскалывания.
5. Применение критериев линейной механики разрушения для моделирования процессов термораскалывания.

Связанная динамическая задача термоупругости

Взаимодействие лазерного излучения с неметаллическими материалами представляет собой сложный процесс, зависящий от большого числа факторов. Для понимания многих процессов, происходящих при лазерном термораскалывании, первоначально необходима информация о температурных полях, формируемых в зоне обработки.

При этом получение информации о температурных полях в зоне обработки является первым этапом построения феноменологической модели процесса лазерного термораскалывания. Логическим продолжением этого этапа является расчет термоупругих напряжений, возникающих в результате лазерного воздействия на материал и обусловленных невозможностью свободного теплового расширения неравномерно нагретого твердого тела.

Для точного определения термоупругих напряжений необходимо решить связанную динамическую задачу термоупругости

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda' + \mu) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_i} - (2\mu + 3\lambda') \alpha_T \frac{\partial}{\partial x_i} (T - T_0) \quad (1)$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_k^2} - (2\mu + 3\lambda') \alpha_T T_0 \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + Q \quad (2)$$

U_i -компоненты вектора перемещений

T -температура

$T-T_0$ -приращение температуры

λ, μ - постоянные Ламэ

$$\lambda' = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (3)$$

ν - коэффициент Пуассона

E - модуль Юнга

u_i - компоненты вектора перемещений

λ - коэффициент теплопроводности

ρ - плотность

c - удельная теплоёмкость

α_T - температурный коэффициент линейного расширения

Q - количество тепла, производимое внешним источником в единице объёма материала за единицу времени

При общей постановке задачи термоупругости требуется при заданных механических и тепловых воздействиях определить 16 функций координат и времени: шесть компонентов тензора напряжений, шесть компонентов тензора деформаций, три компонента вектора перемещений и температуру

При этом должны выполняться три уравнения равновесия –

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (4)$$

шесть соотношений между деформациями и перемещениями

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (5)$$

шесть соотношений между напряжениями и деформациями

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda'\varepsilon_{kk}\delta_{ij} - (2\mu + 3\lambda')\alpha_T T\delta_{ij} \quad (6)$$

или

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \nu\frac{\sigma_{kk}}{E}\delta_{ij} + \alpha_T T\delta_{ij} \quad (7)$$

Представим уравнения (1 - 2) в векторной форме

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} = \mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda' + \mu) \text{grad div} \vec{u} - (2\mu + 3\lambda')\alpha_T \text{grad}(T - T_0) \quad (8)$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T - (2\mu + 3\lambda')\alpha_T T_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{u} + Q \quad (9)$$

Из системы уравнений (8 – 9) следует, что под действием внешних нагрузок в твердом теле возникает как поле деформаций, так и поле температур, а

действие источников тепла обуславливает изменение не только температурного поля, но и поля деформаций

Несвязанная динамическая задача термоупругости

При моделировании процесса лазерного термораскалывания решение уравнений термоупругости можно искать, пренебрегая в (9) членом механической связи

$$(2\mu + 3\lambda')\alpha_T T_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{u} \quad (10)$$

При этом удастся осуществить переход к уравнениям, определяющим так называемую несвязанную динамическую задачу термоупругости.

В отличие от связанной динамической системы уравнений термоупругости, которую составляют уравнения (8) и (9) в совокупности с определенными начальными и граничными условиями, в несвязанной динамической задаче термоупругости определены две независимые задачи: задача теплопроводности и задача нахождения напряжений при заданных температурных полях.

Далее, пренебрегая инерционным членом

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} \quad (11)$$

в уравнениях несвязанной динамической задачи термоупругости, осуществляют переход к несвязанной квазистатической задаче термоупругости:

$$\mu \nabla^2 \vec{u} + (\lambda' + \mu) \text{grad} \text{div} \vec{u} - (2\mu + 3\lambda')\alpha_T \text{grad}(T - T_0) = 0 \quad (12)$$

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T + Q \quad (13)$$

С физической точки зрения квазистатическая постановка задачи термоупругости означает использование предположения о том, что напряженное состояние устанавливается значительно быстрее, чем достигается тепловое равновесие

Ограничения аналитических методов

Известные аналитические решения удобны для проведения инженерных расчетов и на их основе выявлен ряд закономерностей лазерного термораскалывания хрупких неметаллических материалов и установлена взаимосвязь между параметрами, оказывающими существенное влияние на процесс термораскалывания.

Однако все известные результаты получены при решении линейного дифференциального уравнения теплопроводности, в котором теплофизические коэффициенты принимались независимыми от температуры. Так как в процессе лазерного термораскалывания температура хрупких неметаллических материалов изменяется в достаточно широких пределах, то игнорирование температурных зависимостей для теплофизических характеристик материалов может обусловить заметные погрешности при определении рабочих режимов. Кроме этого, модельные тела при постановке задач выбирались в виде полупространств, что также приводит к увеличению погрешности, особенно при расчете режимов обработки тонких пластин.

Необходимо отметить, что основным недостатком известных работ по моделированию процесса лазерного термораскалывания является то, что решение задач о нахождении компонентов тензоров напряжений в объемных образцах выполнено в двумерной постановке, поэтому значительно снижена точность расчетов и существенно усложнен анализ реального пространственного распределения полей напряжений.

Основная концепция и алгоритм реализации метода конечных элементов

Значительные трудности, возникающие при использовании аналитических методов для решения задач термоупругости, обусловили необходимость использования численных методов для моделирования процессов лазерного термораскалывания.

Наилучшим образом для этих целей подходит метод конечных элементов (МКЭ). «Основная идея МКЭ состоит в том, что любую непрерывную величину, такую как температура или перемещение, можно аппроксимировать дискретной моделью, которая строится на множестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей».

В общем случае алгоритм применения МКЭ состоит из четырех этапов:

- 1) выделение конечных элементов;
- 2) определение аппроксимирующей функции для каждого элемента;
- 3) объединение конечных элементов в ансамбль;
- 4) определение вектора узловых значений функции.

Преимущества метода конечных элементов

Наиболее важными преимуществами МКЭ при расчете режимов лазерного термораскалывания хрупких неметаллических материалов в рамках описанной выше феноменологической модели являются следующие:

- возможность учета зависимости свойств материалов от температуры при численном моделировании;
- простота рассмотрения задачи при использовании смешанных граничных условий;
- применимость метода для тел, изготовленных из нескольких материалов; возможность использования МКЭ при решении задач о телах произвольной геометрической формы

Источники погрешности при численном моделировании процессов термораскалывания.

Три основных источника погрешности численного решения задач методом конечных элементов:

- погрешность дискретизации, возникающая из-за использования аппроксимации базисными функциями;
- погрешность округления, связанная с использованием в вычислительных машинах чисел с конечной точностью представления;
- погрешность математической модели, связанная с ее несоответствием физической реальности.

Источником погрешности являются также исходные данные, получаемые, как правило, в результате экспериментов; при этом в целом точность полученных результатов не превосходит точности исходных данных.

Применение критериев линейной механики разрушения для моделирования процессов термораскалывания. Общая характеристика разрушения и его типы

Разрушение представляет собой необратимое разделение тела на части, связанное с нарушением сплошности среды.

Процесс разрушения состоит из двух последовательно протекающих стадий: зарождения и роста трещины.

Общая характеристика разрушения и его типы

При феноменологическом описании разрушения твердые тела делят на три группы.

1. Хрупкие тела.

Хрупкими называют такие тела, которые при нагружении деформируются только упруго вплоть до разрушения.

При хрупком состоянии материала разрушение происходит путем скола, когда плоскость разрушения перпендикулярна нормальным напряжениям.

2. Пластичные тела.

Разрушению пластичных тел предшествует значительная деформация, а трещина распространяется медленно. Уменьшив нагрузку, ее можно задержать.

3. Полухрупкие тела.

К полухрупким материалам можно отнести те материалы (до некоторой степени условно), которые в одних условиях разрушаются хрупко, а в других - вязко. Характер разрушения зависит от напряженного состояния, температуры, скорости деформации и т.д.

Элементы теории трещинообразования Гриффитса-Ирвина

Разрушение путем разрыва межатомных связей требует напряжения $\sim E/5$, где E — модуль Юнга. Однако хрупкие тела обычно разрушаются при напряжении $\sim E/500$.

Гриффитс впервые предложил, что различие между пределами прочности абсолютно хрупкого твердого тела и реального тела обусловлено наличием в последнем трещин.

Концентрация напряжений в вершине трещины приводит к тому, что локально достигается теоретическое разрушающее напряжение, в то время как весь остальной материал испытывает воздействие сравнительно малых напряжений.

Если приложенное напряжение достаточно велико, то трещина начинает распространяться, освобождая энергию упругой деформации.

С другой стороны, для образования новых поверхностей разрушения требуется некоторая энергия.

Гриффитс показал, что непосредственной причиной развития трещин в материале является различие между энергией, высвобождающейся при их продвижении, и энергией, необходимой для создания новой поверхности разрушения.

$$U_E = -\frac{\pi l^2 \sigma^2}{E} \quad (14)$$

Энергия упругой деформации для случая тонкой пластины (плоское напряженное состояние) на единицу толщины пластины

$$U_s = 4\gamma \quad (15)$$

Полная энергия вновь образующихся поверхностей:

где γ - удельная поверхностная энергия (т.е. энергия, затрачиваемая на образование единицы площади поверхности трещины).

Критерий Гриффитса состоит в том, что трещина распространяется, если увеличение поверхностной энергии меньше, чем уменьшение энергии деформации

В соответствии с критерием Гриффитса поверхностная энергия должна быть меньше высвобождающейся упругой энергии, что возможно по достижении критического размера трещины.

Условие равновесия определяется следующим образом: при распространении трещины изменение энергии должно быть равно нулю, т.е

$$\frac{dU}{d} = \frac{d \cdot (U_E + U_S)}{dl} = \left(-\frac{2\pi / \sigma^2}{E} + 4\gamma \right) = 0 \quad (16)$$

Следовательно

$$\sigma = \sqrt{\frac{2\gamma E}{\pi l}} \quad (17)$$

Кроме энергетического подхода к анализу развития трещин, основанного на законе сохранения и превращения энергии, возможен и другой подход к анализу развития трещин, а именно силовой, когда рассматриваются условия равновесия действующих на трещину внешних (нагрузки) и внутренних сил, т.е. сил межатомного (межмолекулярного) сцепления.

Энергетический и силовой подходы эквивалентны: они оба дают одинаковый результат.

При силовом подходе объектом особого внимания механики разрушения является вершина (кончик) трещины — место возникновения наибольшей концентрации напряжений и исходная точка дальнейшего разрушения материала.

При силовом подходе одним из важнейших параметров механики разрушения является критический коэффициент интенсивности напряжения.

Коэффициентом интенсивности напряжения называют величину $\lim(\sigma_y \sqrt{S})$, где S — малое расстояние по линии трещины от ее вершины до некоторой точки, где действуют напряжения σ_y .

Коэффициент интенсивности напряжений имеет размерность $\text{МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$.

Коэффициент интенсивности напряжений – это физическая величина, определяющая поля напряжений и смещений вблизи вершины трещины. В твердом теле различают три основных типа трещин

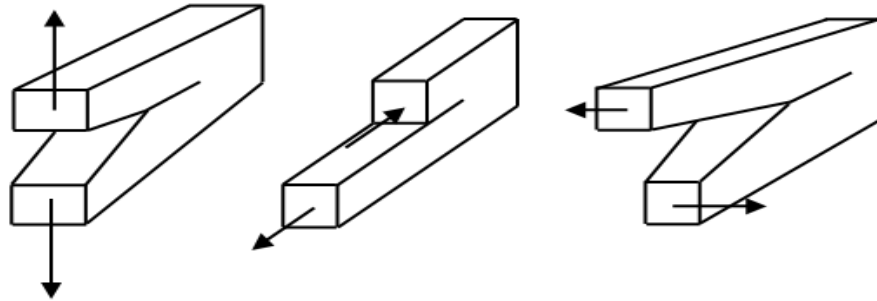


Рисунок 1—три основных типов деформаций

Три основных типа деформаций в вершине трещины:

I — нормальный отрыв;

II — поперечный сдвиг;

III — продольный сдвиг.

Тип I связан с отрывом, когда берега (поверхности) трещин расходятся в противоположных направлениях.

Тип II соответствует поперечному сдвигу — перемещениям, при которых берега трещины скользят друг по другу.

Тип III связан с антиплоской деформацией (разрезание ножницами), когда трещина находится в условиях продольного сдвига, причем берега трещины скользят друг по другу параллельно направляющему фронту трещины.

Коэффициенты интенсивности напряжений для основных типов трещин обозначают соответственно, K_I , K_{II} , K_{III} . Эти величины определяются приложенным напряжением, геометрией трещины, геометрией тела, упругими параметрами.

Для бесконечной пластины $K_I = \sigma \sqrt{\pi l}$

Из уравнения следует, что K_I растет с увеличением длины трещины, что приводит к ее устойчивому росту. В момент времени, когда на некоторой части контура трещины коэффициент интенсивности напряжений K_I достигает критической величины $K_c = \text{const}$ (для случая отрыва — K_{Ic}), происходит локальное разрушение материала.

Моделирование процессов лазерного терморакалывания в рамках теории термоупругости без учета наличия в материале стартового дефекта и лазерно-индуцированной трещины не позволяет использовать полученные результаты для точных расчетов технологических параметров, так как наличие стартового дефекта и лазерно-индуцированной трещины существенным образом влияет на распределение полей напряжений.

Кроме этого нужно отметить, что определение пространственной локализации термоупругих полей не позволяет установить с необходимой точностью, будет ли стабильно развиваться лазерно-индуцированная трещина. Для решения данной задачи необходимо определение критического состояния в соответствии с критериями механики разрушения.



Используются следующие условия роста лазерно-индуцированной трещины:

расчетный коэффициент интенсивности напряжений K_I в вершине трещины должен превышать критический коэффициент интенсивности напряжений K_{IS} , при этом напряжения в вершине трещины должны быть растягивающими

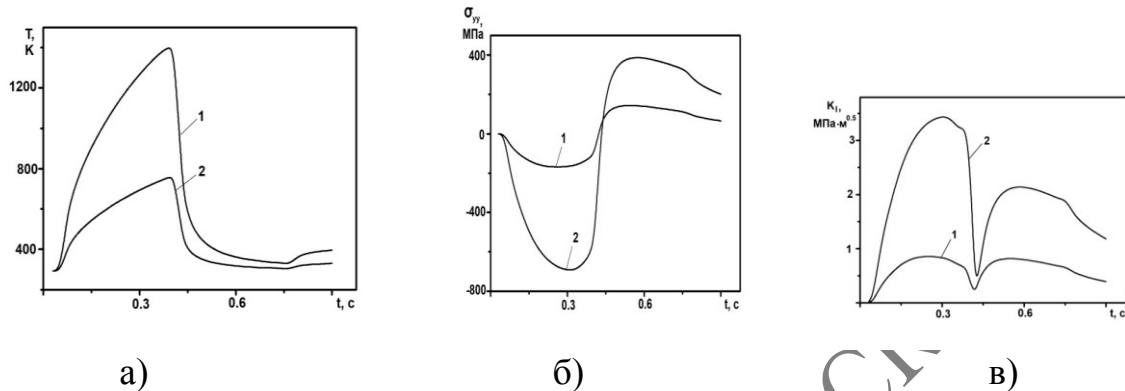


Рисунок 2 – Расчетные значения: а) температуры T в вершине трещины; б) упругих напряжений σ_{yy} в вершине трещины; в) коэффициента интенсивности напряжений K_I в вершине трещины

Список вопросов для самоконтроля:

1. Какими уравнениями описывается связанная динамическая задача термоупругости?
2. Сколько функций координат и времени требуется определить при общей постановке задачи термоупругости при заданных механических и тепловых воздействиях?
3. Какими уравнениями описывается несвязанная динамическая задача термоупругости?
4. Что такое квазистатическая постановка задачи термоупругости с физической точки зрения?
5. Какие ограничения у аналитических методов моделирования процессов лазерного термораскалывания?
6. Из каких этапов состоит алгоритм применения метода конечных элементов?
7. Выделите источники погрешности при численном моделировании процессов термораскалывания.
8. Что такое хрупкие тела?
9. Что такое пластичные тела?
10. Что такое полухрупкие тела?
11. В чем заключается энергетический подход анализа развития трещин?
12. В чем заключается силовой подход анализа развития трещин?

13 Какие типы деформаций в вершине трещины вы знаете?

14 Что такое коэффициент интенсивности напряжений?

Какие условия роста лазерно-индуцированной трещины используются в механике разрушения?

Список рекомендуемой литературы:

1 Коваленко, Л. Д. Основы термоупругости / Л. Д. Коваленко. – Киев: Наукова думка, 1970. – 307 с.

2 Кондратенко, В. С. Лазерный нагрев материалов при термораскалывании с учетом теплоотдачи / В. С. Кондратенко, А. Н. Сердюков, С. В. Шалупаев // Электронная техника. Сер. II. Лазерная техника и оптоэлектроника. – 1987. – № 1(41). – С. 7 – 10.

3 Карташов, Э. М. Аналитические методы в теории теплопроводности / Э. М. Карташов. – М: Высшая школа, 1985. – 480 с.

4 Шалупаев, С. В. Термоупругие поля, формируемые в твердых телах световыми и звуковыми потоками: дис. ... канд. физ.-матем. наук: 01.04.05 / С. В. Шалупаев. – Мн, 1987. – 157 с.

5 Шершнева, Е. Б. Разработка и внедрение новых эффективных процессов в производство стеклоизделий с применением лазерной технологии: дис. ... канд. техн. наук: 05.17.11 / Е. Б. Шершнева. – М, 1990. – 145 с.

6 Сегерлинд, Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.

7 Галлагер, Р. Метод конечных элементов: основы / Р. Галлагер. – М.: Мир, 1984. – 215 с.

8 Партон, В. З. Механика разрушения: от теории к практике / В. З. Партон. – М.: Наука, 1990. – 240 с.

9 Шалупаев С.В. Анализ процесса развития трещины в процессе управляемого лазерного термораскалывания силикатных стекол в рамках линейной механики разрушения / Никитюк Ю.В., Середа А.А. // Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2012. - №6(75). С. 99 –104.