

**Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»**

В.И. БОГДАНОВИЧ

**ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ:
КОНСПЕКТ ЛЕКЦИИ**

**Для студентов первого курса специальности
1-39 03 01 Электронные системы безопасности**

**Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017**

Введение

Жизнь современного общества невозможно представить без применения электрической энергии. Развитие электротехники – области науки и техники, использующей электрические и магнитные явления для практических целей, - наглядно отражает тесную взаимосвязь научно-технических проблем с социальными, экономическими и экологическими проблемами. Поэтому изучение электротехники играет важную роль в формировании научного мировоззрения студентов.

Успехи современной электротехники явились результатом огромных творческих усилий ученых и инженеров разных стран в исследовании электротехнических и магнитных явлений с целью их практического применения.

Овладение основами электротехнических знаний позволит будущим специалистам наиболее эффективно применять разнообразные электротехнические устройства и приборы в различных отраслях науки и техники.

Становление и начальное развитие электротехники

Первая половина XIX века характеризуется становлением и начальным развитием электротехники. Открытие электрического тока и изучение его свойств относится к началу XIX века, когда А. Вольта был создан первый электрохимический источник постоянного тока – вольтов столб (1799). В первой четверти XIX века благодаря многочисленным исследованиям ученых разных стран, среди которых особое место занимают труды выдающегося русского электротехника академика В. В. Петрова, были открыты и в значительной степени изучены химические, тепловые и световые действия тока. Исключительно важное значение имело открытие и исследование магнитных действий тока (Эрстед, Ампер, Био и Савар и др.). А. М. Ампер в 1825-1827 гг. опубликовал результаты своих работ, которые привели к разработке основ электродинамики; им же впервые был предложен термин «электрический ток». К этому времени относится установление Г. С. Оммом (1827) закона электрической цепи, носящего его имя.

Открытие явления электромагнитной индукции (М. Фарадей, Д. Генри, 1831) и закона Ленца (1832) положило начало разработке разнообразных конструкций электрических машин и электроизмерительных приборов. Важную роль для анализа электрических цепей имело установление правил Кирхгофа (1845–1847) и доказательство теоремы об эквивалентном активном двухполюснике (1853).

Широкое практическое применение электрической энергии в первой половине XIX в. было невозможно из-за отсутствия надежного и экономичного генератора. В это время наиболее распространенными источниками постоянного электрического тока являлись гальванические батареи, которые были

громоздкими, а их ЭДС вследствие явления поляризации с течением времени заметно уменьшались. Что касается не энергетических применений, не требующих значительных затрат электроэнергии, таких, как телеграфия, электрическое взрывание мин, дистанционное управление, то именно они положили начало практическому использованию электрической энергии постоянного тока.

Первым электротехническим устройством, получившим заметно распространение, был электромагнитный телеграф, разработанный русским электротехником П. Л. Шиллингом в 1828 – 1832 гг. По мере развития электромагнитной телеграфии совершенствовались источники питания, электроизоляционная техника, создавались разнообразные приборы и приспособления, методы электрических измерений, различные автоматические электротехнические устройства.

Таким образом, расширение неэнергетических применений электрической энергии постоянного тока сыграло значительную роль в становлении и развитии электротехники.

В рассматриваемый период разрабатываются автоматические устройства для контроля некоторых производственных процессов, регистрации малых промежутков времени, создается ряд схем дистанционного управления.

В 30-70-х годах XIX века были разработаны разнообразные конструкции двигателей постоянного тока, и некоторые из них получили практическое применение, когда это было экономически оправданным. Исследования процессов и опыт эксплуатации более совершенных двигателей постоянного тока, имеющих хорошие рабочие характеристики, также способствовали становлению электротехники, в частности электромеханики. Электрическое освещение было первым массовым применением электрической энергии. Развитие электрического освещения, как и любой другой важной отрасли техники, было исторически обусловлено.

Вполне естественно было стремление ученых и инженеров использовать для освещения известные ранее явления электрической дуги и накаливания тонких проволок электрическим током. Еще в 1802 году выдающийся русский ученый-электротехник В. В. Петров, открывший явление электрической дуги, впервые указал на возможность использования ее для освещения, подчеркнув, что ярким пламенем дуги «темный покой довольно ярко освещен быть может».

В 50-70-х годах XIX века было разработано несколько конструкций дуговых электрических ламп, снабженных специальными автоматическими регуляторами для регулирования расстояния между электродами (по мере их сгорания). Были разработаны регуляторы, обмотки реле которых включались либо последовательно, либо параллельно с дугой; позднее были предложены дифференциальные регуляторы (с последовательно-параллельным включением обмоток). Наиболее совершенным дифференциальным регулятором был электромашинный регулятор известного русского электротехника В. Н. Чиколева. Обмотки этого регулятора служили обмотками возбуждения электрического двигателя. Но наиболее простой и экономичной оказалась электри-

ческая свеча П. Н. Яблочкова. Наряду с электрическим освещением получает все большее распространение еще одна область энергетического применения электроэнергии - промышленная электрохимия. Развитие электрохимии связано с изобретением Б. С. Якоби гальванопластики и гальваностегии (1838), получившим широкое применение в полиграфии, строительной технике и других отраслях.

В 70-х годах XIX в. начали сооружаться электрические «домовые» или блокстанции, обслуживающие отдельные крупные объекты – фабрики, заводы, здания общественного пользования. В 1882 г. была построена первая центральная электростанция (Нью-Йорк). В России первые электростанции постоянного тока общественного пользования были построены в Петербурге (1883) и в Москве (1888). В качестве стандартного напряжения в установках постоянного тока было принято 110 В, что обеспечивало горение двух последовательно включенных дуговых ламп. Однако радиус электроснабжения, определяемый допустимыми потерями напряжения в сети, был ограничен, поэтому первые электрические станции строились вблизи центральных районов больших городов (например, Московская электростанция была сооружена в Георгиевском переулке около здания дворянского собрания - ныне Дом Союзов).

По мере расширения числа потребителей электроэнергии все более обострились противоречия, связанные с применением постоянного тока. Электростанции, расположенные в центре города, было затруднительно снабжать топливом и водой и, кроме того, стоимость земельных участков для их сооружения была чрезвычайно высока. Было совершенно очевидно, что экономически целесообразным является сооружение электростанций в местах дешевого получения топлива близ угольных месторождений или полноводных рек.

Теоретические исследования – Д. А. Лачинов (1880) и М. Депре (1882) – доказали, что экономичность передачи электроэнергии на значительные расстояния возрастает при повышении напряжения. Но технические возможности того времени не позволяли еще изготавливать генераторы высокого напряжения. Главная же трудность заключалась в невозможности трансформации постоянного тока. Поэтому ученые и инженеры все больше начинают исследовать возможности использования переменного тока для целей электроснабжения.

Однако дальнейшее развитие электроэнергетики и электротехники показало, что в ряде отраслей промышленного производства применение энергии постоянного тока более целесообразно. К ним относятся электротехнологические установки, в частности электрохимические. Хорошие рабочие характеристики двигателей постоянного тока обеспечили им широкое применение на транспорте и в специализированном электроприводе. Во многих областях техники используются источники постоянного напряжения различной мощности. По мере роста напряжения и протяженности линий электропередачи была установлена экономическая целесообразность и надежность электропередачи высокого напряжения на постоянном токе. Впервые на это указал М.О. Доливо-Добровольский в своем докладе «О границах применения

переменных токов для передачи энергии на большие расстояния» (1918). Жизнь подтвердила прозорливость этого поистине гениального инженера. В СССР первая мощная линия электропередачи постоянного тока напряжением 800 кВ Волжская ГЭС - Донбасс (длиной 473 км) была введена в действие в 1961 г.

Области применения электротехнических устройств постоянного тока

Как известно, электрическая энергия является основным видом энергии, с помощью которой осуществляется механическая работа, нагрев, освещение, химическое преобразование одних веществ в другие. Многие отрасли промышленности связаны с технологическим производством веществ, материалов и изделий, использующим электрохимические процессы, основой которых часто является постоянный ток. К таким процессам относится электролиз. Электролиз широко применяется в гальванотехнике, которая делится на гальванопластику - получение легко отделяющихся точных металлических копий различных объектов и гальваностегию - нанесение металлических покрытий из одних металлов на изделия из других металлов.

Постоянный ток широко используется на транспорте (электropоезда, трамваи, троллейбусы, рудничный транспорт), так как электродвигатели постоянного тока обладают хорошими возможностями для плавного регулирования частоты вращения ротора в широком диапазоне, что необходимо для транспортных средств, особенно для городского транспорта. В настоящее время на электрифицированных железных дорогах используется постоянное напряжение 750–1650 В, для трамваев – 550 В. Указанные преимущества двигателей постоянного тока обеспечивают их применение в подъемно-транспортных машинах, приводе прокатных станков. Постоянный ток используется также для освещения в шахтах, летательных аппаратах и в некоторых других случаях. Источники постоянного напряжения широко применяются для питания устройств автоматики, промышленной электроники и вычислительной техники.

Электрическая энергия постоянного тока может быть получена путем преобразования различных видов энергии: химической (гальванические элементы и аккумуляторы), механической (электромашинные генераторы постоянного тока), тепловой (термоэлектрогенераторы), лучистой, например световой (кремниевые фотодиоды, солнечные батареи). На рисунке 1.1, а) – г) показаны различные источники постоянного тока (их условные графические обозначения). Кроме перечисленных, источниками постоянного тока могут служить выпрямители-преобразователи переменного напряжения в постоянное.

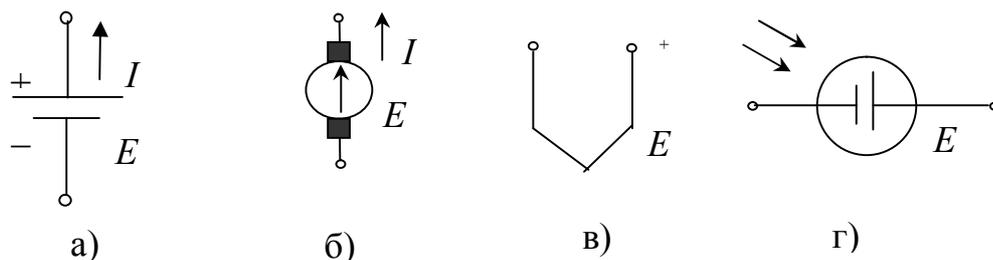


Рисунок 1.1– Обозначения источников электрической энергии постоянного тока на схемах: а) – гальванических элементов и аккумуляторов; б) – генераторов постоянного тока; в) – термопар; г) – солнечных фотоэлементов

Электрическая энергия постоянного тока может преобразовываться в другие виды энергии например в механическую (электрические двигатели постоянного тока), химическую (установки электролиза, зарядки аккумуляторов), тепловую (электрические печи, нагреватели), световую (лампы накаливания, газоразрядные лампы, светодиоды и др.). На рисунке 1.2, а) – г) приведены условные графические обозначения преобразователей электрической энергии в другие виды энергии.

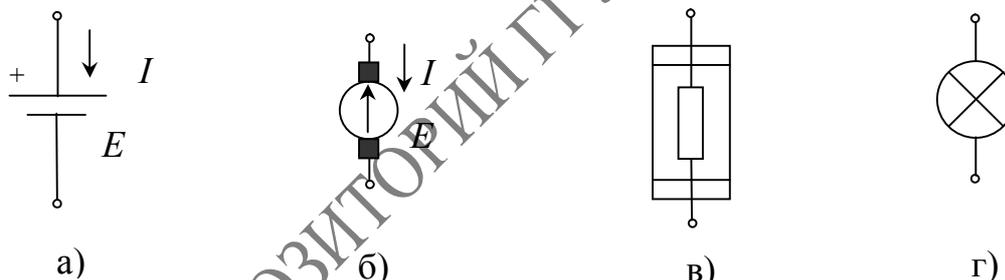


Рисунок 1.2 – Обозначения приемников электрической энергии на схемах: а) – аккумуляторов при зарядке; б) – двигателей постоянного тока; в) – электрических печей; г) – ламп накаливания

Электротехнические устройства, производящие электрическую энергию, называются генерирующими устройствами или источниками электрической энергии, а устройства, потребляющие ее – приемниками или потребителями электрической энергии.

Лекция 1

Раздел 1 Электрические цепи постоянного тока

Тема 1 Основные законы, элементы и параметры электрических цепей

Общие сведения об электрических цепях и их элементах

Электрической цепью называется совокупность устройств и объектов, образующих путь для электрического тока, электромагнитические процессы в которых могут быть описаны с помощью понятий об ЭДС, напряжении и токе. В общем случае электрическая цепь состоит из источников и приемников электрической энергии, соединенных с помощью проводников.

Элементы электрической цепи, генерирующие электрическую энергию, называются источниками электрической энергии (источники тока, генераторы), а элементы электрической цепи, потребляющие электроэнергию, называются приемниками электрической энергии (электролампы, электродвигатели, электронагревательные приборы и др.).

Отдельные устройства, составляющие электрическую цепь, называют элементами электрической цепи. Различают активные и пассивные элементы. Активными элементами считаются источники электрической энергии: источники ЭДС, источники тока. К пассивным элементам электрической цепи относятся сопротивления, индуктивности и емкости.

Положительные направления тока и напряжения

Электрическим током называется упорядоченное движение электрического заряда. За положительное направление принимают перемещение положительных зарядов.

Мгновенное значение тока, т. е. его значение в любой момент времени t определяется как: $i = dq/dt$, где $q = q^+ + q^-$; q^+ и q^- положительные и отрицательные заряды, переместившие в противоположные стороны за время t .

Электрический ток может быть постоянным или переменным.

Направление тока характеризуется знаком тока. Понятие положительный или отрицательный ток имеет смысл, если сравнивать направление тока в проводнике с некоторым ранее выбранным ориентиром. Если в результате выполненного расчета, ток имеет знак (+), т. е. $i > 0$, то направление тока выбрано, верно, если же значение тока имеет знак (-), то направление тока необходимо поменять на противоположное.

Рассмотрим участок электрической цепи (рисунок 1).

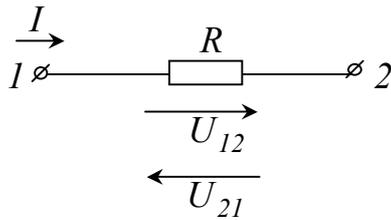


Рисунок 1 – Эквивалентная схема участка электрической цепи

Разность электрических потенциалов точек 1 и 2 представляет собой напряжение на данном участке цепи. Если потенциал тока 1 выше потенциала тока 2, то напряжение положительно, в противном случае напряжение отрицательно, т. е. $U_{12} = -U_{21}$, $\varphi_1 = \varphi_2 + IR$, а $U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$ и $U_{12} = IR$.

В электротехнике разность потенциалов на концах сопротивления принято называть либо напряжением на сопротивлении, либо падением напряжения.

Рассмотрим электрическую цепь, содержащую сопротивление и ЭДС (рисунок 2, а), б).

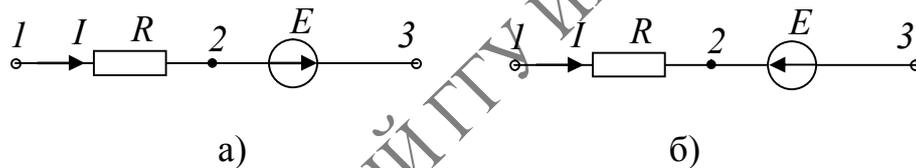


Рисунок 2 – Электрическая цепь, содержащая сопротивление и источник ЭДС

Определим разность потенциалов. По определению разность потенциалов на зажимах 1–3 равна $U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3$. Выразим потенциал точки 1 через потенциал точки 3 для электрической цепи рисунка 2 а): потенциал точки 2 ниже, чем потенциал точки 3 на величину ЭДС E , поэтому $\varphi_2 = \varphi_3 - E$.

Для схемы рисунка 2, б): потенциал точки 2 выше потенциала точки 3 на величину ЭДС E , поэтому $\varphi_2 = \varphi_3 + E$. Так как ток течет от более высокого потенциала к более низкому, то потенциал точки 1 выше потенциала точки 2 на величину падения напряжения на сопротивлении R , поэтому $\varphi_1 = \varphi_2 + IR$.

Для схемы рисунка 2, а): $\varphi_1 = \varphi_3 + IR - E$, $U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = IR - E$. Для схемы рисунка 2, б): $\varphi_1 = \varphi_3 + IR + E$, $U_{13} = \varphi_1 - \varphi_3 = IR + E$.

Элементы электрической цепи

Свойство элемента поглощать электрическую энергию из электрической цепи и преобразовывать ее в другие виды энергии, например в тепловую, световую и другие виды, характеризует такой параметр цепи как сопро-

тивление R . Сопротивление это идеализированный элемент цепи, приближенно заменяющий резистор, для которого $R = \frac{U}{I}$. Здесь предполагается, что направления тока и напряжения совпадают, т. е. знаки их одинаковы и $R > 0$. Условное графическое изображение сопротивления показано на рисунке 3.

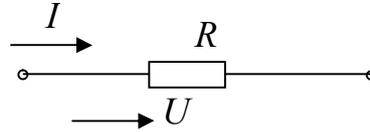


Рисунок 3 – Сопротивление в электрической цепи

Величина $g = 1/R$ – называется проводимостью.

Мгновенная мощность, поступающая в сопротивление равна $P_R = ui = Ri^2 = gu^2$.

Свойство элемента, состоящее в возникновении собственного магнитного поля при прохождении через элемент электрического тока, характеризует параметр индуктивность L (рисунок 4).

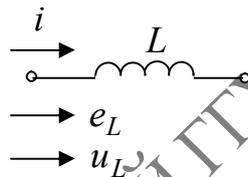


Рисунок 4 – Индуктивность в электрической цепи

ЭДС самоиндукции запишется $e_L = -L \frac{di}{dt}$, а мгновенное значение напряжения на индуктивном элементе имеет вид $u_L = -e_L = L \frac{di}{dt}$.

Свойства элемента накапливать заряды характеризует параметр емкость C (рисунок 5).

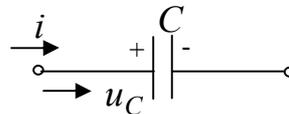


Рисунок 5 – Емкость в электрической цепи

Напряжение и ток на емкостном элементе имеют вид $u_C = \frac{1}{C} \int idt$;

$$i = C \frac{du_C}{dt}.$$

Если в приемнике отношение напряжения к току есть величина постоянная, т. е. $\frac{u}{I} = R = const$, то приемник является линейным элементом и его вольт-амперная характеристика имеет вид прямой линии 2 на рисунке 6. Ес-

ли же это отношение непостоянно, то приемник будет нелинейным и его вольт-амперная характеристика изображена линией 1 на рисунке 6.

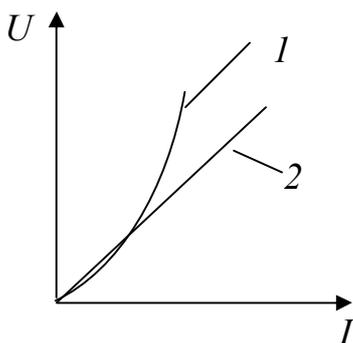


Рисунок 6 – Вольт-амперная характеристика

Электрические цепи, которые состоят только из линейных элементов, называют линейными. Если в цепи имеется хотя бы один нелинейный элемент, то цепь является нелинейной.

Источник ЭДС и источник тока

При анализе и расчете электрических цепей источники питания заменяют эквивалентными идеальными источниками ЭДС или тока.

Идеальный источник ЭДС представляет собой активный элемент с двумя выводами, напряжение на котором не зависит от тока, проходящего через источник, т. е. $E = U = const$. Предполагается, что внутри такого идеального источника пассивные элементы R, L, C отсутствуют и поэтому прохождение через него тока не вызывает падение напряжения. Условное графическое обозначение источника ЭДС показано на рисунке 7.

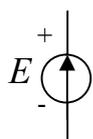


Рисунок 7 – Условное графическое обозначение источника ЭДС

Стрелка указывает положительное направление ЭДС, т. е. направление возрастания потенциала внутри источника.

Идеальным источником тока называют источник с внутренним сопротивлением, равным бесконечности, и током, не зависящим от сопротивления нагрузки цепи, т. е. током, значение которого не зависит от значения напряжения и равно току короткого замыкания I_k источника питания. Условное графическое обозначение источника тока показано на рисунке 8.

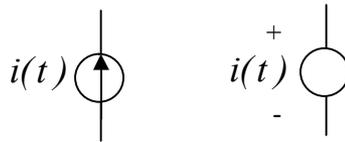


Рисунок 8 – Условное графическое обозначение источника тока

Направление стрелки указывает положительное направление тока.

Вольт-амперная характеристика идеальных источников ЭДС и тока показаны на рисунке 9.

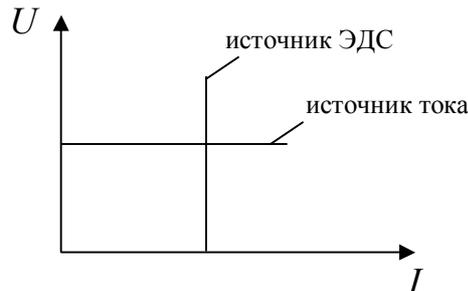


Рисунок 9 – Вольт-амперная характеристика идеальных источников ЭДС и тока

Источники напряжения и тока и их эквивалентность

В зависимости от принципа действия источники электрической энергии можно разделить на источники напряжения (ЭДС) и источники тока. Так, например, химические источники электрической энергии основаны на возникновении разности потенциалов между различными электродами, помещенными в электролит. Эта разность потенциалов, наибольшая при разомкнутой цепи, т. е. при холостом ходе, называется ЭДС и обозначается буквой E . При нагрузке разность потенциалов становится меньше ЭДС E из-за появления встречной ЭДС поляризации и падения напряжения во внутреннем сопротивлении и называется напряжением U .

Индуктивные генераторы основаны на возникновении ЭДС индукции при изменении магнитного поля. При нагрузке их напряжение U также становится меньше ЭДС E холостого хода, в частности из-за падения напряжения во внутреннем сопротивлении.

Таким образом, эти источники являются источниками напряжения; при расчете цепей источники напряжения обычно заменяются эквивалентной схемой (рисунок 10), состоящей из последовательного соединения источника постоянной ЭДС E и внутреннего сопротивления R_B , величина которого учитывает все причины изменения напряжения при нагрузке.

Как было принято, направление напряжения U совпадает с направлением тока I во внешней цепи – от плюса к минусу, что может быть учтено индексом \pm т. е. U_{\pm} . Тогда ЭДС в источнике, также совпадающая по на-

правлению с током, но текущим в источнике от минуса к плюсу, должна быть обозначена E_{\pm} . При холостом ходе

$$U_{x.x\pm} = E_{\pm}.$$

При нагрузке можно применить закон Ома, сложив внешнее R и внутреннее R_B сопротивления:

$$I = \frac{E_{\pm}}{R + R_B},$$

откуда

$$RI = U_{\pm} = E_{\pm} - R_B I.$$

Обычно это соотношение записывают без индексов:

$$U = E - R_B I,$$

но при этом следует помнить о противоположных положительных направлениях U и E .

При внешних сопротивлениях R , много больших, чем внутреннее сопротивление R_B ($R \gg R_B$), напряжение U остается практически постоянным ($U \approx E$) при изменении R .

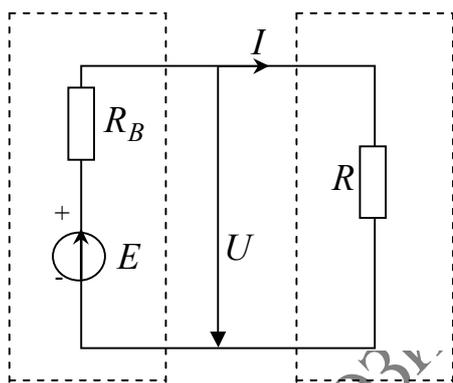


Рисунок 10 – Эквивалентная схема источника ЭДС

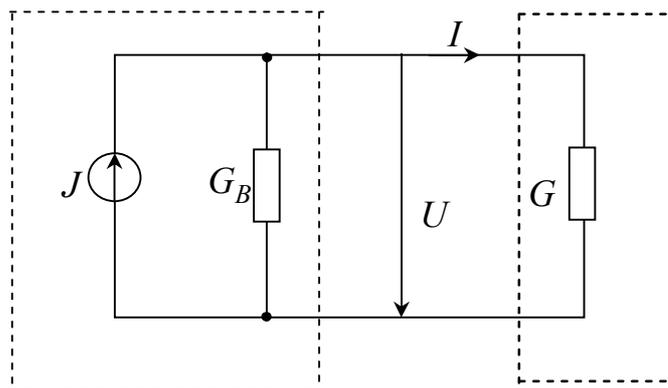


Рисунок 11 – Эквивалентная схема источника тока

Емкостные генераторы основаны на возникновении тока при изменении электрического поля. При коротком замыкании они отдают во внешнюю цепь весь генерируемый ими внутренний ток J .

При нагрузке, т. е. включении сопротивления, появляется напряжение, и ток внешней цепи I становится меньше J , в частности, из-за утечки через несовершенную изоляцию генератора.

Таким образом, этот источник электрической энергии является источником тока. При расчете цепей он обычно заменяется эквивалентной схемой (рисунок 11), состоящей из параллельного соединения источника постоянного внутреннего тока J и внутренней проводимости G_b , величина которой учитывает все причины изменения внешнего тока при нагрузке. Тогда напряжение U и ток I в проводимости G нагрузки будут:

$$U = \frac{I}{G + G_B} \text{ и } I = GU = J - G_B U.$$

При проводимостях G нагрузки, много больших, чем внутренняя проводимость G_B ($G \gg G_B$), ток I нагрузки остается практически неизменным ($I \approx J$) при изменении G .

При расчете цепей принцип действия реальных источников электрической энергии несуществен и источник напряжения может быть заменен источником тока, ему эквивалентным, т. е. таким, который не вызовет изменения напряжений и токов остальных участков цепи. Аналогично всякий источник тока может быть заменен эквивалентным ему источником напряжения. Такие замены в ряде случаев упрощают расчеты. Так как каждый из этих источников определяется двумя параметрами (см. рисунки 11 и 12), условиями эквивалентности должны быть два равенства, например, равенство напряжений при холостом ходе $U_{x.x}$ и токов при коротком замыкании $I_{K.З.}$:

$$U_{x.x} = E = \frac{I}{G_B}, I_{K.З.} = \frac{E}{R_B} = J \text{ и } G_B = \frac{I}{R_B}.$$

Таким образом, источник тока, эквивалентный источнику напряжения, должен генерировать ток, равный току короткого замыкания источника напряжения, и иметь параллельное внутреннее сопротивление, равное последовательному внутреннему сопротивлению источника напряжения. Положительное направление тока J выбирается таким, чтобы направление тока во внешней цепи осталось тем же.

При равенстве полезных мощностей $P = UI$, отдаваемых эквивалентными источниками во внешнюю цепь, полные мощности (т. е. вместе с потерями в их внутреннем сопротивлении) P_H источника напряжения и P_T источника тока

$$P_H = EI, P_T = JU = \frac{E}{R_B} RI = \frac{R}{R_B} P_H$$

и их КПД, равные отношению полезной мощности к полной их мощности,

$$\eta_H = \frac{P}{P_H}, \eta_T = \frac{P}{P_T} = \frac{R_B}{R} \cdot \frac{P}{P_H} = \frac{R_B}{R} \eta_H$$

в общем случае не равны между собой. КПД $\eta_H > \eta_T$ при $R > R_B$, а $\eta_T > \eta_H$ при $R < R_B$ и лишь при $R = R_B$ полные мощности и КПД эквивалентных источников становятся одинаковыми.

Схемы соединений, схемы замещения электрических цепей и режимы их работы

Графическое изображение электрической цепи с помощью стандартных условных обозначений ее элементов, отражающее характер соединения этих элементов, называется схемой электрической цепи.

Схема электрической цепи, через все участки которой проходит один и тот же ток, представляет собой последовательное соединение приемников. При параллельном соединении приемников они всегда находятся под одним и тем же напряжением. Если приемники соединены последовательно и параллельно, то такая схема называется смешанным соединением приемников. Такую электрическую цепь также называют разветвленной, и она является многоконтурной.

Простейшая электрическая цепь показана на рисунке 12, где источник питания с внутренним сопротивлением R_0 образует так называемый внутренний участок цепи, а соединительные провода с приемником (сопротивление R) – внешнюю часть цепи. Выходные зажимы 1 и 2 источника питания подключены с помощью соединительных проводов к входным зажимам приемника a и b . Таким образом, в электрической цепи можно выделить участки, содержащие как активные, так и пассивные элементы.

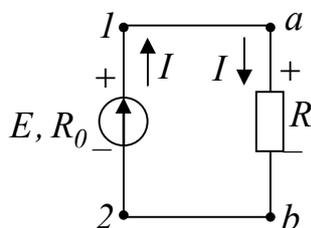


Рисунок 12 – Простейшая электрическая цепь

Для анализа электрической цепи необходимо выделить отдельные ветви и узлы. Ветвь – это участок электрической цепи, вдоль которого протекает один и тот же ток. Узлом называют точку в электрической цепи, в которой соединяются три и более ветвей. Любой замкнутый путь в электрической цепи, состоящий из нескольких ветвей, называют контуром.

На рисунке 13 показаны электрические схемы с обозначениями узлов, ветвей и контуров.

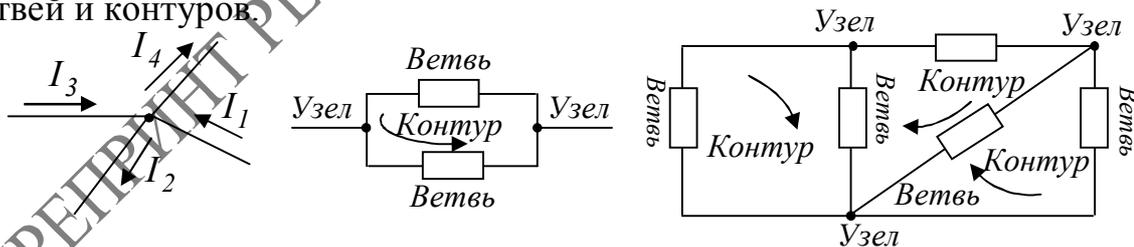


Рисунок 13 – Электрические схемы с обозначениями узлов, ветвей и контуров

При анализе электрических цепей рассматривают не цепи с реальными генераторами, электрическими двигателями, лампами и т. п., а схемы отражающих свойства реальных элементов цепей при определенных условиях, т. е. реальные электрические цепи заменяют схемами замещения или эквивалентными схемами, которые являются идеализированными расчетными моделями реальных цепей. Схема замещения есть графическое изображение реальной цепи с помощью идеализированных элементов, параметры которых отражают параметры замещаемых элементов. Так, источник с ЭДС E и

внутренним сопротивлением R_0 можно представить в виде схем замещения, состоящих либо из идеального источника ЭДС и резистивного элемента, либо из идеального источника тока и резистивного элемента.

Рассмотрим, например, электрическую схему на рисунке 12 и представим ее двумя эквивалентными схемами. Из уравнения $E = U_0 + U = I(R_0 + R)$ следует, что ток в цепи ограничен сопротивлением источника питания R_0 и сопротивлением приемника R , поэтому источник питания может быть заменен источником ЭДС E (рисунок 14, а) и последовательно включенным сопротивлением R_0 , которое равно внутреннему сопротивлению реального источника, или источником тока с параллельно включенным сопротивлением R_0 (рисунок 14, б). Рассмотрим баланс мощностей источников питания для схем, приведенных на рисунках 14, а), б).

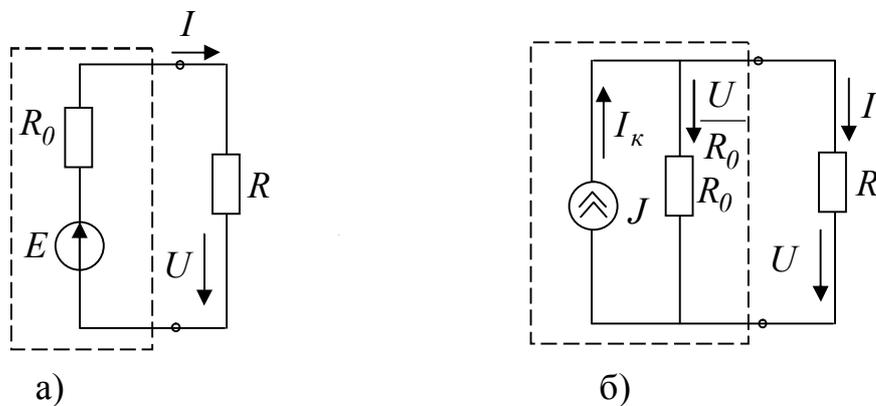


Рисунок 14 – Эквивалентные схемы, электрической цепи изображенной на рисунке 12, в которых источник питания заменен: а) – источником ЭДС E и последовательно включенным сопротивлением R_0 ; б) – источником тока с параллельно включенным сопротивлением R_0

Для схемы рисунка 14, а) имеем

$$EI = I^2 R_0 + UI, \quad (1)$$

а для схемы рисунка 14, б)

$$UI_k = \frac{U^2}{R_0} + UI, \quad (2)$$

где EI – мощность источника напряжения; $I^2 R_0$ – мощность потерь в источнике напряжения; UI – мощность нагрузки или мощность, отдаваемая источником во внешнюю цепь; UI_k – мощность источника тока; $\frac{U^2}{R_0}$ – мощность потерь в источнике тока.

Если $I_k = \frac{E}{R_0}$, то, согласно уравнениям (1) и (2), источники напряже-

ния и тока создают одинаковые напряжения, токи и мощности, отдаваемые во внешнюю цепь. Следовательно, теоретически безразлично, с каким из

идеальных источников питания использовать схему замещения. Однако на практике реальный источник питания обычно заменяют источником ЭДС, так как в этом случае через все элементы схемы замещения проходит реальный ток и идеальный источник развивает мощность $P = EI$, соответствующую мощности действительного источника. В самом деле, действительные источники питания работают в режимах, близких к режиму идеального источника ЭДС ($E \approx U$), если их внутренние сопротивления достаточно малы в сравнении с сопротивлением нагрузки. В режимах же идеального источника тока действительные источники питания могут работать тогда, когда имеют дело с режимами короткого замыкания или близкими к ним.

Электрическая цепь и ее элементы могут работать в различных режимах. В зависимости от частоты токов и напряжений различают режимы работы электрических цепей при постоянных и переменных ЭДС и токах, а также импульсные режимы, когда воздействие электрических сигналов не непрерывно в течение времени работы устройства. В зависимости от характера электромагнитных процессов, имеющих место в электрических цепях, различают стационарные (установившиеся) и нестационарные (переходные) режимы. В зависимости от нагрузки режимы могут быть номинальными, согласованными, холостого хода и короткого замыкания.

Номинальный режим характеризуется тем, что все элементы цепи работают при условиях, указанных в паспорте данного элемента. Работа устройства при номинальном режиме гарантирует наиболее длительную безотказную его работу и экономичность. Поэтому при расчете электрических цепей за основу берут именно номинальные значения параметров элементов, основными из которых являются напряжения $U_{ном}$, токи $I_{ном}$ и мощность $P_{ном}$. Чрезмерное и длительное превышение номинальных значений может привести к перегрузке цепи и выводу устройства из строя, т. е. может возникнуть аварийный режим. О нагрузке можно судить по току I_n , проходящему через нее или по ее сопротивлению R . Например, для неразветвленной цепи (см. рисунок 12) ток нагрузки $I_n = \frac{E}{(R_0 + R)}$ будет тем больше, чем меньше сопротивление приемника R .

Согласованный режим характеризуется тем, что источник питания отдает приемнику наибольшее количество энергии, что возможно при определенном соотношении (согласовании) между параметрами элемента цепи. Для цепи на рисунке 12 это осуществляется при $R = R_0$.

Режим, когда через источник питания и приемники не протекает ток, т. е. когда нагрузка отключена, называется холостым ходом. При холостом ходе напряжение на зажимах источника питания максимально и равно ЭДС источника: $U_{xx} = E$ (рисунок 15).

Режим короткого замыкания – это режим, при котором сопротивление внешней цепи и напряжение между зажимами источника питания равны нулю: $R = 0$; $U_k = 0$ (рисунок 16).

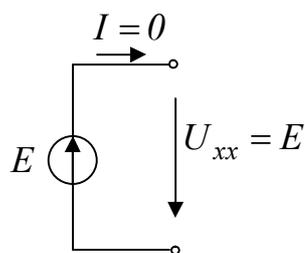


Рисунок 15 – Режим холостым ходом

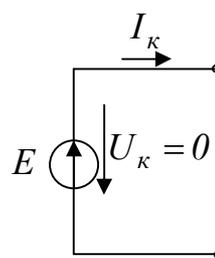


Рисунок 16 – Режим короткого замыкания

Режим короткого замыкания может возникнуть в электрической цепи при соединении накоротко разнопотенциальных зажимов источников питания проводником с нулевым сопротивлением. При коротком замыкании ток I_k максимален и во много раз превышает номинальный. Поэтому в энергетических цепях режим короткого замыкания обычно является аварийным.

Двухполюсники

При анализе сложных электрических цепей иногда бывает необходимо более детально рассмотреть какие-либо из ее отдельных участков. В простейшем случае такой участок можно представить в виде двухполюсника.

Двухполюсником называется часть сложной электрической цепи, которая имеет два зажима (входной и выходной), называемых полюсами.

Часть цепи, выделяемая в виде двухполюсника, может иметь сложную конфигурацию. Двухполюсники можно классифицировать по различным признакам, например по линейности и нелинейности элементов, входящих в двухполюсник, по числу элементов, из которых он состоит. Двухполюсники бывают пассивные и активные.

Двухполюсник, не содержащий источника энергии, называется пассивным. Линейным пассивный двухполюсник будет и тогда, когда в нем будут содержаться источники энергии, ЭДС которых взаимно компенсируются, т. е. направлены навстречу друг другу и равны по значению. Двухполюсники условно изображают в виде прямоугольника, при этом для обозначения пассивного двухполюсника в прямоугольнике либо ставят букву Π , либо не ставят никакой буквы (рисунок 17, а).

В схеме нескомпенсированные двухполюсники, в которых содержатся источники электрической энергии, называются активными (рисунок 17, б). В этом случае при обозначении двухполюсника в прямоугольнике ставят букву A .

При анализе электрической цепи, в которую входит пассивный двухполюсник, достаточно знать его характеристику. Так как пассивный двухполюсник является потребителем энергии, то в качестве характеристики можно взять его сопротивление, которое в этом случае называется внутренним или входным. Следовательно, на схеме замещения пассивный двухполюсник можно представить в виде одного элемента с сопротивлением, равным вход-

ному сопротивлению двухполюсника. Для активного двухполюсника наряду с сопротивлением важной характеристикой является внешняя, или вольтамперная характеристика, которая полностью определяет его свойства.

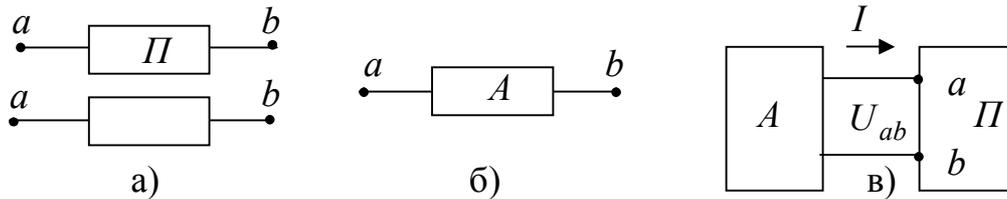


Рисунок 17 – Условно-графическое обозначение двухполюсников

Для любого активного двухполюсника произведение $U_{ab}I$ (рисунок 17, в) выражает мощность P , отдаваемую во внешнюю цепь с его зажимов:

$$P = U_{ab}I = EI - I^2 R_0 = I^2 R$$

где EI – мощность, развиваемая источником энергии двухполюсника; $I^2 R_0$ – мощность, теряемая (рассеиваемая) на внутреннем сопротивлении двухполюсника; R – сопротивление приемника.

Когда ток проходит через двухполюсник навстречу направлению его ЭДС, это значит, что к активному двухполюснику поступает энергия из внешней цепи. Такой процесс наблюдается, например, при зарядке аккумулятора. Таким образом, в подобных случаях активный двухполюсник оказывается фактически потребителем электрической энергии.

Основные законы электрических цепей

Основными законами электрических цепей, устанавливающими соотношения между ЭДС, напряжениями, токами и сопротивлениями, являются закон Ома и правила Кирхгофа. Закона Ома и правилами Кирхгофа можно провести анализ и расчет любых электрических цепей. Так, в неразветвленной замкнутой электрической цепи (см. рисунок 12) под действием ЭДС E будет возникать ток I , значение которого определяется законом Ома:

$$I = \frac{E}{(R_0 + R)}, \quad (3)$$

где $R_0 + R$ – полное сопротивление замкнутой цепи; R_0 – внутреннее сопротивление источника; R – сопротивление приемника (нагрузки).

Для участка электрической цепи, сопротивление которого R и напряжение на котором U , закон Ома можно записать в виде

$$I = \frac{U}{R} \text{ или } U = IR. \quad (4)$$

Произведение IR называют падением напряжения, причем под напряжением на любом участке электрической цепи понимают разность потенциалов между крайними точками этого участка. Например, в схеме, если через участок ab с сопротивлением R , не имеющий источника ЭДС, ток проходит от точки a к точке b (ток на участке цепи без ЭДС всегда проходит от точки

более высокого потенциала к точке с более низким потенциалом), потенциал φ_a точки a будет всегда выше потенциала φ_b точки b на значение падения напряжения на сопротивлении R :

$$\varphi_a - \varphi_b = IR, \quad (5)$$

а напряжение между точками a и b

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = IR. \quad (6)$$

Таким образом, напряжение на любом участке электрической цепи, не содержащем источника ЭДС, равно произведению тока, протекающего через участок, на сопротивление этого участка.

Рассмотрим Закон Ома для участка цепи, изображённого на рисунке 18.

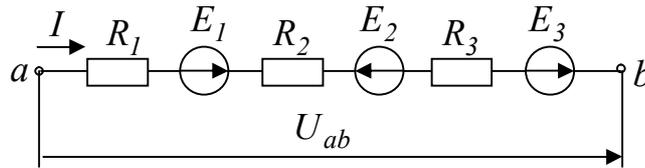


Рисунок 18 – Участок электрической цепи

Если положительное направление тока I на участке ab принять от точки a к точке b , то потенциал φ_b , выраженный через потенциал φ_a , определяется как

$$\varphi_b = \varphi_a - IR_1 + E_1 - IR_2 - E_2 - IR_3 + E_3.$$

Из этого выражения следует, что

$$I = \frac{(\varphi_a - \varphi_b) + E_1 - E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{U_{ab} \pm \sum_{i=1}^n E_i}{\sum_{i=1}^n R_i}, \quad (7)$$

где $\sum_{i=1}^n E_i = E_1 - E_2 + E_3$ – алгебраическая сумма ЭДС, действующая на участке ab , причем, ЭДС записывается со знаком плюс, если она совпадает по направлению с направлением тока и со знаком минус – если не совпадает;

$\sum_{i=1}^n R_i = R_1 + R_2 + R_3$ – сопротивление участка; $U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b$ – напряжение между зажимами a и b . Выражение (7) называют обобщенным законом Ома.

В цепях постоянного тока величину, обратную сопротивлению, называют электрической проводимостью:

$$g = \frac{I}{R}. \quad (8)$$

Анализ и расчет разветвленных цепей обычно проводят с помощью правил Кирхгофа. Первое правило Кирхгофа можно сформулировать следующим образом: сумма всех токов, приходящих к узлу электрической цепи, равна сумме всех токов, выходящих из этого узла или алгебраическая сумма токов в узле равна нулю:

$$\sum I = 0. \quad (9)$$

Второе правило Кирхгофа применяют к замкнутым контурам. Оно может быть сформулировано следующим образом: алгебраическая сумма напряжений на сопротивлениях участков замкнутого контура равна алгебраической сумме ЭДС источников, входящих в контур:

$$\sum IR = \sum E. \quad (10)$$

В уравнении (10) ЭДС записываются со знаком плюс, если их направления совпадают с направлением обхода контура, и со знаком минус, если их направления противоположны направлению обхода.

Основной единицей проводимости в СИ является сименс (См). Величина, обратная удельному сопротивлению, называется удельной электропроводимостью. Зависимость сопротивления от температуры приближенно описывается формулой

$$R = R_0 [1 + \alpha(t - t_0)], \quad (11)$$

где R_0 – сопротивление проводника при начальной температуре t_0 (Ом); α – температурный коэффициент сопротивления, равный отношению изменению сопротивления при изменении температуры на 1°C ; t – конечная температура ($^\circ\text{C}$).

Баланс мощностей

Из закона сохранения энергии для любой электрической цепи следует условие баланса мощностей: суммарная мощность источников цепи равна суммарной мощности, потребляемой приемниками.

Знак мощности будет положителен при совпадении направлений ЭДС E и тока I , проходящего через источник, и отрицателен при взаимно противоположных направлениях ЭДС и тока. Когда направления тока и ЭДС совпадают, от источника за единицу времени в электрическую цепь поступает мощность, равная EI . Эта мощность в уравнение баланса мощностей входит с положительным знаком. При встречном направлении ЭДС и тока источник ЭДС потребляет мощность из цепи. Например, когда источником является аккумулятор, который заряжается, или генератор, работающий в режиме двигателя, мощность EI расходуется на “химическую” или механическую работу соответственно. В этом случае мощность входит в уравнение баланса с отрицательным знаком. Уравнение баланса мощностей при питании цепи от источников ЭДС имеет вид

$$\sum EI = \sum I^2 R. \quad (12)$$

Если в электрической цепи содержатся не только источники ЭДС, но и источники тока, то при составлении уравнения баланса мощностей необходимо учитывать энергию, поступающую от источников тока.

Лекция 2

Раздел 1 Электрические цепи постоянного тока Тема 2 Методы эквивалентного преобразования схем электрических цепей с пассивными элементами

Методы эквивалентного преобразования схем электрических цепей с пассивными элементами

Часто при анализе электрических цепей постоянного тока приходится иметь дело со сложными разветвленными цепями. Если такие цепи состоят из соединения линейных пассивных элементов, то анализ значительно упрощается, если в схемах цепей провести определенные эквивалентные преобразования. Метод эквивалентного преобразования схем заключается в том, что сложные участки цепи заменяются более простыми, им эквивалентными. Преобразование будет эквивалентным, если оно не оказывает влияния на режим остальной, не затронутой преобразованием части цепи, т. е. если оно не вызывает в оставшейся части цепи изменений напряжений и токов. Примером такого преобразования может служить замена параллельного или смешанного соединения элементов одной ветвью с эквивалентным сопротивлением. Рассмотрим методы эквивалентных преобразований схем электрических цепей.

Цепь с последовательно соединенными резисторами. На рисунке 19, а) представлена схема с последовательно соединенными резисторами. Известно, что в этом случае через все элементы цепи проходит один и тот же ток. Приведем эту схему к эквивалентной схеме (рисунок 19, б), в которой эквивалентное сопротивление $R_{\text{экв.посл.}}$ выбрано таким, чтобы ток в цепи оставался без изменения. По второму правилу Кирхгофа можно записать:

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = IR_1 + IR_2 + IR_3 = IR_{\text{экв.}}, \quad (13)$$

откуда $R_{\text{экв.посл.}} = R_1 + R_2 + R_3$.

Эквивалентное сопротивление при последовательном соединении элементов цепи равно сумме сопротивлений отдельных элементов. Напряжение на зажимах последовательно соединенных приемников распределяется пропорционально их сопротивлениям.

Ток в цепи при последовательном соединении резисторов

$$I = \frac{U}{R_{\text{экв.посл.}}}, \quad (14)$$

а мощность, подводимая к цепи, равна сумме мощностей отдельных элементов:

$$P = UI = UI_1 + U_2I + U_2I + \dots + U_nI = I^2R_1 + I^2R_2 + \dots + I^2R_n = \sum_{i=1}^n P_i.$$

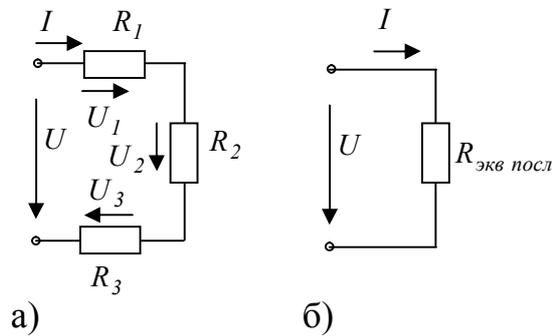


Рисунок 19 – Схема электрической цепи с последовательно соединенными резисторами

Последовательное соединение применяют в тех случаях, когда номинальные напряжения приемников ниже напряжения сети, например в измерительных приборах для расширения пределов измерения, в двигателях постоянного тока для ограничения пусковых токов и регулирования частоты вращения и т. д. Однако приемники, как правило, последовательно не включают, так как при выходе из строя одного из них происходит отключение остальных, что на практике нежелательно. Кроме того, при последовательном включении приемников мощность, выделяемая в цепи, пропорциональна их сопротивлениям, так как через все приемники проходит один и тот же ток. Следовательно, приемники, рассчитанные на меньшую номинальную мощность, будут работать с перегрузкой, а приемники, рассчитанные на большую номинальную мощность, - с недогрузкой. Отметим, что приемники с одинаковыми номинальными напряжениями и мощностями окажутся в лучших условиях работы при последовательном соединении.

Цепь с параллельно включенными резисторами. Рассмотрим параллельно соединенные приемники (рисунок 20, а), т. е. случай, когда приемники находятся под одним и тем же напряжением, что наиболее часто используют на практике. Это удобно, так как не требуется согласовывать номинальные данные приемников и имеется возможность их включать и выключать независимо друг от друга.

Схема рисунка 20, а) состоит из трех параллельных ветвей. По первому правилу Кирхгофа,

$$I = I_1 + I_2 + I_3, \quad (15)$$

где: $I_1 = \frac{U}{R_1}; I_2 = \frac{U}{R_2}; I_3 = \frac{U}{R_3}.$

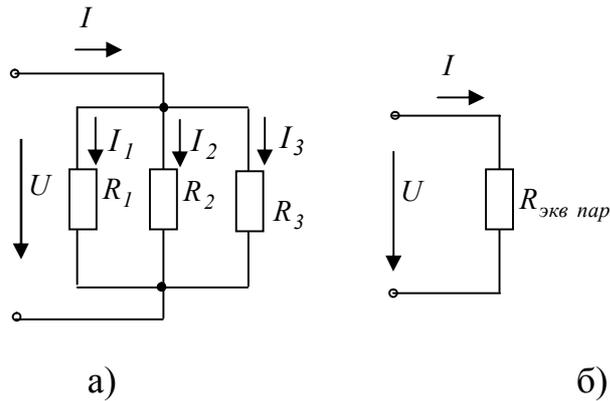


Рисунок 20 Схема электрической цепи с параллельно соединенными резисторами

Тогда для эквивалентной схемы (рисунок 20, б) $I = \frac{U}{R_{\text{эkv.пар}}}$. Подставляя полученные значения токов в (15) и сокращая на U , получим

$$\frac{I}{R_{\text{эkv.пар}}} = \frac{I}{R_1} + \frac{I}{R_2} + \frac{I}{R_3}. \quad (16)$$

Уравнение (1.29) можно переписать для проводимости как

$$g_{\text{эkv.пар}} = g_1 + g_2 + g_3, \quad (17) \text{ где}$$

$$g = \frac{I}{R}.$$

Или в общем виде

$$g_{\text{эkv.пар}} = \sum_{i=1}^n g_i.$$

Следовательно, при параллельном соединении элементов электрической цепи эквивалентная проводимость равна сумме проводимостей ее отдельных параллельно включенных ветвей.

При увеличении числа параллельных ветвей эквивалентная проводимость цепи возрастает, а эквивалентное сопротивление $R_{\text{эkv.пар}} = \frac{I}{g_{\text{эkv.пар}}}$

уменьшается, вследствие чего ток в неразветвленной части цепи возрастает. При этом увеличивается мощность P всей цепи. Мощность, подводимая к цепи с параллельно включенными резисторами, равна сумме мощностей ее отдельных параллельно включенных ветвей:

$$P = UI = UI_1 + UI_2 + \dots + UI_n = P_1 + P_2 + \dots + P_n = \sum_{i=1}^n P_i.$$

Получим формулы эквивалентных сопротивлений для двух частных случаев, представляющих практический интерес: для цепи с двумя парал-

тельно включенными резисторами с сопротивлениями R_1 и R_2 и цепи с тремя параллельно включенными резисторами с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 .

Эквивалентное сопротивление цепи с двумя параллельно включенными резисторами

$$R_{\text{экв.пар}} = \frac{I}{g_{\text{экв.пар}}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \quad (18)$$

Эквивалентное сопротивление цепи с тремя параллельно включенными резисторами:

$$R_{\text{экв.пар}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_3 R_1}. \quad (19)$$

Следует отметить, что эквивалентное сопротивление при параллельном соединении резисторов будет всегда меньше самого малого сопротивления, включенного в цепь.

Смешанное соединение резисторов. Рассмотрим простейшую цепь со смешанным соединением, т. е. содержащую последовательно и параллельно включенные резисторы, которая показана на рисунке 21, а).

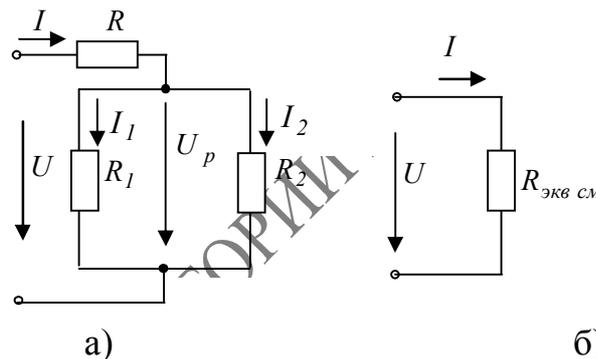


Рисунок 21– Схема электрической цепи со смешанным соединением резисторов

Эта цепь может быть приведена к схеме с одним эквивалентным сопротивлением $R_{\text{экв.см}} = \frac{U}{I}$ (рисунок 21, б).

Преобразование схемы удобно проводить в два приема. Вначале заменяют сопротивления параллельных ветвей на эквивалентное

$R_{\text{экв.1,2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$, а затем, зная, что эквивалентное сопротивление $R_{\text{экв.1,2}}$

включено последовательно с сопротивлением R , находят эквивалентное сопротивление всей цепи:

$$R_{\text{экв.см}} = R + R_{\text{экв.1,2}} = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

После нахождения эквивалентного $R_{\text{экв.см}}$, можно определить ток в неразветвленной части цепи: $I = \frac{U}{R_{\text{экв.см}}}$. Для определения токов в параллельных ветвях I_1 и I_2 вначале находят напряжение разветвления $U_p = IR_{\text{экв.1,2}}$, затем записывают токи в ветвях $I_1 = \frac{U_p}{R_1}$ и $I_2 = \frac{U_p}{R_2}$.

Последовательное, параллельное и смешанное соединения образуют цепи, которые называются простыми цепями постоянного тока.

Определение значения токов в простых цепях постоянного тока, если известны ЭДС и сопротивления участков цепи, производится с использованием закона Ома. Для сложных многоконтурных разветвленных цепей, в которых произвольно размещены резисторы и источники ЭДС, закона Ома для расчета недостаточно. В этом случае и используют правила Кирхгофа.

Преобразование треугольника в эквивалентную звезду. Рассмотрим электрическую схему рисунка 22, а). В этой схеме соединения элементов нельзя отнести ни к последовательному, ни к параллельному. В этом случае цепь образует треугольник, вершинами, которых являются три узла 1, 2, 3, а сторонами три ветви с сопротивлениями R_{12}, R_{23}, R_{31} , включенные между этими узлами. Расчет такой цепи удобно проводить, используя эквивалентную замену трех ветвей, соединенных треугольником, тремя ветвями, соединенными трехлучевой звездой, т.е. в треугольник с сопротивлениями R_{12}, R_{23}, R_{31} необходимо вписать звезду с сопротивлениями R_1, R_2, R_3 .

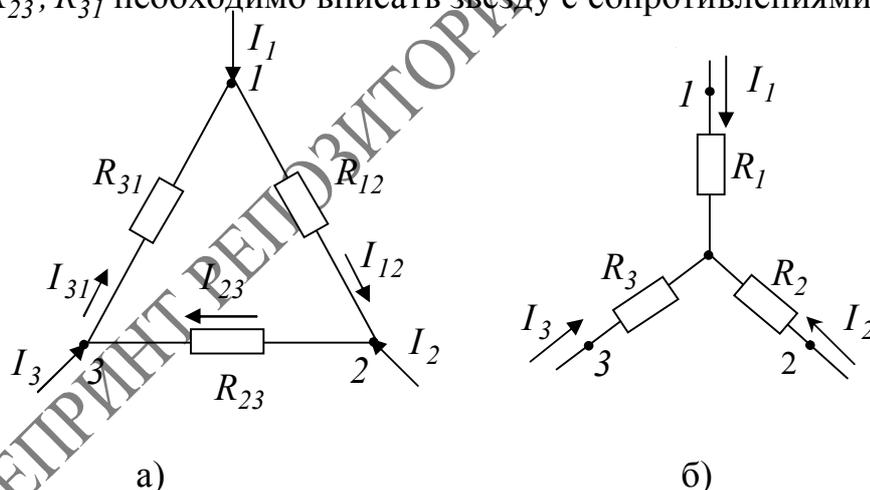


Рисунок 22 – Участки электрической цепи, соединенные треугольником (а) и звездой (б)

Введем обозначения:

R_{12}, R_{23}, R_{31} – сопротивление сторон треугольника;

R_1, R_2, R_3 – сопротивление лучей звезды;

I_1, I_2, I_3 – токи, подходящие к выводам;

I_{12}, I_{23}, I_{31} – токи в ветвях треугольника.

Выразим токи в ветвях треугольника через приходящие токи (рисунок 26, а). По второму правилу Кирхгофа сумма напряжений в контуре треугольника равна 0, т. е.

$$R_{12}I_{12} + R_{23}I_{23} + R_{31}I_{31} = 0.$$

По первому правилу Кирхгофа для узлов 2 и 1:

$$I_{23} = I_{12} + I_2; \quad I_{31} = I_{12} - I_1.$$

Решая уравнения, определяем

$$I_{12} = \frac{R_{31}I_1 - R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Напряжение между выводами 1 и 2 для треугольника:

$$U_{12} = R_{12}I_{12} = \frac{R_{12}R_{31}I_1 - R_{12}R_{23}I_2}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Для звезды:

$$U_{12} = R_1I_1 - R_2I_2.$$

Для эквивалентности необходимо равенство напряжений U_{12} при всяких токах I_1 и I_2 , т. е.

$$\frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_1 - \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}I_2 = R_1I_1 - R_2I_2,$$

а это возможно, если

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Сопротивление луча звезды равно произведению сопротивлений прилегающих сторон треугольника, делённому на сумму сопротивлений трех сторон треугольника.

$$I_{23} = \frac{R_{12}I_2 - R_{31}I_3}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}; \quad I_{31} = \frac{R_{23}I_3 - R_{12}I_1}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Преобразование звезды в эквивалентный треугольник. Рассмотрим электрическую схему рисунка 22, б. При переходе от звезды к треугольнику заданным является сопротивление звезды R_1, R_2, R_3 , а необходимо определить значения сопротивлений сторон треугольников R_{12}, R_{23}, R_{31} .

$$R_{12} = R_1 + R_2 + \frac{R_1R_2}{R_3}; \quad R_{23} = R_2 + R_3 + \frac{R_2R_3}{R_1}; \quad R_{31} = R_3 + R_1 + \frac{R_3R_1}{R_2}.$$

Сопротивление стороны треугольника равно сумме сопротивлений прилегающих лучей звезды и произведения их, деленного на сопротивление третьего луча.

Преобразование треугольника сопротивлений с источником напряжения в эквивалентную звезду. Рассмотрим схему на рисунке 23, а).

Заменяем источник ЭДС с напряжением E эквивалентным источником тока (рисунок 23, б).

Преобразуем, треугольник сопротивлений в эквивалентную звезду рисунок 23, б) сопротивления которой вычисляются по формулам:

$$R_1 = \frac{R_{31}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} ; \quad R_2 = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} ;$$

$$R_3 = \frac{R_{23}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}} .$$

Между точками 1,3 рисунка 23, в) остается неизменный источник тока с $I = \frac{E}{R_{31}}$.

Расщепим источник тока I на два источника (рисунок 23, г) и соединим точку A с точкой 0 . Теперь источник тока можно заменить эквивалентным источником напряжения, при этом получится схема эквивалентной звезды с источниками напряжений (рисунок 23, д).

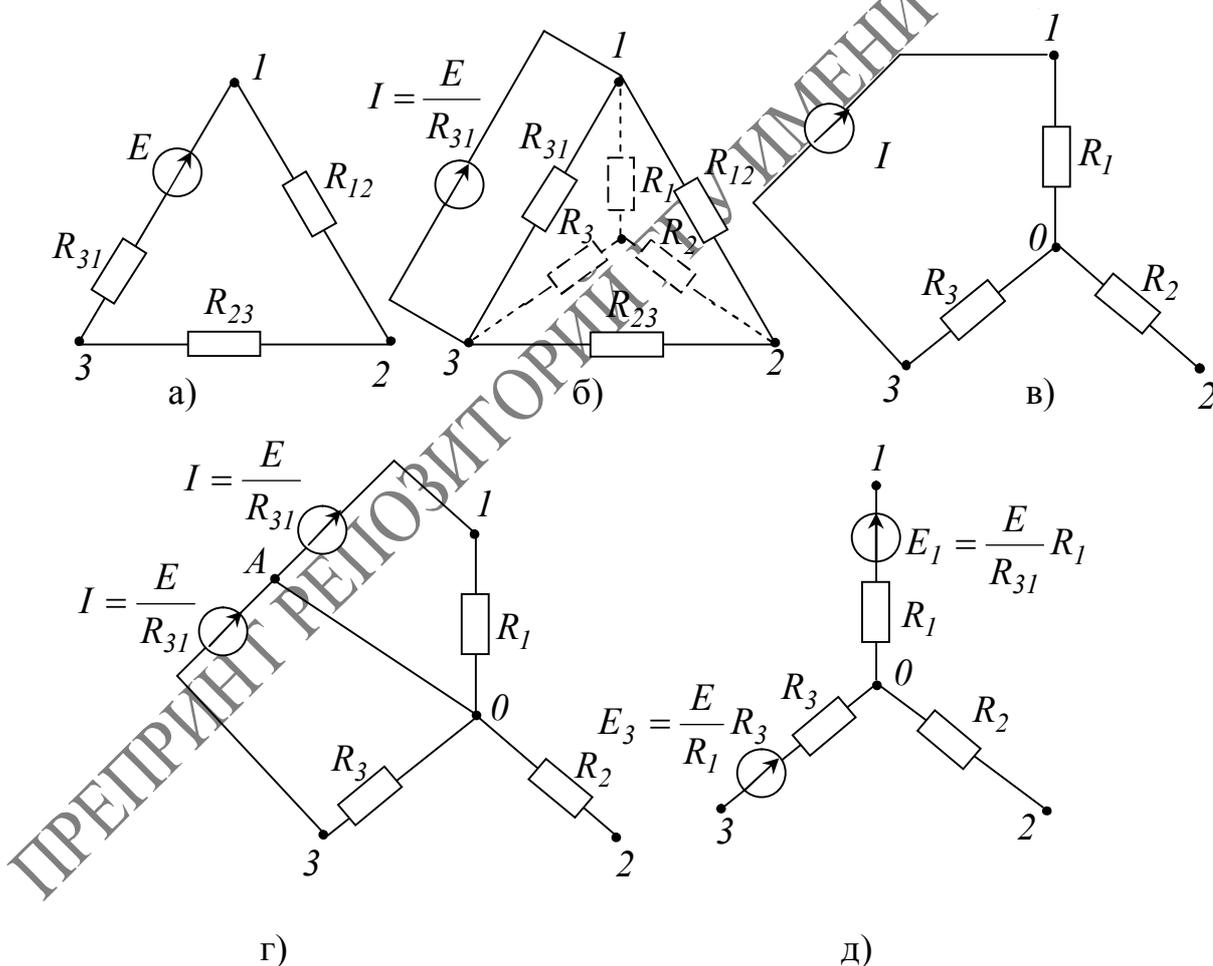


Рисунок 23 – Схемы электрической цепи для преобразования треугольника сопротивлений с источником напряжения в эквивалентную звезду

Лекция 3

Раздел 1 Электрические цепи постоянного тока

Тема 3 Методы расчета электрических цепей постоянного тока

Анализ расчета цепей постоянного тока с одним источником ЭДС

С помощью правил Кирхгофа можно рассчитать любую электрическую цепь, в том числе цепь постоянного тока с одним источником энергии. В этом случае необходимо составить систему уравнений по правилам Кирхгофа и решать ее относительно неизвестных токов. Для определения токов и напряжений каждого элемента цепи с одним источником электрической энергии можно использовать метод эквивалентных преобразований («метод свертки»).

Суть метода рассмотрим на примере цепи, схема которой приведена на рисунке 24, а). Пусть известны значения сопротивлений резисторов $R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, R_6$, ЭДС E_1 и его внутреннее сопротивление R_{01} . Требуется определить токи во всех участках цепи и напряжение, которое покажет вольтметр (сопротивление его бесконечно велико), включенный между точками a и d .

Для решения такой задачи отдельные участки электрической цепи с последовательно или параллельно соединенными элементами заменяют одним эквивалентным элементом. Схему электрической цепи упрощают постепенным преобразованием ее участков. В этом случае схеме цепи состоит из последовательно соединенного источника электрической энергии и одного эквивалентного пассивного элемента. Так, резисторы R_4 и R_5 соединены последовательно, а резистор R_6 к ним параллельно, поэтому их эквивалентное сопротивление запишется как

$$R_{456} = \frac{R_4 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_6}, \text{ где } R_{45} = R_4 + R_5.$$

Сопротивления R_3 и R_{456} соединены последовательно (рисунок 24, б), поэтому их общее сопротивление будет равно $R_{3456} = R_3 + R_{456}$.

Сопротивления R_2 и R_{3456} соединены параллельно, следовательно

$$R_{23456} = \frac{R_2 (R_3 + R_{456})}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

Эквивалентное (входное) сопротивление всей цепи находят из уравнения:

$$R_{\text{эkv}} = R_{01} + R_1 + \frac{R_2 (R_3 + R_{456})}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

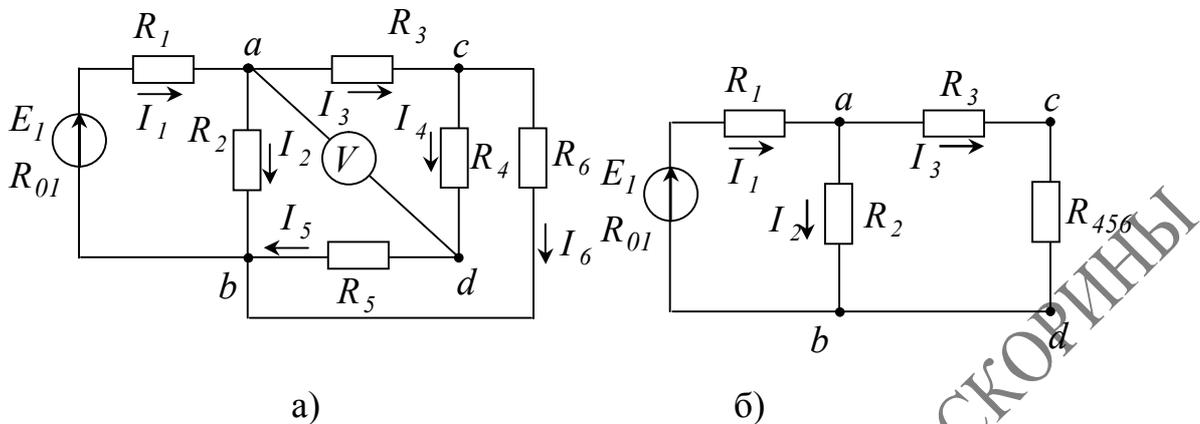


Рисунок 24

Ток I_1 в неразветвленной части схемы определяют из закона Ома:

$$I_1 = \frac{E_1}{R_{\text{экв}}}.$$

Токи I_2 и I_3 определяют

$$I_2 = I_1 \frac{R_3 + R_{456}}{R_2 + R_3 + R_{456}}; I_3 = I_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3 + R_{456}}.$$

Токи $I_4; I_5; I_6$ определяют по следующим формулам:

$$I_4 = I_5 = I_3 \frac{R_6}{R_4 + R_5 + R_6}; I_6 = I_3 \frac{(R_4 + R_5)}{R_4 + R_5 + R_6}.$$

Зная ток I_1 , можно найти ток I_2 по-другому. На основании второго правила Кирхгофа, определяем напряжение на участке ab

$$U_{ab} = E_1 - I_1(R_{01} + R_1), \text{ тогда значение тока будет равно } I_2 = \frac{U_{ab}}{R_2}.$$

Показания вольтметра можно определить, составив уравнение по второму правилу Кирхгофа, например, для контура $abca$:

$$R_3 I_3 + R_4 I_4 = U_{ad}.$$

Правильность вычисленных значений можно проверить, воспользовавшись первым правилом Кирхгофа или уравнением баланса мощностей, которые для схемы, изображенной на рисунке 1.1, имеют вид:

$$I_1 = I_2 + I_3; I_3 = I_4 + I_6;$$

$$E_1 I_1 = (R_{01} + R_1) I_1^2 + R_2 I_2^2 + R_3 I_3^2 + (R_4 + R_5) I_4^2 + R_6 I_6^2.$$

Если заданы значения сопротивлений ветвей электрической цепи (рисунок 24, а) и ЭДС источника E_1 , то для нахождения токов в ветвях можно воспользоваться методом подобия (методом пропорциональных величин).

Этот метод применим только для расчета линейных цепей, т. е. цепей с постоянными значениями сопротивлений.

Воспользуемся свойствами линейных цепей для определения токов схемы, изображенной на рисунке 24, а) в такой последовательности: зададимся произвольным значением тока I'_6 в резисторе R_6 , наиболее удаленном от источника питания. Как правило, это значение тока берут равным единице. По заданному току I'_6 и сопротивлению R_6 определяем напряжение $U'_{cb} = R_6 I'_6$. Далее определяем параметры цепи от действия тока $I'_6 = 1 \text{ A}$.

$$I'_4 = I'_5 = \frac{U'_{cb}}{R_4 + R_5}; I'_3 = I'_4 + I'_6; I'_2 = \frac{I'_3 R_3 + I'_4 (R_4 + R_5)}{R_2}; I'_1 = I'_2 + I'_3.$$

После этого находим значение ЭДС E'_1 как $E' = (R_{01} + R_1) I'_1 + R_2 I'_2$.

Однако найденное значение ЭДС E'_1 в общем случае отличается от заданной величины ЭДС E_1 . Поэтому для определения действительных значений токов и напряжений вычисляем так называемый коэффициент подобия $K = \frac{E_1}{E'_1}$. Умножая на него полученные при расчете значения токов и напряжений, находим действительные значения токов и напряжений цепи. Метод пропорциональных величин особенно эффективен при расчете разветвленных линейных электрических цепей с одним источником.

Метод расчета электрических цепей с применением правил Кирхгофа

Для расчета электрических цепей постоянного тока с применением правил Кирхгофа рекомендуется следующий порядок составления уравнений:

– произвольно выбирают направление токов во всех ветвях. Если принятое направление тока не совпадает с действительным, то при расчете такие токи получаются со знаком минус;

– составляют $(N - 1)$ уравнения по первому правилу Кирхгофа, где N – число узлов;

– недостающие уравнения в количестве $M - (N - 1)$, где M – число ветвей, составляют по второму правилу Кирхгофа, при этом обход контура можно производить как по часовой стрелке, так и против нее. Все значения ЭДС, направления которых совпадают с направлением обхода контура, записываются со знаком плюс, а те ЭДС, направления которых не совпадают – со знаком минус. Направление действия ЭДС внутри источника всегда принимают от минуса к плюсу;

– число составленных уравнений по первому и второму правилам Кирхгофа должно быть равно числу неизвестных токов;

– полученную систему уравнений решают относительно неизвестных токов.

На примере электрической цепи, схема, которой изображена на рисунке 25, составим систему уравнений по правилам Кирхгофа.

Эта схема имеет шесть ветвей и четыре узла, поэтому по первому правилу Кирхгофа для нее нужно составить три уравнения, например для узла a : $I_1 + I_3 - I_4 = 0$; для узла b : $I_2 + I_5 + I_1 = 0$; для узла c : $I_5 - I_6 + I_4 = 0$.

Выбрав направления обхода контура, составляем три уравнения по второму правилу Кирхгофа для трех произвольно выбранных контуров:

– для контура abc : $E_1 = I_1 R_1 - I_5 R_5 + I_4 R_4$;

– для контура bcd : $E_2 = I_2 R_2 - I_6 R_6 - I_5 R_5$;

– для контура acd : $0 = I_3 R_3 + I_4 R_4 + I_6 R_6$.

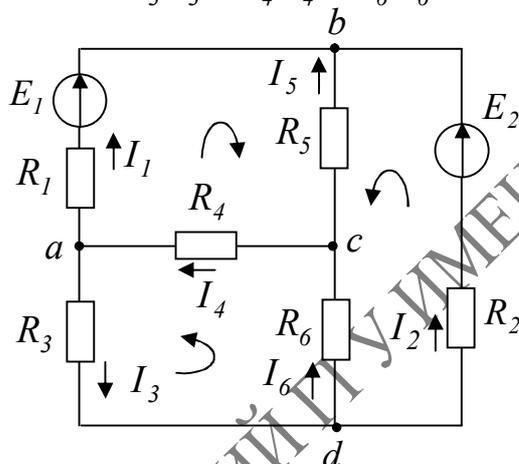


Рисунок 25 – Схема замещения разветвленной электрической цепи с двумя источниками электрической энергии для расчета с применением правил Кирхгофа

Решая совместно записанные уравнения, вычисляют все шесть неизвестных токов. Если в результате решения этих уравнений получаются токи со знаком минус, то это означает, что истинные направления токов в ветвях цепи противоположны тем направлениям, для которых составлены уравнения.

Правильность вычисленных значений можно проверить, воспользовавшись первым правилом Кирхгофа или уравнением баланса мощностей.

Метод расчета электрических цепей с применением контурных токов

Этот метод заключается в том, что вместо действительных токов в ветвях на основании второго правила Кирхгофа определяются так называемые контурные токи. Контурным называется такой расчетный ток, который замыкается только по своему контуру, оставаясь вдоль него неизменным. Тогда действительный ток в любой ветви, принадлежащий только одному контуру, численно равен контурному току, а в ветви, принадлежащей нескольким кон-

турам, равен алгебраической сумме контурных токов, проходящих через эту ветвь.

Число уравнений, составленных по второму правилу Кирхгофа, в этом случае равно числу независимых контуров. Контур считается независимым, если в нем имеется хотя бы одна ветвь, не принадлежащая другим контурам. Число независимых контуров можно определить $M - (N - 1)$, где M – число ветвей, N – число узлов. Направление обхода контура выбирают произвольно, обычно это направление совпадает с направлением контурного тока. Значение ЭДС берется со знаком плюс, если направление обхода контура совпадает с положительным направлением ЭДС, и со знаком минус, если не совпадает.

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 26.

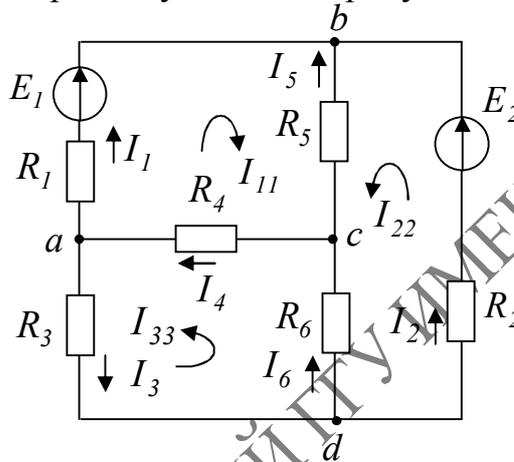


Рисунок 26 – Схема замещения разветвленной электрической цепи с двумя источниками электрической энергии для расчета методом контурных токов

Составим уравнения для трех независимых контуров по методу контурных токов:

- для контура abc : $E_1 = I_{11}(R_1 + R_5 + R_4) + I_{22}R_5 + I_{33}R_4$;
- для контура bcd : $E_2 = I_{11}R_5 + I_{22}(R_2 + R_6 + R_5) - I_{33}R_6$;
- для контура acd : $0 = I_{11}R_4 - I_{22}R_6 + I_{33}(R_4 + R_3 + R_6)$.

Решая совместно уравнения, определяем контурные токи. В том случае, когда контурный ток получается со знаком минус, это означает, что его направление противоположно выбранному на схеме. Зная контурные токи, определяем действительные токи в ветвях схемы следующим образом

$$I_1 = I_{11}; I_2 = I_{22}; I_3 = I_{33}; I_5 = -I_{11} - I_{22}; I_4 = I_{11} + I_{33}; I_6 = I_{33} - I_{22}.$$

Метод расчета электрических цепей с применением метода наложения

Этот метод применим только в линейных электрических цепях, т. е. в цепях, в которых сопротивления элементов не изменяются при прохождении через них тока или приложенного к ним напряжения. Расчет основывается на том, что в ветвях цепи определяют токи от действия каждого источника в

отдельности (частичные токи), а затем действительные токи определяются как алгебраическая сумма частичных токов. Рассмотрим схему на рисунке 27, а). Исключим в ней источник E_2 , т. е. $E_2 = 0$. Тогда схема примет вид рисунка 27, б).

Ток в неразветвленной части цепи будет равен общему току от действия первой ЭДС, т. е.

$$I'_{\text{общ}} = I'_1 = \frac{E_1}{R'_{\text{экв}}}, \text{ где } R'_{\text{экв}} = R_1 + \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

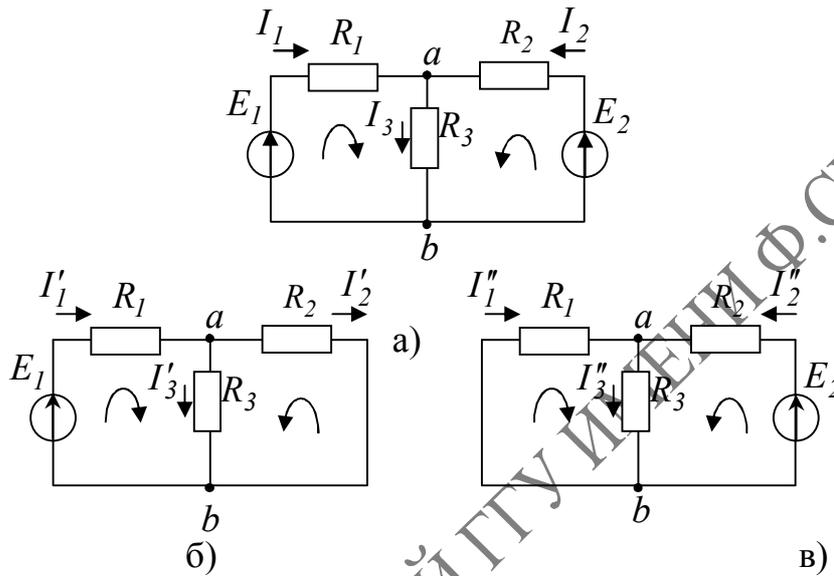


Рисунок 27 – Схема замещения разветвленной электрической цепи с двумя источниками электрической энергии (а) и схемы замещения для определения частичных токов от действия ЭДС E_1 (б) и ЭДС E_2 (в)

Ток I'_3 определим как $I'_3 = \frac{E_1 - I'_1 R_1}{R_3}$, а $I'_2 = I'_1 - I'_3$.

Токи I'_2 , I'_3 можно определить и так $I'_2 = I'_1 \frac{R_3}{R_2 + R_3}$,

$$I'_3 = I'_1 \frac{R_2}{R_2 + R_3}.$$

Исключим источник E_1 , т. е. $E_1 = 0$. Тогда схема примет вид, указанный на рисунке 27, в). Ток в неразветвленной части цепи определим как

$$I''_{\text{общ}} = I''_2 = \frac{E_2}{R''_{\text{экв}}}, \text{ где } R''_{\text{экв}} = R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}.$$

Ток I''_3 определим как $I''_3 = \frac{E_2 - I''_2 R_2}{R_3}$, а $I''_1 = I''_3 - I''_2$

Токи I''_1 , I''_3 можно определить и так $I''_1 = I''_2 \frac{R_3}{R_1 + R_3}$, $I''_3 = I''_2 \frac{R_1}{R_1 + R_3}$.

Действительные токи определим как алгебраическую сумму частичных токов (рисунок 2.3):

$$I_1 = I'_1 + I''_1; I_2 = I'_2 - I''_2; I_3 = I'_3 + I''_3.$$

Метод двух узлов

Если имеется несколько ветвей, соединённых параллельно (рисунок 28, а), в каждой из которых находятся источники напряжения и резистивные сопротивления, то все эти ветви можно заменить одной ветвью с некоторой эквивалентной ЭДС $E_{\text{экв}}$ и эквивалентным внутренним сопротивлением $R_{i\text{экв}}$ (рисунок 28, б). В этом случае расчет эквивалентной ЭДС $E_{\text{экв}}$ производится по следующей формуле:

$$E_{\text{экв}} = \frac{\sum EG}{\sum G}; G = \frac{I}{R_{i\text{экв}}} = \sum \frac{I}{R_i},$$

где $\sum EG$ – алгебраическая сумма произведений ЭДС E ветви на резистивную проводимость G этой ветви.

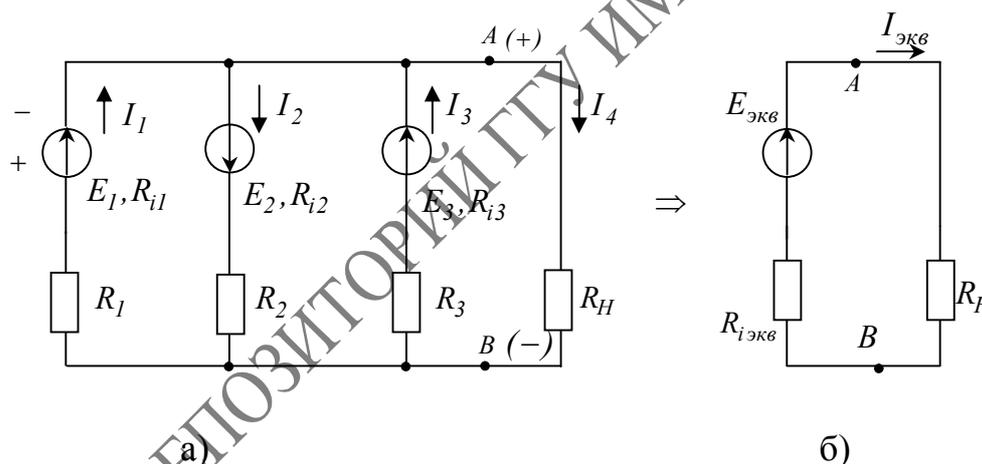


Рисунок 28 – Исследуемая электрическая цепь

Рассчитаем токи для электрической цепи изображенной на рисунке 28, а). Для этого определим $E_{\text{экв}}$ и $R_{i\text{экв}}$. Пусть например эквивалентная ЭДС направлена к точке A , т. е. на точке $A(+)$, а на точке $B(-)$. В этом случае

в формуле для $E_{\text{экв}} = \frac{\sum EG}{\sum G}$ со знаком плюс следует записать не ЭДС, кото-

рые в исходной схеме направлены стрелками к точке A , а со знаком минус – те ЭДС стрелки, которых направлены к точке B . Все резистивные проводимости записываются со знаком плюс.

$$E_{\text{экв}} = \frac{\sum EG}{\sum G} = \frac{E_1 \left(\frac{I}{R_{i1} + R_1} \right) - E_2 \left(\frac{I}{R_{i2} + R_2} \right) + E_3 \left(\frac{I}{R_{i3} + R_3} \right)}{\frac{I}{R_{i1} + R_1} + \frac{I}{R_{i2} + R_2} + \frac{I}{R_{i3} + R_3}}.$$

Затем подставляются численные значения, и вычисляется значение ЭДС $E_{\text{экв}}$. Если $E_{\text{экв}}$ получается со знаком плюс, то это означает, что предполагаемая полярность источника $E_{\text{экв}}$ выбрана правильно, а если со знаком минус, то действительная полярность противоположна выбранной. После проведенных преобразований получается неразветвленная цепь, в которой, зная значения ЭДС $E_{\text{экв}}$, эквивалентного внутреннего сопротивления $R_{\text{экв}}$, сопротивления нагрузки R_H , можно составить уравнение по второму правилу Кирхгофа:

$$E_{\text{экв}} = U_{R_{\text{экв}}} + U_{R_H},$$

откуда $E_{\text{экв}} = R_{\text{экв}} I_{\text{экв}} + R_H I_{\text{экв}} = (R_{\text{экв}} + R_H) I_{\text{экв}}$, а $I_H = \frac{E_{\text{экв}}}{R_{\text{экв}} + R_H}$,

Определим напряжение на узлах U_{AB} . Предположим, что в ветви с нагрузочным сопротивлением, ЭДС равна нулю ($E_4 = 0$). В этом случае вся цепь превращается в разомкнутую цепь с ЭДС $E_{\text{экв}}$, но в разомкнутой ветви напряжение на внешних зажимах равно ЭДС источника, т.е. $U_{AB} = E_{\text{экв}}$. Следовательно

$$U_{AB} = \left(\frac{\sum EG}{\sum G} \right) = \frac{\frac{E_1}{R_{i1} + R_1} - \frac{E_2}{R_{i2} + R_2} + \frac{E_3}{R_{i3} + R_3}}{\frac{1}{R_{i1} + R_1} + \frac{1}{R_{i2} + R_2} + \frac{1}{R_{i3} + R_3} + \frac{1}{R_H}}.$$

Выбрав произвольно направления токов в ветвях и зная значение U_{AB} , рассчитываем токи в ветвях.

$$I_1 = \frac{E_1 - U_{AB}}{R_1 + R_{i1}}; I_2 = \frac{E_2 + U_{AB}}{R_{i2} + R_2}; I_3 = \frac{E_3 - U_{AB}}{R_{i3} + R_3}; I_H = \frac{U_{AB}}{R_H}.$$

Лекция 4

Раздел 1 Электрические цепи постоянного тока

Тема 4 Методы расчета электрических цепей постоянного тока с несколькими источниками

Метод узловых напряжений (потенциалов)

Этот метод дает возможность рассчитывать токи в цепи с помощью $N - 1$ уравнений, составленных по первому правилу Кирхгофа, где N – число узлов. Для расчета по этому методу необходимо:

- обозначить все узловые точки цепи и потенциалы этих точек;
- задаться предполагаемыми токами во всех ветвях цепи;
- записать $N - 1$ уравнений по I правилу Кирхгофа, где N - число узлов;
- ток в каждой ветви выразить через напряжение на зажимах ветви, ЭДС и сопротивления данной ветви. При составлении этих уравнений следует помнить, что ток течет от точки, потенциал которой выше к точке, потенциал которой ниже. Если ЭДС по направлению совпадает с направлением предполагаемого тока, то такая ЭДС записывается со знаком плюс (+), а если противоположно – то со знаком минус (-);
- потенциал одного из узлов принять за начальный, например, нулевой;
- подставить числовые значения и рассчитать потенциалы остальных узловых точек;
- зная потенциалы всех узлов, ЭДС и сопротивления ветвей, рассчитать токи во всех ветвях;
- произвести проверку и определить расхождение токов в узлах, напряжений в контурах и мощности в цепи.

Рассчитаем токи во всех ветвях цепи методом узловых напряжений (рисунок 28). Цепь содержит три узла a, b, d . Выберем произвольно направление токов в пяти ветвях схемы. Составляем уравнение по первому правилу Кирхгофа для любых двух узлов. Например, для узлов a и b :

$$\begin{cases} I_1 + I_3 + I_5 = I_2 \\ I_4 = I_1 + I_3. \end{cases}$$

Выражаем каждый ток через потенциалы узлов, ЭДС и сопротивления. Предполагаемый ток I_1 течет от узла b к узлу a , следовательно, потенциал точки b выше потенциала точки a , направление I_1 и E_1 совпадают, сопротивление этой ветви $R_{i1} + R_1$, поэтому ток I_1 запишем следующим образом

$$I_1 = \frac{\varphi_B - \varphi_A + E_1}{R_{i1} + R_1}$$

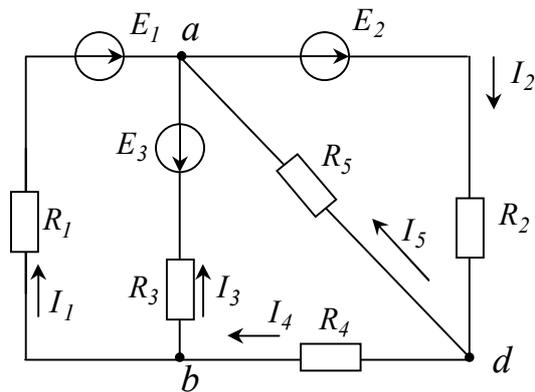


Рисунок 28 – Исследуемая электрическая цепь

Аналогичным образом запишутся следующие токи

$$I_3 = \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_3}{R_{i3} + R_3}; \quad I_5 = \frac{\varphi_D - \varphi_A}{R_5}; \quad I_2 = \frac{\varphi_A - \varphi_D + E_2}{R_{i2} + R_2}; \quad I_4 = \frac{\varphi_D - \varphi_B}{R_4}.$$

Примем потенциал точки d за нулевой ($\varphi_d = 0$). Подставим выраженные токи в уравнения, составленные по первому правилу Кирхгофа и получим

$$\begin{cases} \frac{\varphi_B - \varphi_A + E_1}{R_{i1} + R_1} + \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_3}{R_{i3} + R_3} + \frac{-\varphi_A}{R_5} = \frac{\varphi_A + E_2}{R_{i2} + R_2} \\ -\varphi_B = \frac{\varphi_B - \varphi_A + E_1}{R_{i1} + R_1} + \frac{\varphi_B - \varphi_A - E_3}{R_{i3} + R_3} \end{cases}$$

Далее подставляем численные значения и вычисляем потенциалы узлов. Зная потенциалы узлов, вычисляем неизвестные токи.

Метод эквивалентного генератора

Очень часто при анализе сложных электрических цепей интересуются электрическим состоянием лишь одной ветви, причем параметры элементов этой ветви могут изменяться. В этом случае нет необходимости производить расчет всей цепи каким-либо из рассмотренных методов, а целесообразно воспользоваться методом эквивалентного активного двухполюсника или методом эквивалентного генератора, в котором воздействие всех источников сложной электрической цепи на исследуемую ветвь, можно заменить воздействием последовательно включенного с ветвью эквивалентного источника (генератора), имеющего ЭДС $E_{экв}$, равную напряжению холостого хода на зажимах разомкнутой ветви и внутреннего сопротивления $R_{экв}$, равного входному сопротивлению цепи со стороны зажимов исследуемой ветви. Рекомендуется следующий порядок расчета:

- произвольно выбирают направление тока в исследуемой ветви;
- отключают исследуемую ветвь, осуществляя режим холостого хода;
- определяют напряжение холостого хода U_{XX} на зажимах разомкнутой ветви;

– находят входное (эквивалентное) сопротивление со стороны зажимов разомкнутой ветви;

– в общем случае находят ток в исследуемой ветви как

$$I = (U_{XX} \pm E) / (R_{\text{экв}} + R),$$

где: R – сопротивление резистора ветви, в которой определяют ток; $R_{\text{экв}}$ – входное (эквивалентное) сопротивление цепи со стороны зажимов выделенной ветви; $E_{\text{экв}}$ – ЭДС исследуемой ветви. Если ветвь не содержит ЭДС, то она принимается равной нулю. Знаки плюс или минус выбирают в соответствии с законом Ома для ветви с источником, т. е. если направление ЭДС совпадает с направлением тока, то берется знак плюс в противном случае – со знаком минус.

Рассмотрим схему, изображенную на рисунке 29 в которой необходимо определить ток в третьей ветви, т.е. между точками a и b .

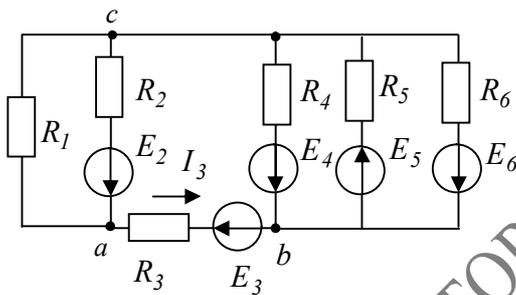


Рисунок 29 – Исследуемая цепь

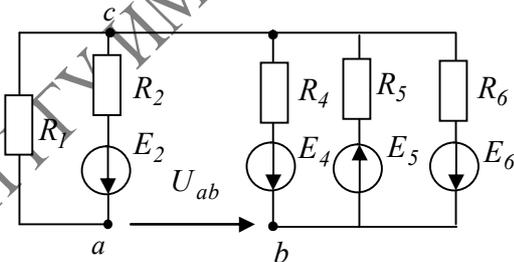


Рисунок 30 – Разомкнутая цепь

Решение задачи состоит из двух этапов:

1) определяем напряжение холостого хода U_{ab} на зажимах разомкнутой ветви ab . Схема в этом случае имеет вид, показанный на рисунке 30. Для определения тока в первом контуре применим метод контурных токов:

$$I_{1X} = E_2 / (R_1 + R_2); \quad I_1 = I_{1X}.$$

Напряжения между точками cd U_{cb} находим по методу двух узлов

$$U_{cb} = \frac{E_5 G_5 - E_4 G_4 - E_6 G_6}{G_4 + G_5 + G_6}.$$

Напряжение U_{ab} найдем по второму правилу Кирхгофа, обходя контур cab

$$U_{ab} = R_1 I_1 + U_{ca}.$$

2). Для определения сопротивления исключим все источники ЭДС. Схема в этом случае имеет вид, показанный на рисунке 31. Эквивалентное сопротивление вычислим как

$$R_{\text{экв}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_4 R_5 R_6}{R_4 R_5 + R_5 R_6 + R_4 R_6}.$$

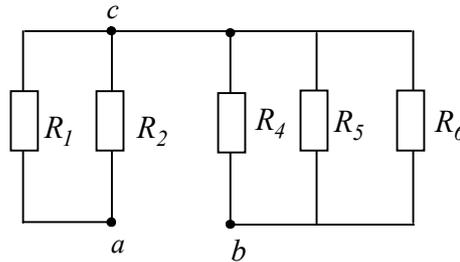


Рисунок 31— Схема электрической цепи рисунка 29 для расчета эквивалентного сопротивления

Тогда ток I_3 определим по следующей формуле $I_3 = \frac{U_{ab} - E_3}{R_{\text{экв}} + R_3}$.

Потенциальная диаграмма

Для анализа работы электрических цепей и улучшения режимов их работы, особенно в схемах электроники, важно знать распределение потенциала в цепи. Графическое изображение распределения потенциала в электрической цепи называется потенциальной диаграммой.

Потенциальная диаграмма строится следующим образом. Потенциал одной точки считают равным нулю, т. е. эту точку заземляют, а потенциалы других точек вычисляются по формулам, например, $\varphi_a - \varphi_b = U = IR$. Затем по оси абсцисс откладывают в масштабе сопротивления в том порядке, в котором они следуют друг за другом при обходе контура цепи, а по оси ординат откладывают в масштабе значения потенциалов точек цепи.

Поясним построение потенциальной диаграммы на примере. Построим потенциальную диаграмму для электрической цепи, схема которой приведена на рисунке 32, если известны следующие значения:

$$E_1 = 12 \text{ В}; E_2 = 34 \text{ В}; E_3 = 22 \text{ В};$$

$$R_1 = 5 \text{ Ом}; R_2 = 4 \text{ Ом}; R_3 = 3 \text{ Ом}; R_4 = 8 \text{ Ом}; R_5 = 2 \text{ Ом}.$$

Внутренним сопротивлением источника ЭДС пренебрежем. Если направление обхода контура совпадает с направлением ЭДС (от минуса к плюсу источника), то ЭДС берется со знаком плюс, и со знаком минус – если не совпадает.

Определяем величину тока в цепи:

$$I = \frac{-E_1 + E_2 + E_3}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5} = \frac{-12 + 34 + 22}{5 + 4 + 3 + 8 + 2} = 2 \text{ А}.$$

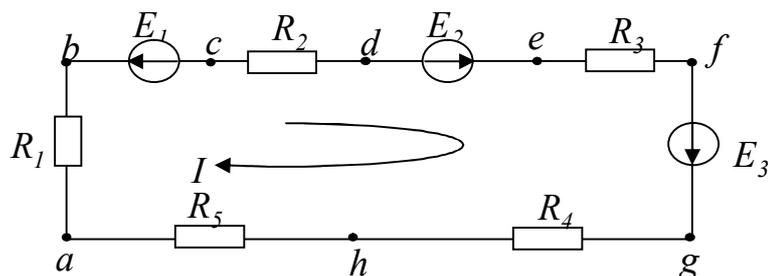


Рисунок 32 – Схема замещения электрической цепи для построения потенциальной диаграммы

Начнем обход электрической цепи с точки a , потенциал которой примем равным нулю, т. к. соединен с землей. При переходе от точки a в точку b проходим сопротивление R_1 , в котором имеет место падение напряжения IR_1 , т. е. $\varphi_a - \varphi_b = IR_1$. Тогда потенциал в точке b будет равен $\varphi_b = \varphi_a - IR_1 = 0 - 2 \cdot 5 = -10 \text{ В}$. Между точками b и c в цепи включен источник ЭДС, разность потенциалов на его зажимах будет $\varphi_b - \varphi_c = E_1$, откуда $\varphi_c = \varphi_b - E_1 = -10 - 12 = -22 \text{ В}$. Потенциал точки d ниже потенциала точки c на величину падения напряжения IR_2 , т. е. $\varphi_c - \varphi_d = IR_2$, откуда $\varphi_d = \varphi_c - IR_2 = -22 - 2 \cdot 4 = -30 \text{ В}$. Если положительный заряд источника ЭДС присоединен к точке e , а отрицательный – к точке d , то $\varphi_d - \varphi_e = E_2$, откуда $\varphi_e = \varphi_d + E_2 = -30 + 34 = 4 \text{ В}$. Потенциал точки f ниже потенциала точки e на величину падения напряжения IR_3 , т. е. $\varphi_e - \varphi_f = IR_3$, откуда $\varphi_f = \varphi_e - IR_3 = 4 - 2 \cdot 3 = -2 \text{ В}$. Потенциал точки g выше потенциала точки f на величину ЭДС E_3 , т. е. $\varphi_g - \varphi_f = E_3$, откуда $\varphi_g = \varphi_f + E_3 = -2 + 2 = 20 \text{ В}$. Находим потенциал точки h как $\varphi_g - \varphi_h = IR_4$, откуда $\varphi_h = \varphi_g - IR_4 = 20 - 16 = 4 \text{ В}$ и конечная точка a $\varphi_h - \varphi_a = IR_5$, откуда $\varphi_a = \varphi_h - IR_5 = 4 - 2 \cdot 2 = 0 \text{ В}$. По результатам полученных вычислений строим потенциальную диаграмму (рисунок 33).

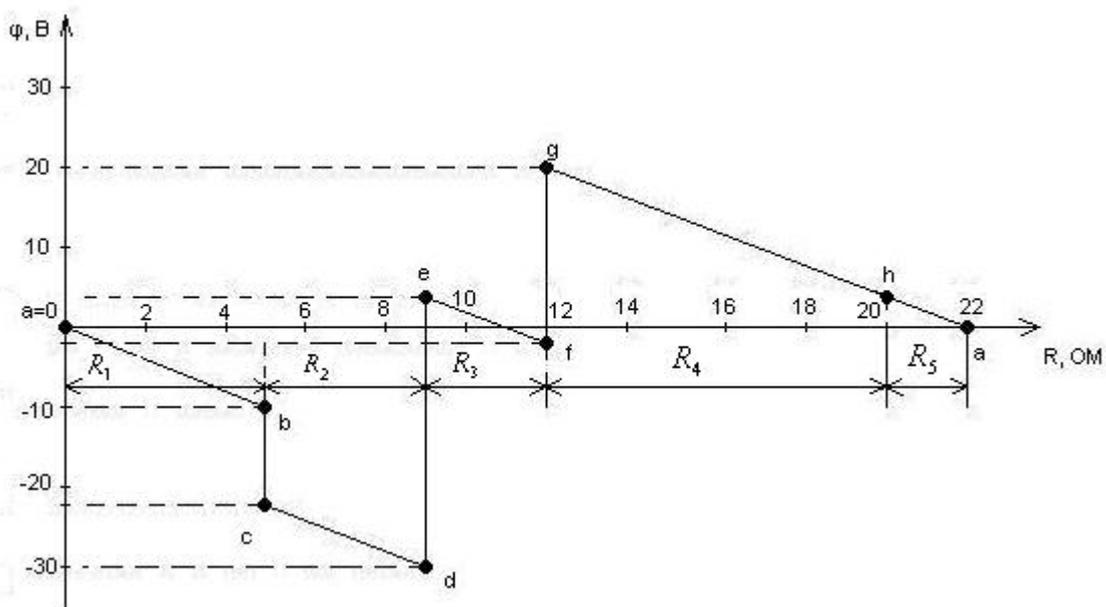


Рисунок 33 – Потенциальная диаграмма для электрической цепи рисунка 32

Энергетический баланс в электрической цепи

При протекании тока по резисторам в них выделяется тепло. На основании закона сохранения энергии, количество теплоты, выделяемое в единицу времени в сопротивлениях схемы (т. е. мощность) должна равняться энергии, доставляемой за тоже время источником питания. Уравнение энергетического баланса имеет вид

$$\sum I^2 R_i = \sum EI + \sum UI,$$

где E – ЭДС источника напряжения, U – разность потенциалов между узлами той ветви, в которой имеется источник тока с током I . При этом произведение EI входит со знаком плюс, если направление ЭДС и ток через источник совпадают и со знаком минус – если не совпадают. Произведение UI берется со знаком плюс при условии, что величина U равная разности потенциалов между узлами, к которым присоединяется источник тока, совпадает с током I по направлению.

Лекция 5

Раздел 2 Электрические цепи однофазного синусоидального тока

Тема 1 Способы соединения элементов электрических цепей однофазного синусоидального тока

Синусоидальные электрические величины

Электрические цепи, в которых ЭДС, напряжения и токи изменяются во времени по синусоидальному закону, называются цепями переменного синусоидального тока. Значение переменного тока в любой заданный момент времени называют мгновенным током i .

Электромагнитный процесс в электрической цепи, при котором мгновенные значения напряжения и токов повторяются через равные промежутки времени, называется периодическим. Наименьшее время, по истечении которого мгновенные значения периодической величины повторяются, называется периодом – T . Величина обратная периоду, т.е. число периодов в единицу времени, называется частотой: $f = \frac{1}{T}$. Частота f измеряется в Герцах (Гц).

Преобладающим видом периодического процесса в электрических цепях является синусоидальный режим - все напряжения и токи являются синусоидальными функциями одинаковой частоты. Это возможно только при заданных синусоидальных значениях ЭДС и токах источника. Тем самым обеспечивается наиболее выгодный эксплуатационный режим работы электрических установок.

На рисунке 1 изображена синусоидальная функция мгновенного значения напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$,

где U_m – амплитудное значение напряжения;

ω – угловая частота или скорость изменения аргумента $\omega = 2\pi f$;

ψ – начальная фаза, определяемая смещением синусоиды относительно начала координат.

Величина $(\omega t + \psi)$, определяющая стадию изменения синусоидальных величин, называется фазовым углом или фазой.

Анализ цепей переменного тока с использованием мгновенных значений ЭДС, напряжения и тока весьма неудобен, поэтому для оценки эффективности действия синусоидально изменяющегося тока его заменяют эквивалентным неизменным во времени током, так называемым действующим.

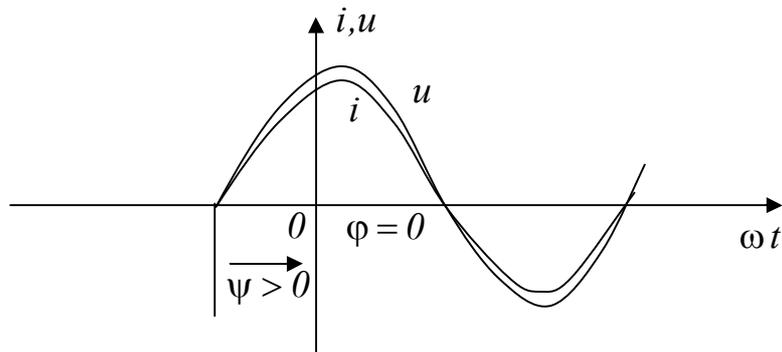


Рисунок 1 – Синусоидальная функция мгновенного значения напряжения $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$

Действующим значением периодически изменяющегося тока I (ЭДС, напряжения) называют среднеквадратичное значение тока за период:

$$I = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt}.$$

Действующее значение синусоидального тока $I = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot I_m$.

Действующее значение синусоидального напряжения $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot U_m$.

Действующее значение синусоидальной ЭДС $E = \frac{E_m}{\sqrt{2}} \approx 0,707 \cdot E_m$.

Измерительные приборы переменного тока наиболее распространенных систем измеряют действующее значение переменных токов и напряжений; следовательно, их шкалы отградуированы соответственно в действующих значениях.

Синусоидальный ток в сопротивлении

Пусть к резистору с сопротивлением R приложено синусоидальное напряжение вида $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ (рисунок 2), то в резисторе будет протекать ток равный

$$i = \frac{U_m}{R} \sin(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi).$$

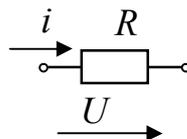


Рисунок 2 – Участок электрической цепи, содержащий сопротивление

Так как начальная фаза не изменилась, следовательно, напряжение на выводах сопротивления U_m и ток I_m , проходящий через это сопротивление, имеют одинаковую начальную фазу, или совпадает по фазе, т. е. они одновременно достигают своих амплитудных значений и соответственно одновременно проходят через нуль.

Разность начальных фаз двух синусоид, имеющих одинаковую частоту, называются фазовым сдвигом. В данном случае фазовый сдвиг между напряжением и током равен нулю: $\varphi = (\psi_u - \psi_i) = 0$.

Для описания процессов, возникающих в сопротивлении R при прохождении через него синусоидального тока, применяют не только мгновенные значения напряжения на сопротивлении и тока в нём, но и амплитудные и действующие значения напряжения и тока, связанные между собой законом Ома:

$$U_m = RI_m; U = RI.$$

Закон Ома для проводимости $g = 1/R$ имеет вид:

$$I_m = gU_m; I = gU.$$

Синусоидальный ток в индуктивности

Рассмотрим катушку с индуктивностью L , активным сопротивлением которой можно пренебречь, т. е. идеальную катушку (рисунок 3). Пусть через нее проходит синусоидальный ток $i = I_m \sin(\omega t + \psi)$.

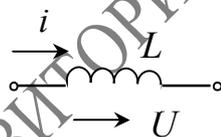


Рисунок 3 – Участок электрической цепи, содержащий индуктивность

Этот ток вызовет в катушке ЭДС самоиндукции

$$e_L = -L \frac{di}{dt} = -\omega Li_m \cos(\omega t + \psi) = U_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}).$$

Напряжение на индуктивности определяется как

$$u_L = -e_L = U_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}).$$

Из формулы видно, что ток отстает по фазе от напряжения на угол $\frac{\pi}{2}$.

Под фазовым сдвигом понимается разность начальных фаз тока и напряжения, который для индуктивного элемента равен $\varphi = (\psi_u - \psi_i) = \frac{\pi}{2}$.

Закон Ома для амплитудных значений тока и напряжений записывается как:

$$U_m = \omega L I_m = X_L I, \text{ а для действующих значений } - U = \omega L I = X_L I.$$

Величина $X_L = \omega L$ называется индуктивным сопротивлением, а $b_L = \frac{1}{\omega L}$ – индуктивной проводимостью.

Амплитудное значение тока на индуктивности через проводимость запишется как, $I_m = b_L U_m$, а действующее значение тока – $I = b_L U$.

Синусоидальный ток в ёмкости

Пусть приложенное напряжение на ёмкости C синусоидально и равно $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$, тогда ток, протекающий по ёмкости (рисунок 4) запишется как

$$i = C \frac{dU}{dt} = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi) = I_m \sin(\omega t + \psi + \frac{\pi}{2}).$$

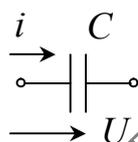


Рисунок 4 – Участок электрической цепи, содержащий ёмкость

Следовательно, ток i опережает приложенное напряжение по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$, т. е. нулевым значением тока соответствует максимальное (положительное или отрицательное) значение напряжения U . Фактически это объясняется тем, что когда электрический заряд q и соответственно напряжение $U = \frac{q}{C}$ достигает максимального значения f , ток i равен нулю.

Фазовый сдвиг между напряжением и током на ёмкости равен

$$\varphi = \psi_u - \psi_i = -\frac{\pi}{2}.$$

Амплитудное и действующее значения напряжения соответственно равны

$$U_m = \frac{1}{\omega C} I_m = X_C I_m ; U = X_C I.$$

Величина $X_C = \frac{1}{\omega C}$ называется ёмкостным сопротивлением, а –

$b_C = \frac{1}{\omega C}$ – ёмкостной проводимостью.

Амплитудное и действующее значения токов соответственно равны

$$I_m = b_C U_m; I = b_C U.$$

Последовательное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов в цепи однофазного синусоидального тока

Пусть по электрической цепи (рисунок 5) протекает ток $i = I_m \sin(\omega t)$.

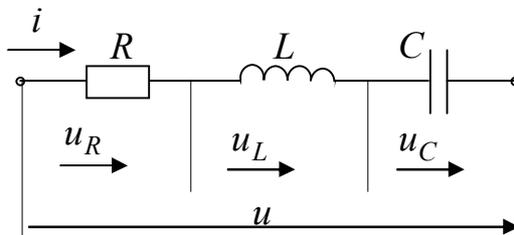


Рисунок 5 – Последовательное соединение RLC - элементов

Определим приложенное к цепи напряжение по второму правилу Кирхгофа $u = u_R + u_L + u_C$.

Напряжения u_R совпадает по фазе с током i на сопротивлении R , напряжение u_L опережает ток i по фазе на индуктивности L , а напряжение u_C отстает от тока I по фазе на ёмкости C на угол $\frac{\pi}{2}$.

Напряжение на выводах всей цепи будет равно:

$$\begin{aligned} U_m \sin(\omega t + \varphi) &= RI_m \sin \omega t + \omega LI_m \cos \omega t - \frac{I}{\omega C} I_m \cos \omega t = \\ &= RI_m \sin \omega t + \left(\omega L - \frac{I}{\omega C} \right) I_m \cos \omega t = I_m [R \sin \omega t + X \cos \omega t]. \end{aligned}$$

Уравнение представляет собой тригонометрическую форму записи второго правила Кирхгофа для мгновенных значений напряжений.

Полное реактивное сопротивление цепи вычисляется по формуле

$$X = X_L - X_C = \omega L - \frac{I}{\omega C}.$$

Если $X > 0$, цепь имеет индуктивный характер, если $X < 0$, цепь имеет емкостной характер. Активное сопротивление R всегда положительно.

Амплитудное значение напряжения запишется как $U_m = I_m \sqrt{(R^2 + X^2)}$. Если полное сопротивление цепи обозначить как $Z = \sqrt{(R^2 + X^2)}$, то амплитудное значение переписывается как $U_m = ZI_m$. Учитывая, что действующее значение напряжения и амплитудное связаны следующим соотношением $U = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, действующее значение напряжения имеет

следующий вид $U = ZI$. Угол сдвига фаз между током и напряжением можно определить следующим образом $tg\varphi = \frac{X}{R}$; $\varphi = arctg \frac{X}{R}$,

Если заданно напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на выводах цепи с последовательно соединенными R, L, C элементами, то ток определяется по формуле

$$i = \frac{U_m}{Z} \sin(\omega t + \psi + \varphi).$$

Если цепь носит индуктивный характер, то угол $\varphi > 0$, при емкостном характере цепи угол $\varphi < 0$. Угол φ положителен при отстающем по фазе от напряжения токе, и угол φ отрицателен при опережающем по фазе от напряжения токе.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $X = X_L - X_C = 0$, т. е. при равенстве индуктивного и емкостного сопротивлений. Такой режим цепи называется резонансом напряжений.

Если из треугольника сопротивлений выразить $R = Z \cos \varphi$; $X = Z \sin \varphi$, то активная составляющая напряжения запишется как $U_a = RI = ZI \cos \varphi = U \cos \varphi$, а реактивная составляющая напряжения – $U_p = XI = ZI \sin \varphi = U \sin \varphi$.

Действующее значение напряжения определится как $U = \sqrt{U_a^2 + U_p^2}$.

Параллельное соединение резистивного, индуктивного и емкостного элементов в цепи однофазного синусоидального тока

Пусть к выводам электрической цепи (рисунок б) приложено синусоидальное напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$. Мгновенное значение тока определим по первому правилу Кирхгофа $i = i_R + i_L + i_C$.

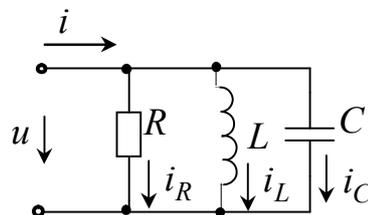


Рисунок б – Параллельное соединение RLC -элементов

Известно, что ток i_R в сопротивлении R совпадает по фазе с напряжением u , ток i_L в индуктивности L отстаёт, а ток i_C в ёмкости C опережает напряжение по фазе на угол $\frac{\pi}{2}$.

Суммарный ток в цепи равен

$$\begin{aligned} I_m \sin(\omega t + \Psi) &= \frac{1}{R} U_m \sin \omega t - \frac{1}{\omega L} U_m \cos \omega t + \omega C U_m \cos \omega t = \\ &= U_m \left[\frac{1}{R} \sin \omega t - \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C \right) \cos \omega t \right] = U_m [g \sin \omega t - b \cos \omega t], \end{aligned}$$

где b – полная реактивная проводимость цепи, которая вычисляется по формуле, $b = b_L - b_C = \frac{1}{\omega L} - \omega C$. Уравнение представляет тригонометрическую форму записи первого правила Кирхгофа для мгновенных значений токов и напряжений.

Если полная реактивная проводимость цепи $b > 0$, то цепь носит индуктивный характер, если $b < 0$ – ёмкостной характер. Активная проводимость $g = \frac{1}{R}$ всегда положительна.

Амплитудное значение тока можно записать как $I_m = \sqrt{g^2 + b^2} U_m$; $I_m = Y U_m$, где $Y = \sqrt{g^2 + b^2}$ – модуль полной проводимости рассматриваемой цепи. Действующее значение тока имеет следующий вид $I = \sqrt{g^2 + b^2} U$; $I = Y U$.

Угол сдвига фаз между током I и напряжением U равен $\varphi = \arctg \frac{b}{g} = \arctg \frac{\frac{1}{\omega L} - \omega C}{g}$.

Если задано напряжение $u = U_m \sin(\omega t + \psi)$ на выводах цепи с параллельно соединёнными R, L, C элементами, то ток будет определяться по следующей формуле $i = g U_m \sin(\omega t + \psi + \varphi)$.

Угол $\varphi > 0$ при индуктивном характере цепи, т.е. при полной проводимости цепи $b > 0$, при этом ток отстает по фазе от напряжения. Угол $\varphi < 0$ при ёмкостном характере цепи, т.е. при $b < 0$, при этом ток опережает по фазе напряжение.

Ток совпадает с напряжением по фазе при $b = b_L - b_C = 0$, т.е. при равенстве индуктивной и ёмкостной проводимостей. Такой режим работы электрической цепи называется резонансом тока.

Если выразить активную проводимость как $g = y \cos \varphi$, а реактивную проводимость как $b = y \sin \varphi$, то активная составляющая тока запишется как $I_a = g U = y U \cos \varphi = I \cos \varphi$, а реактивная составляющая тока – $I_p = b U = y U \sin \varphi = I \sin \varphi$.

Тогда действующее значение суммарного тока, или модуль тока имеет вид $I = \sqrt{I_a^2 + I_p^2}$.

Рассмотрим случай для участка, напряжение на котором равно $u = U_m \sin(\omega t)$, а ток равен $i = I_m \sin(\omega t + \varphi)$.

Мгновенная мощность, поступающая в цепь $p = U_m I_m \sin(\omega t + \varphi) = UI [\cos \varphi - \cos(2\omega t - \varphi)]$ состоит из двух слагаемых: постоянной величины $UI \cos \varphi$ и синусоидальной, имеющей удвоенную частоту по сравнению с частотой напряжения и тока.

Активная мощность, поступающая в цепь равна

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T ui dt = UI \cos \varphi.$$

Множитель $\cos \varphi$ носит название коэффициента мощности.

Активная мощность равна произведению действующих значений напряжения и тока, умноженному на коэффициент мощности.

Чем ближе угол φ к нулю, тем ближе $\cos \varphi$ к единице и, следовательно, тем больше при заданных значениях U и I активная мощность передается источником приемнику.

Выражения для активной мощности может быть преобразовано следующим образом:

$$P = ZI^2 \cos \varphi = RI^2, P = gU^2 \cos \varphi = gU^2, P = U_a I, P = U I_a.$$

Выражение для реактивной мощности можно записать в виде:

$$Q = ZI^2 \sin \varphi = XI^2, Q = yU^2 \sin \varphi = bU^2, Q = U_p I, Q = U I_p.$$

$$\text{Очевидно, что } S = P^2 + Q^2; \sin \varphi = \frac{Q}{S}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{Q}{P}.$$

Лекция 6

Раздел 2 Электрические цепи однофазного синусоидального тока

Тема 2 Применение комплексных чисел и векторных диаграмм к расчёту электрических цепей однофазного синусоидального тока

Представление синусоидальных функций в виде проекций вращающихся векторов

При расчёте более сложных цепей тригонометрическая форма расчёта затруднительна, поэтому применяют метод комплексных амплитуд. Комплексный метод основан на представлении векторов в комплексной плоскости и на записи их комплексными числами. Это позволяет для цепей синусоидального тока применять законы Ома и правила Кирхгофа и вытекающие из них методы расчета цепей в той же форме, что и для цепей постоянного тока. Каждому вектору на комплексной плоскости соответствует определенное комплексное число, которое можно записать в алгебраической, тригонометрической и показательной форме.

Комплексным числом называют сумму действительного и мнимого числа

$$\dot{A} = A_1 + jA_2 = A \cos \varphi + jA \sin \varphi = Ae^{j\alpha},$$

где A – модуль, α – аргумент или функция, $j = \sqrt{-1}$ – комплексное число.

Очевидно, что $A^2 = A_1^2 + A_2^2$; $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{A_2}{A_1}$.

Вектор, вращающийся в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки, с угловой скоростью ω может быть выражен (рисунок 7):

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = \dot{A}e^{j\omega t},$$

где $\dot{A} = Ae^{j\alpha}$ – комплексная амплитуда.

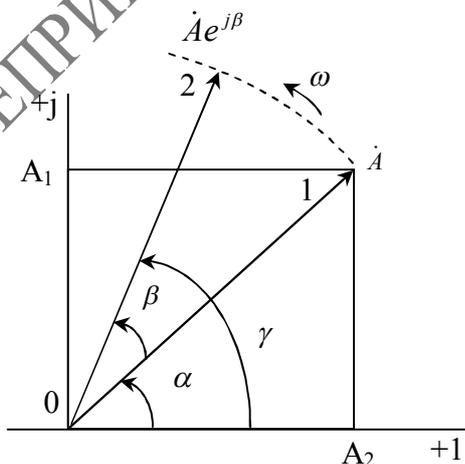


Рисунок 7 – Вектор, вращающийся

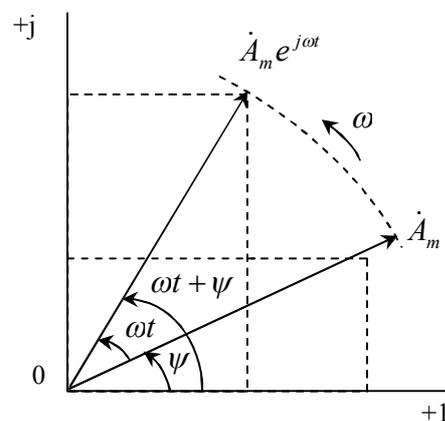


Рисунок 8 – Оператор вращения

в положительном направлении

Множитель $e^{j\omega t}$ – оператор вращения (рисунок 8). Умножение комплексной амплитуды \dot{A} на $e^{j\omega t}$ означает поворот вектора \dot{A} на угол ωt в положительном направлении.

$$Ae^{j(\omega t + \alpha)} = A \cos(\omega t + \alpha) + jA \sin(\omega t + \alpha);$$

$$A \sin(\omega t + \alpha) = \text{Im}(\dot{A}e^{j\omega t}); \quad A \cos(\omega t + \alpha) = \text{Re}(\dot{A}e^{j\omega t}).$$

Если синусоидальные функции имеют одну и ту же частоту, то соответствующие этим функциям векторы вращаются с одинаковой угловой скоростью и поэтому углы между ними сохраняются неизменными:

$$U_1 = U_{1m} \sin(\omega t + \psi_1);$$

$$U_2 = U_{2m} \sin(\omega t - \psi_2); \quad \varphi = \psi_1 - (-\psi_2) = \psi_1 + \psi_2.$$

Диаграмма, изображающая совокупность векторов, построенных с соблюдением их взаимной ориентации по фазе, называется векторной диаграммой.

$$C = \sqrt{A^2 + B^2 + 2AB \cos(\alpha - \beta)}; \quad \text{tg} \gamma = \frac{A \sin \alpha + B \sin \beta}{A \cos \alpha + B \cos \beta}.$$

Правила сложения и вычитания векторов приведены на рисунках 9, 10.

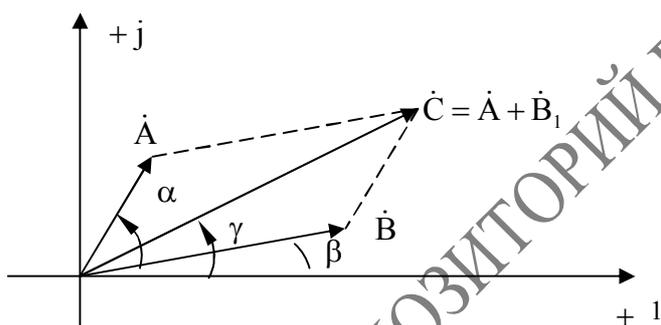


Рисунок 9 – Сложение векторов

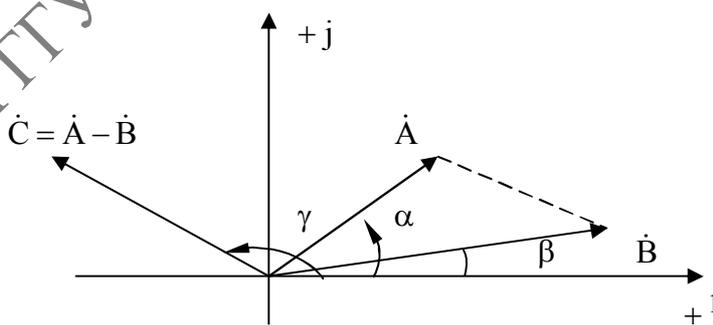


Рисунок 10 – Вычитание векторов

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме.

Последовательное соединение R, L, C элементов

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 11.

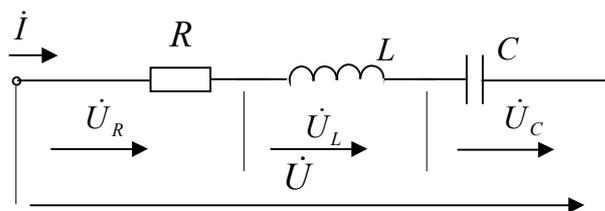


Рисунок 11 – Последовательное соединение RLC-элементов

Запишем второе правило Кирхгофа в комплексной форме

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C.$$

Выразим его через амплитудные значения тока и напряжения:

$$\dot{U} = R\dot{I}_m + j\omega\dot{I}_m + \frac{1}{j\omega C}\dot{I}_m.$$

Если комплексное сопротивление рассматриваемой цепи равно

$$\underline{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX,$$

то закон Ома для амплитудных значений примет вид

$$\dot{U}_m = \underline{Z}\dot{I}_m.$$

С учетом $\frac{U_m}{\sqrt{2}}$ и $\frac{I_m}{\sqrt{2}}$ для действующих значений закон Ома примет

вид:

$$\dot{U} = \underline{Z}\dot{I}.$$

Выразим полное сопротивление цепи в тригонометрической и показательной формах

$$\underline{Z} = Z \cos \varphi + jZ \sin \varphi = Ze^{j\varphi},$$

где $Z = |\underline{Z}|$ – модуль комплексного числа $Z = \sqrt{R^2 + X^2}$; $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$.

Построим векторную диаграмму. Пусть реактивное сопротивление цепи имеет индуктивный характер ($X > 0$), ток отстает по фазе от напряжения ($\varphi > 0$). Напряжение $\dot{U}_R = R\dot{I}$ совпадает с током по фазе, $\dot{U}_L = j\omega L\dot{I}$ – напряжение на индуктивности L (опережает ток на угол $\frac{\pi}{2}$), $\dot{U}_C = -j\frac{1}{\omega C}\dot{I}$ – напряжение на емкости (отстает от тока I на угол $\frac{\pi}{2}$) (рисунок 12).

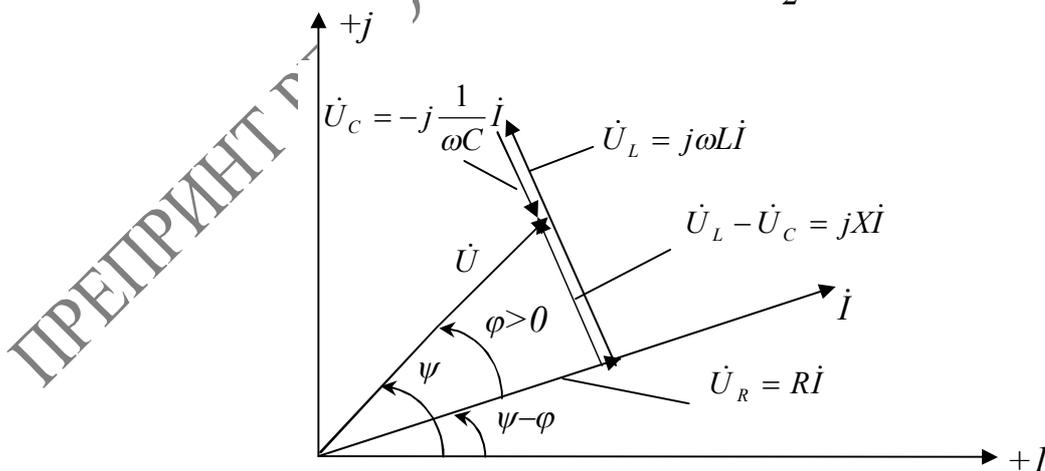


Рисунок – Векторная диаграмма

Если реактивное сопротивление цепи емкостное $X < 0$, ток опережает на фазе напряжение на угол $\frac{\pi}{2}$ ($\varphi < 0$). Тогда векторная диаграмма имеет вид (рисунок 13).

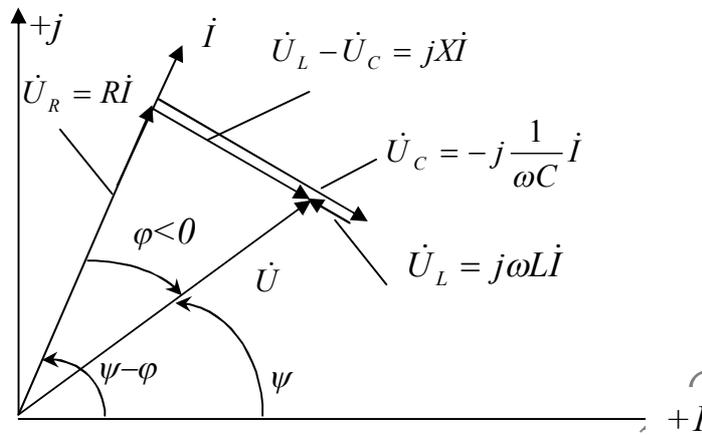
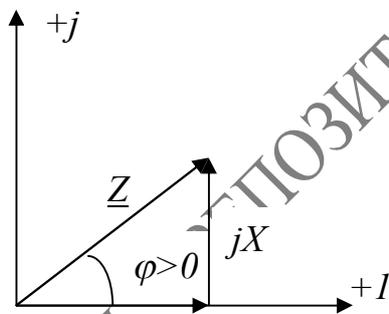


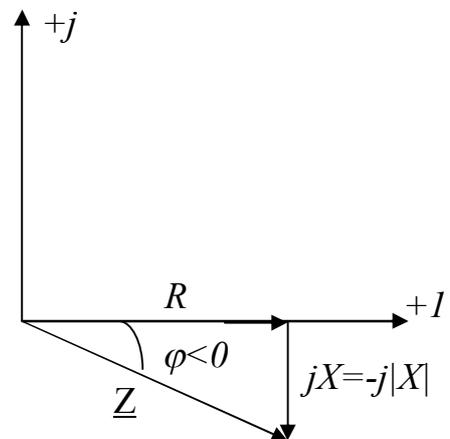
Рисунок 13 – Векторная диаграмма

Геометрическая сумма векторов $\dot{U}_R, \dot{U}_L, \dot{U}_C$ даёт вектор приложенного к цепи напряжения $\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$.

Построим треугольник сопротивлений для двух случаев: если $X > 0$ и $X < 0$ (рисунок 14):



а)



б)

Рисунок 14 – Треугольник сопротивлений

Законы Ома и Кирхгофа в комплексной форме. Параллельное соединение R, L, C элементов

Рассмотрим электрическую цепь на рисунке 15. Запишем первое правило Кирхгофа для этой цепи

$$\dot{I} = g\dot{U} + \frac{I}{g\omega L}\dot{U} + j\omega C\dot{U} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C,$$

где $\dot{I} = g\dot{U}$ ток в сопротивлении R (ток совпадает по фазе с напряжением);

$\dot{I}_L = -j\frac{I}{\omega L}\dot{U}$ ток индуктивности (ток отстаёт от напряжения на угол $\frac{\pi}{2}$);

$\dot{I}_C = j\omega C\dot{U}$ – ток в ёмкости (ток опережает напряжение на угол $\frac{\pi}{2}$).

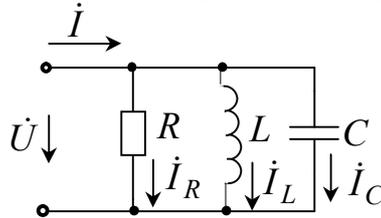


Рисунок 15 – Параллельное соединение RLC -элементов

Формула для определения комплексной проводимости запишется $\underline{Y} = g - j\left(\frac{I}{\omega L} - \omega C\right) = g - jb$, где g – активная, b – реактивная проводимости.

Запишем закон Ома в комплексной форме $\dot{I} = \underline{Y}\dot{U}$, где $\underline{Y} = Y \cos \varphi - jY \sin \varphi$ или $\underline{Y} = Y e^{-j\varphi}$, где $Y = |Y|$ – модуль комплексного числа, а \underline{Y} – полная проводимость цепи равная $\underline{Y} = g - jb$, а $\varphi = \arctg \frac{b}{g}$ – сдвиг фаз в цепи.

Построим векторные диаграммы. Рассмотрим электрическую цепь, у которой проводимость имеет индуктивный характер, т. е. $b > 0$ и $\varphi > 0$ (рисунок 16).

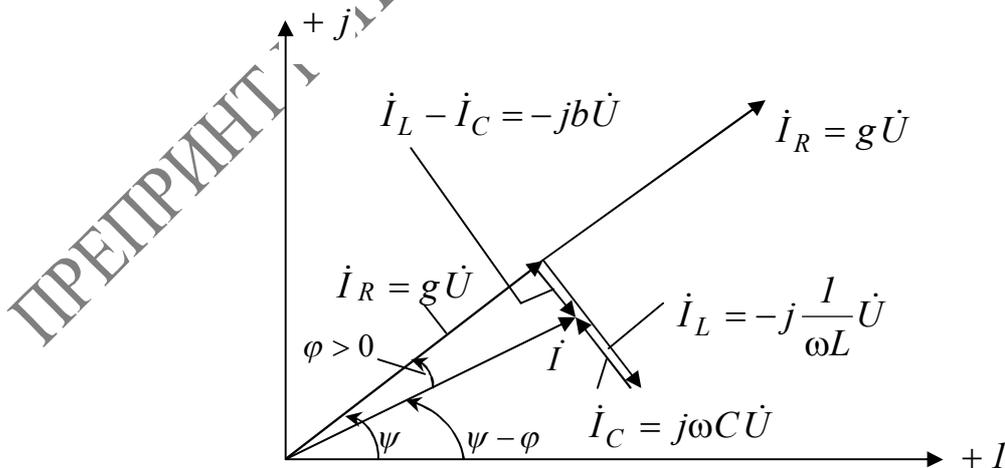


Рисунок 16 – Векторная диаграмма

Для случая когда реактивная проводимость имеет емкостной характер, т. е. $b < 0$, $\varphi < 0$, векторная диаграмма представлена на рисунке 17.

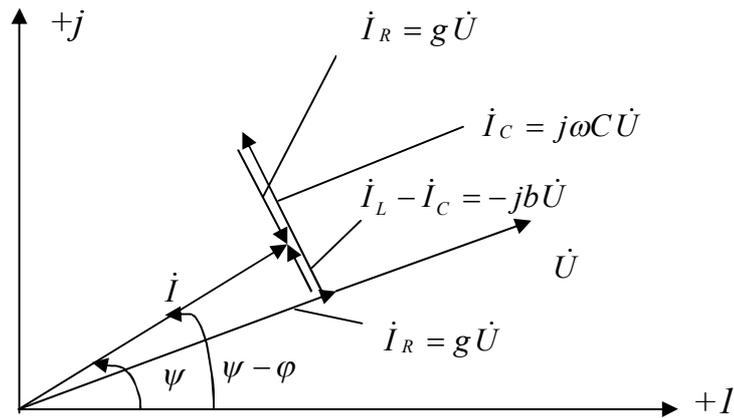


Рисунок 17 – Векторная диаграмма

Нарисуем треугольник проводимостей для двух случаев. Если полная проводимость цепи $b > 0$ и полная проводимость цепи $b < 0$ (рисунок 18):

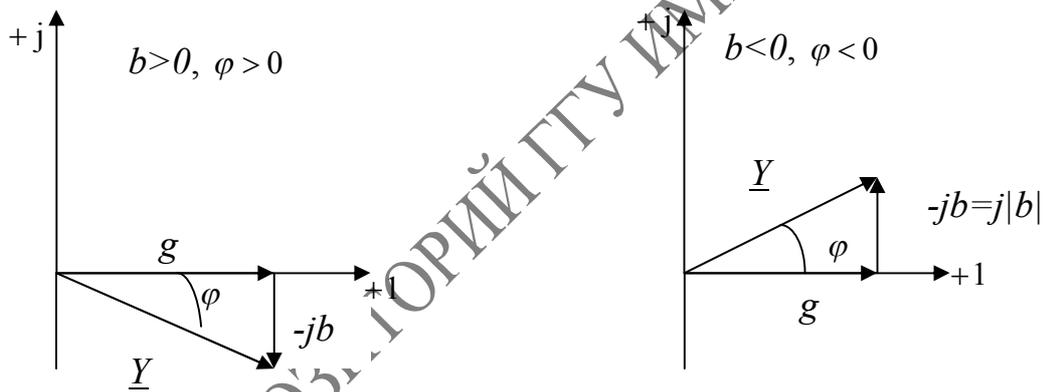


Рисунок 18 – Треугольники проводимостей

Уравнение напряжения для основных элементов цепи в общей форме (дифференциальной, интегральной) и при синусоидальном режиме в тригонометрической форме и комплексной

Элементы	Общая форма	Синусоидальный режим	
		Тригонометрическая форма	Комплексная форма
Сопротивление	$U = Ri$ $i = gU$	$U = RI_m \sin(\omega t + \psi)$ $i = gU_m \sin(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = RI$ $\dot{I} = g\dot{U}$
Индуктивность	$U = L \frac{di}{dt}$ $i = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t U dt$	$U = \omega LI_m \sin(\omega t + \psi)$ $i = -\frac{1}{\omega L} U_m \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = j\omega LI$ $\dot{I} = -j \frac{1}{\omega L} \dot{U}$
Ёмкость	$U = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i dt$ $I = C \frac{du}{dt}$	$U = \frac{1}{\omega C} I_m \sin(\omega t + \psi)$ $I = \omega C U_m \cos(\omega t + \psi)$	$\dot{U} = -j \frac{1}{\omega C} \dot{I}$ $\dot{I} = j\omega C \dot{U}$

Цепь	Z при последовательном соединении	Y при параллельном соединении
R, L	$R + j\omega L$	$\frac{1}{R} - j \frac{1}{\omega L}$
R, C	$R - j \frac{1}{\omega C}$	$\frac{1}{R} + j\omega C$
R, L, C	$R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})$	$\frac{1}{R} - j(\frac{1}{\omega L} - \omega C)$

Комплексная форма записи мощности электрической цепи однофазного синусоидального тока

Комплекс полной мощности цепи запишется

$$\tilde{S} = \dot{U}\dot{I}^* = UI \cos \varphi + jUI \sin \varphi = P + jQ,$$

где $\dot{I} = Ie^{j\psi_1}$; $\dot{U} = Ue^{j\psi_2}$, а $\varphi = \psi_2 - \psi_1$ – фазовый сдвиг.

Основные методы расчёта однофазных цепей синусоидального тока

При расчете однофазных цепей синусоидального тока возможно применение всех ранее рассмотренных методов. Все эти методы применимы к расчету цепей однофазного синусоидального тока, с той лишь разницей, что следует применять законы Ома, правила Кирхгофа в комплексном виде и вместо сопротивлений R определять комплексные сопротивления \underline{Z} .

Рассмотрим анализ цепей однофазного синусоидального тока с одним источником на примере цепи, схема которой представлена на рисунке 25. Пусть необходимо определить токи $\dot{I}_1, \dot{I}_2, \dot{I}_3$ и напряжения $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}$, активную, реактивную и полную мощности и построить векторную диаграмму в предложенной схеме рисунок 19, если известно, что $U = 120 \text{ В}; R_1 = 10 \text{ Ом}; R_2 = 24 \text{ Ом}; R_3 = 15 \text{ Ом}; L_1 = 19,1 \text{ мГн}; L_3 = 63,5 \text{ мГн}; C_2 = 455 \text{ мкФ}; f = 50 \text{ Гц}$.

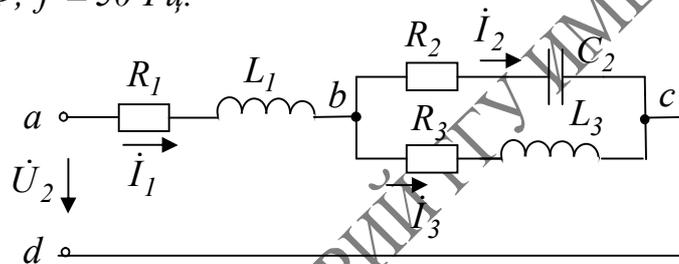


Рисунок 19 – Расчетная электрическая цепь

Решение: Определим комплексные значения сопротивлений в ветвях цепи в алгебраической и показательной формах:

$$\underline{Z} = R \pm jX = Ze^{\pm j\varphi}.$$

Первая ветвь содержит активно индуктивное сопротивление, которое вычисляется по формуле в алгебраической форме

$$\underline{Z}_1 = R_1 + j\omega L_1 = 10 + j6 \text{ Ом}.$$

В показательной форме оно имеет вид

$$\underline{Z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1} = 11,6 \cdot e^{j31^\circ} \text{ Ом}.$$

Вторая ветвь содержит активно емкостное сопротивление, которое вычисляется как

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \frac{1}{\omega C_2} = 24 - j7 = 25e^{-j16^\circ} \text{ Ом}..$$

Третья ветвь содержит активно индуктивное сопротивление, которое вычисляется как $\underline{Z}_3 = R_3 + j\omega L_3 = 15 + j20 = 25e^{j53^\circ 05'} \text{ Ом}$.

Выразим заданное значение напряжения в комплексном виде

$$\dot{U} = Ue^{j0} = 120 \text{ В.}$$

Определим полное сопротивление цепи

$$\underline{Z} = \underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_2 \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 24,4 + j10,8 = 26,7e^{j23^\circ 55'} \text{ Ом.}$$

Определим токи в ветвях

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\underline{Z}} = 4,5e^{-j23^\circ 55'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_2 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_3}{\underline{Z}_3 + \underline{Z}_2} = 2,7e^{j10^\circ 45'} \text{ А;}$$

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_1 \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = 2,7e^{-j58^\circ 35'} \text{ А.}$$

Запишем формулу для определения комплекса полной мощности цепи

$$\begin{aligned} \tilde{S} &= \dot{U}\dot{I}^* = 540e^{j23^\circ 55'} = 540 \cos 23^\circ 55' + j540 \sin 23^\circ 55' = \\ &= (494 + j218) \text{ В} \cdot \text{А} \end{aligned}$$

и из нее определим значения активной и реактивной мощности.

$$P = 494 \text{ Вт}; \quad Q = 218 \text{ Вар.}$$

Построим векторную диаграмму и из нее определим значения напряжения $\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}$ (рисунок 20).

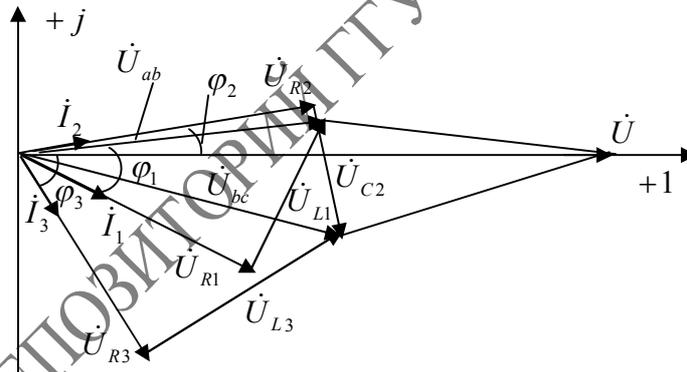


Рисунок 20 – Векторная диаграмма для электрической цепи рисунка 19

Символический метод расчета цепей однофазного синусоидального тока

При синусоидальном токе, можно перейти от уравнений, составляемых для мгновенных значений и являющихся дифференциальными к алгебраическим уравнениям, составленным относительно комплексов тока и ЭДС:

$$\dot{E} \Rightarrow \dot{E}_m$$

$$\dot{U}_R = Ri \Rightarrow R\dot{I}_m \text{ – напряжение совпадает по фазе с током;}$$

$$\dot{U}_L = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \dot{I}_m j\omega L \text{ – напряжение опережает ток на угол } \frac{\pi}{2};$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{C} \int idt \Rightarrow \dot{I}_m \left(-\frac{j}{\omega C} \right) - \text{напряжение отстает от тока на угол } \frac{\pi}{2}.$$

На примере цепи, схема которой изображена на рисунке 21, рассмотрим применение символического метода.

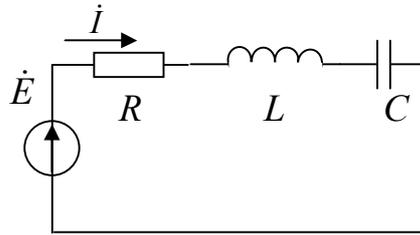


Рисунок 21 – Исследуемая электрическая цепь для символического метода

Составим уравнение по второму правилу Кирхгофа для мгновенных значений: $u_R + u_L + u_C = e$, $iR + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = e$. Перейдем от него к записи

для амплитудных значений токов и напряжений $\dot{I}_m R + \dot{I}_m j\omega L + \dot{I}_m \left(-\frac{j}{\omega C} \right) = \dot{E}_m$, т. е. получим закон Ома в комплексной форме

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{E}_m}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}.$$

Для действующих значений ток в электрической цепи при последовательном соединении элементов R, L, C запишется как

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Рассмотрим применение символического метода на примере.

Для предложенной электрической цепи рисунка 22 определить значения, $\dot{I}, \dot{U}_{R1}, \dot{U}_{R2}, \dot{U}$, если известно, что

$$e = 141 \sin \omega t \text{ В}, R_1 = 3 \text{ Ом}, R_2 = 2 \text{ Ом}, L = 0,0095 \text{ Г}, \omega = 314 \text{ с}^{-1}.$$

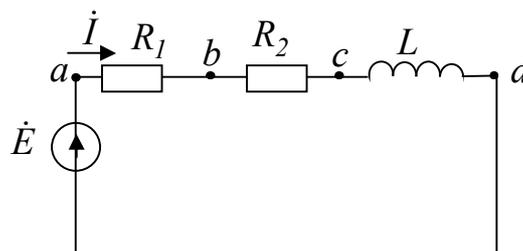


Рисунок 22 – Расчетная электрическая цепь

Запишем уравнение для мгновенных значений по второму правилу Кирхгофа $i(R_1 + R_2) + L \frac{di}{dt} = e$. Перейдем от него к уравнению в комплексной форме $\dot{I}(R_1 + R_2) + j\omega L \dot{I} = \dot{E}$.

Полное сопротивление цепи определим, как $Z = R_1 + R_2 + j\omega L = 5 + j3 = 5,8e^{j31^\circ}$. Действующее значение напряжения определим, как $\dot{E} = \frac{E_m}{\sqrt{2}} = \frac{141}{\sqrt{2}} = 100V$, тогда значение тока в цепи будет

$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z} = 17,2e^{-j31^\circ} A$. Вычислим напряжение на элементах цепи

$$\dot{U}_{R1} = \dot{U}_{ab} = \dot{I}R_1 = 51,6e^{-j31^\circ} V;$$

$$\dot{U}_{R2} = \dot{U}_{bc} = \dot{I}R_2 = 34,4e^{-j31^\circ} V; \dot{U}_L = \dot{U}_{cd} = j\omega L \dot{I} = 51,6e^{j59^\circ} V.$$

Построим векторную диаграмму (рисунок 23), для чего направим значение ЭДС E по положительной оси. Ток отстает по фазе от ЭДС на угол 31° . На активных сопротивлениях R_1 и R_2 ток и напряжение совпадает по фазе. На индуктивном элементе напряжение опережает на угол $\frac{\pi}{2}$.

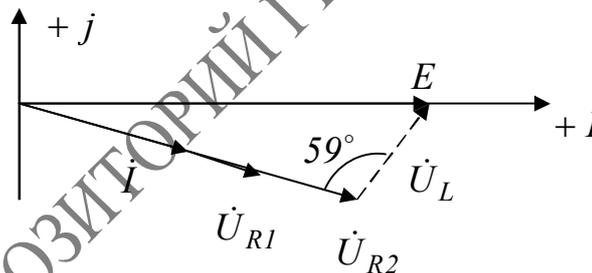


Рисунок 23 – Векторная диаграмма электрической цепи рисунка 22

Лекция 7

Раздел 2 Электрические цепи однофазного синусоидального тока

Тема 3 Резонансы в электрических цепях

Последовательный колебательный контур. Резонанс напряжений

Последовательным колебательным контуром называют такую цепь, в которой катушка и конденсатор соединены последовательно относительно входных зажимов (рисунок 24). В такой цепи можно наблюдать резонанс напряжений. При резонансе напряжений индуктивное и емкостное сопротивления взаимно компенсируются и в результате этого реактивное сопротивление и мощность цепи равны нулю.

При резонансе напряжений, возникающем в цепи с последовательным соединением индуктивных и емкостных элементов, ток и напряжение цепи совпадают по фазе. В этом случае угол сдвига фаз между током и напряжением равен нулю ($\varphi = 0$) и полное сопротивление цепи равно ее активному сопротивлению. Если $\varphi = \arctg \frac{X}{R}$, то угол $\varphi = 0$ при $X = 0$. Следовательно,

при резонансе $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} = R$ и $X_C - X_C = 0$ или $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, откуда угловая частота при резонансе $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ и резонансная

частота $f_0 = \frac{1}{(2\pi\sqrt{LC})}$.

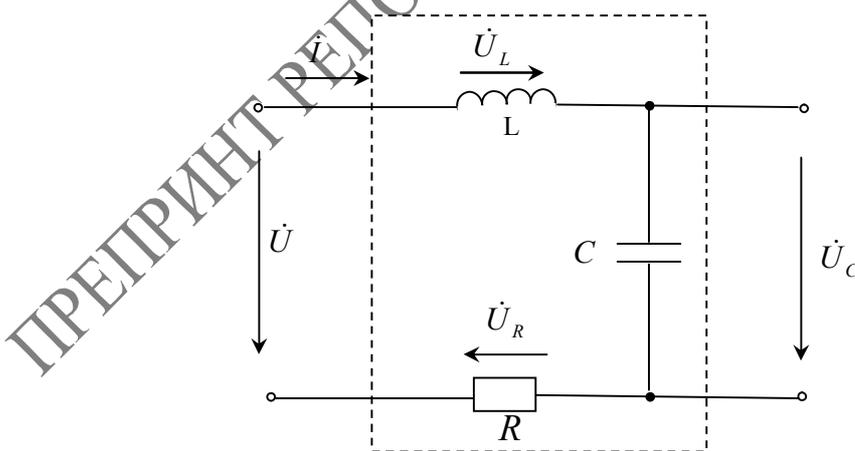


Рисунок 24 – Последовательный колебательный контур

Таким образом, условием возникновения резонанса напряжения в цепи является равенство реактивных сопротивлений $X_L = X_C$, так как в этом случае частота колебательного контура ω_0 равна частоте сети, питающей данную цепь.

Мгновенные значения энергии магнитного и электрического поля соответственно запишутся

$$W_L = \frac{Li^2}{2}; \quad W_C = \frac{Cu^2}{2}.$$

Т. е. в электрической цепи происходит непрерывное перераспределение энергии магнитного и электрического полей, суммарное значение которой постоянно. Вся энергия, поступающая от источника в момент резонанса расходуется в сопротивлении R .

Отношение напряжения на индуктивности или емкости к напряжению, приложенному к цепи при резонансе, называют добротностью контура или коэффициентом резонанса.

$$Q_L = \frac{U_L}{U} = \frac{X_L}{R} = \frac{\omega_0 L}{R}; \quad Q_C = \frac{U_C}{U} = \frac{X_C}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR};$$

$$Q_L = Q_C = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{\frac{L}{C}}}{R} = \frac{\rho}{R},$$

где $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ – характеристическое (волновое) сопротивление контура.

Относительной расстройкой частоты по отношению к резонансной частоте контура называют величину: $\delta = \omega - \frac{\omega_0}{\omega} = \frac{\omega}{\omega_0} - 1$.

Величину обратную добротности называют коэффициентом затухания контура:

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R}{\rho}.$$

Полное сопротивление цепи минимально при резонансе напряжений, при этом ток в цепи достигает максимального значения.

Полосу частот вблизи резонанса (рисунок 25), на границах которой ток снижается до $\frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,707$ максимального значения I_0 принято называть полосой пропускания резонансного контура $2\Delta f = |f_2 - f_1|$, где f_1, f_2 – нижняя и верхняя граничная частота.

Величина добротности Q характеризует остроту резонансной кривой (рисунок 26).

Внутреннее сопротивление источника ЭДС R_i влияет на добротность и полосу пропускания колебательного контура. Чем больше R_i , тем ниже добротность и шире полоса пропускания.

В условиях близких к резонансу, напряжения U_L и U_C могут быть большими.

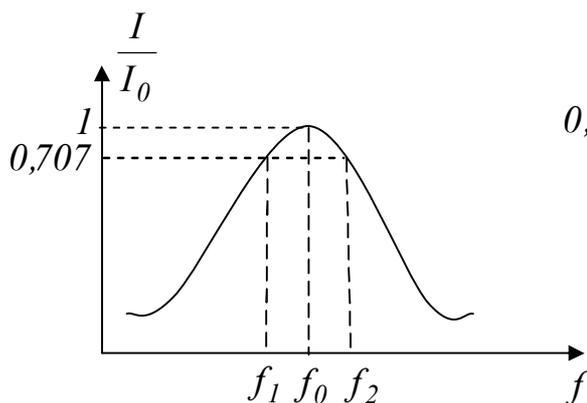


Рисунок 25 – Полоса пропускания резонансного контура

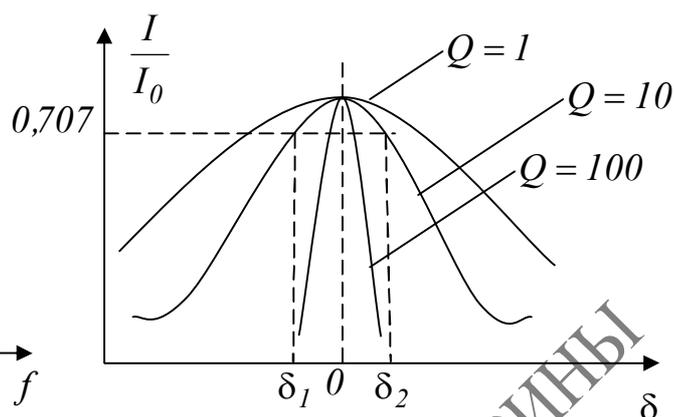


Рисунок 26 – Величина добротности

Векторная диаграмма тока и напряжения при резонансе напряжений представлена на рисунке 27.

Зависимость напряжений на емкости и индуктивности от частоты при резонансе напряжений показана на рисунке 28, где U_0 – напряжение при резонансе.

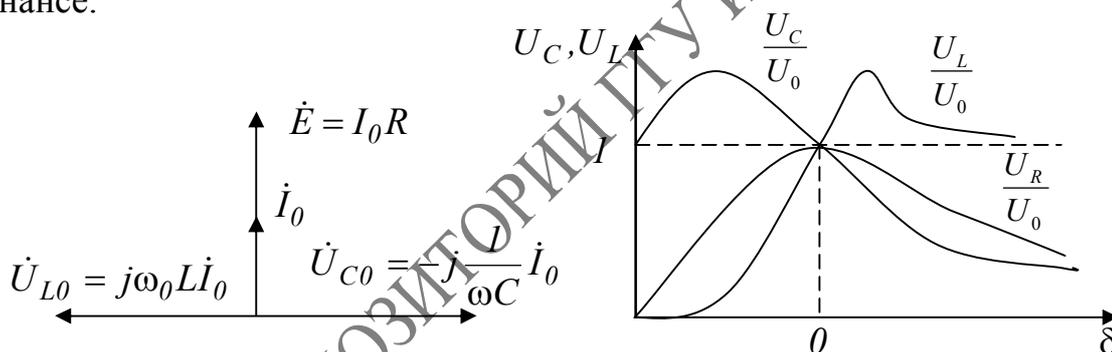


Рисунок 27 – Векторная диаграмма тока и напряжения при резонансе напряжений

Рисунок 28 – Зависимость напряжений на емкости и индуктивности от частоты

Параллельный колебательный контур. Резонанс токов

Рассмотрим параллельный колебательный контур, простейшим видом которого является параллельное соединение индуктивной катушки и конденсатора (рисунок 29).

Резонансом токов называют такой режим параллельного колебательного контура, при котором ток в неразветвленной части цепи совпадает по фазе с напряжением ($\varphi = 0$), а мощность, потребляемая из сети, равна активной мощности контура. Реактивная мощность при резонансе из сети не потребляется.

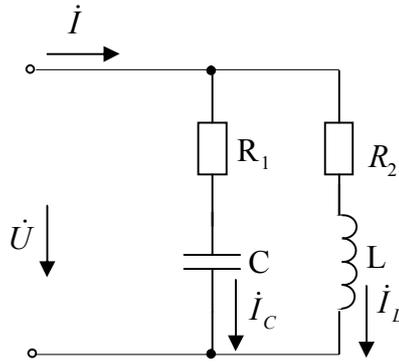


Рисунок 29 – Параллельный колебательный контур

При резонансе токов $b = b_L - b_C = 0$. При резонансе токов возможны ситуации, когда реактивные токи \dot{I}_L и \dot{I}_C намного превышают суммарный ток суммарный ток в цепи, вследствие, чего резонанс при параллельном соединении называют резонансом токов. Это возможно при условии $g < b_L$ или $g < b_C$.

Определим резонансную частоту контура:

$$b = b_1 - b_2 = -\frac{1/(\omega C)}{R_1^2 + (1/\omega C)^2} + \frac{\omega L}{R_2^2 + (\omega L)^2} = 0.$$

После преобразования получаем

$$\frac{R_1^2 + (\omega L)^2}{L} = \frac{1 + R_2^2 (\omega C)^2}{C}$$

откуда $\omega_p = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{L/C - R_2^2}{L/C + R_1^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\rho^2 - R_2^2}{\rho^2 - R_1^2}}$, где $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; $\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

Как видно из выражения для резонансной частоты ω_p , резонанс токов возможен при одновременном выполнении условий $\rho > R_1$, $\rho > R_2$ или $\rho < R_1$ и $\rho < R_2$. Если эти условия не выполняются, то ω_p – линейное число. В случае, когда $R_1 = R_2$ $\omega_p = \omega_0$ при $R_1 = R_2 = \rho$; $\omega_p = 0/0$, т. е. резонанс токов наступает при любой частоте источника. При этом эквивалентное сопротивление контура не зависит от частоты.

$$\underline{Z} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(\rho + j\omega L)(\rho - j\frac{1}{\omega C})}{(2\rho + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}))} = \frac{\rho^2 [2 + j\frac{\omega L}{\rho} - \frac{1}{\rho\omega C}]}{\rho [2 + j(\frac{\omega L}{\rho} - \frac{1}{\rho\omega C})]} = \rho,$$

где j – комплексное число.

Следовательно, ток в неразветвленной части цепи не зависит от частоты. Если R_1 и R_2 – сопротивления, учитывающие потери реальных конден-

саторов и индуктивной катушки ($R_1 = R_C; R_2 = R_L$), то как правило, $\rho \gg R_1$, $\rho \gg R_2$ при этом $\omega_p \approx \omega_0$.

В контуре без потерь ($R_1 = R_2 = 0$), $I = bU = 0$, токи I_L и I_C равны по величине и противоположны по фазе. Эквивалентные сопротивления контура с потерями

$$\underline{Z}' = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R_1 + R_2 + j(X_1 + X_2)} = \frac{(R_1 + jX_1)(R_2 + jX_2)}{R + jX},$$

где $X_1 = -\frac{1}{\omega C}$; $X_2 = \omega L$; $R = R_1 + R_2$; $X = X_1 + X_2$; j – комплексное число.

В идеальном случае, например в радиотехнических устройствах, где применяют контуры с малыми потерями, когда практически $R_1 = R_2 = 0$ (или они очень малы по сравнению с ρ), резонансную частоту можно определить, как и при резонансе в последовательном колебательном контуре, по формуле:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Частотные характеристики для резонанса тока изображены на рисунке 30.

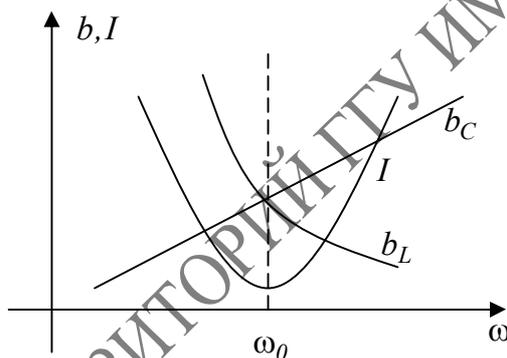


Рисунок 30 – Частотные характеристики для резонанса тока

Лекция 8

Раздел 3 Трехфазные цепи

Тема 1 Трехфазные электрические цепи

Основные понятия, определения и величины, характеризующие трехфазные электрические цепи

Трехфазные электрические цепи представляют собой частный случай многофазных цепей. Многофазная система электрических цепей есть совокупность нескольких однофазных электрических цепей, в каждой из которых действуют синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, создаваемые общим источником энергии и сдвинутые друг относительно друга по фазе на один и тот же угол. Следует отметить, что термин «фаза» применяют для обозначения угла, характеризующего стадию периодического процесса, а также для названия однофазной цепи, входящей в многофазную цепь [2-5].

Обычно применяют симметричные многофазные системы, у которых амплитудные значения ЭДС одинаковы, а фазы сдвинуты друг относительно друга на один и тот же угол $\frac{2\pi}{m}$, где m – число фаз. Наиболее часто в электротехнике используют двух-, трех- и шестифазные цепи.

Трехфазные цепи – это совокупность трех однофазных цепей, в которых действуют синусоидальные ЭДС одной и той же частоты, сдвинутые друг относительно друга по фазе на один и тот же угол $\frac{2\pi}{3}$.

Источником электрической энергии в трехфазной цепи является синхронный генератор, в трех обмотках которого, конструктивно сдвинутых друг относительно друга на угол $\frac{2\pi}{3}$ и называемых фазами, индуцируются три ЭДС, фазы которых, в свою очередь, также сдвинуты друг относительно друга на угол $\frac{2\pi}{3}$.

Трехфазная система ЭДС, индуцируемых в статоре синхронного генератора, обычно представляет собой симметричную систему. На электрических схемах обмотки статора трехфазного генератора изображают, как показано на рисунке 1, а).

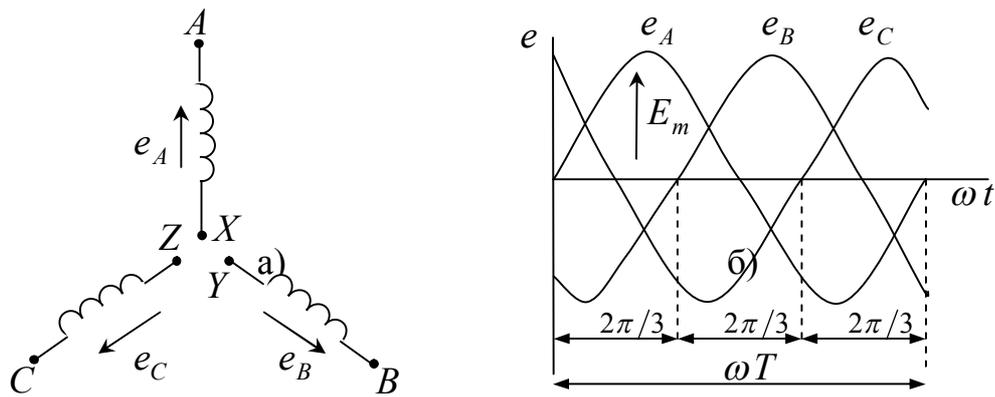


Рисунок 1 – Условное изображение обмоток статора трехфазного генератора и трансформатора (а) и графики мгновенных значений трехфазной симметричной системы (б)

За условное положительное направление ЭДС в каждой фазе генератора принимают направление от конца к началу обмотки. Если ЭДС фазы A принять за исходную, равную нулю, то мгновенные значения ЭДС трехфазного генератора (рисунок 1, б) можно выразить аналитически:

$$\left. \begin{aligned} e_A &= E_m \sin \omega t; \\ e_B &= E_m \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3} \right); \\ e_C &= E_m \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3} \right) = E_m \sin \left(\omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

Для симметричной трехфазной системы ЭДС согласно (1) справедливо равенство

$$e_A + e_B + e_C = 0. \quad (2)$$

Учитывая, что вектор ЭДС фазы A совмещен с вещественной осью комплексной плоскости (рисунок 2), для комплексных значений ЭДС системе (1) можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \dot{E}_A &= E e^0 = E \\ \dot{E}_B &= E e^{-j \frac{2\pi}{3}} = E \cos \frac{2\pi}{3} - j E \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} E - j \frac{\sqrt{3}}{2} E \\ \dot{E}_C &= E e^{j \frac{2\pi}{3}} = E \cos \frac{2\pi}{3} + j E \sin \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} E + j \frac{\sqrt{3}}{2} E \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Из векторных диаграмм (рисунок 2), а также из уравнений (3) следует, что

$$\dot{E}_A + \dot{E}_B + \dot{E}_C = 0.$$

Таким образом, сумма амплитуд или действующих значений ЭДС симметричной трехфазной системы равна нулю.

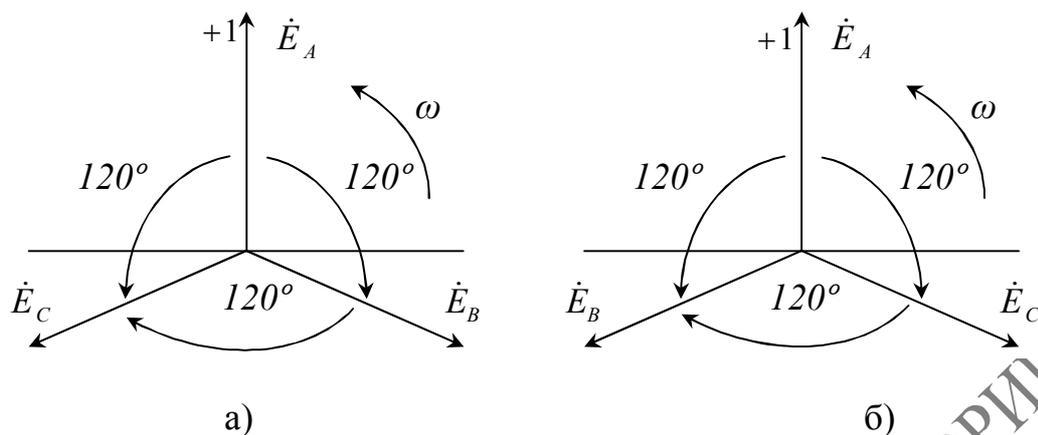


Рисунок 2 – Векторные диаграммы прямой (а) и обратной (б) последовательности чередования фаз симметричной трехфазной системы

На рисунке 1, б) показано изменение мгновенных значений ЭДС трехфазного генератора, а на рисунке 2 даны его векторные диаграммы для прямой и обратной последовательности чередования фаз.

Последовательность, с которой ЭДС в фазных обмотках генератора принимает одинаковые значения, называют последовательностью фаз. Если ротор генератора вращать в прямом направлении, получается последовательность чередования фаз $A; B; C$, т. е. ЭДС фазы B отстает по фазе от ЭДС фазы A и ЭДС фазы C отстает по фазе от ЭДС фазы B .

Такую систему ЭДС называют системой прямой последовательности. Если изменить направление вращения ротора генератора на противоположное, то последовательность чередования фаз будет обратной. У генераторов роторы всегда вращаются в одном направлении, поэтому последовательность чередования фаз никогда не изменяется.

От последовательности чередования фаз зависит направление вращения трехфазных синхронных и асинхронных двигателей. Достаточно поменять местами две любые фазы двигателя, чтобы изменить направление его вращения на противоположное. Последовательность фаз необходимо учитывать при параллельном включении трехфазных генераторов.

Способы соединения фаз источника трехфазного тока и соотношения между фазными и линейными величинами

С целью уменьшения числа соединительных проводов в трехфазной системе используют связанные цепи, в которых фазы источника или приемника связаны между собой звездой или треугольником.

При соединении фаз источника звездой (рисунок 3, а) концы фаз $X; Y; Z$ объединены в общую точку θ , называемую нейтральной, а начала

фаз A ; B ; C с помощью проводов соединены с приемником тремя проводами, которые называются линейными. Такую трехфазную систему называют трехпроводной.

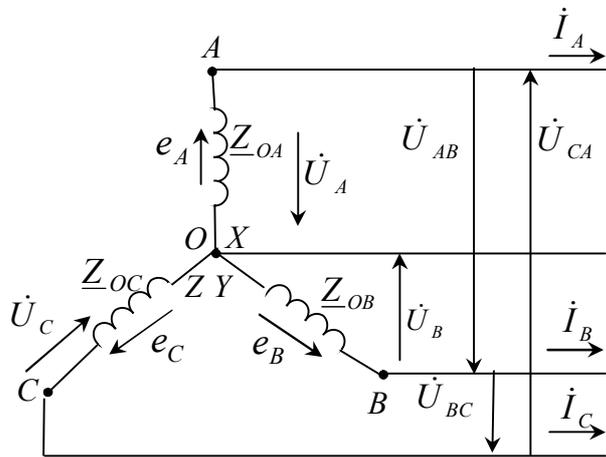
При соединении фаз источника треугольником (рисунок 3, б) необходимо подключить конец каждой фазы к началу следующей, т. е. конец X первой фазы – с началом B второй фазы, конец Y второй фазы – с началом C третьей фазы и конец третьей фазы X – с началом A первой фазы. Начала фаз A ; B ; C с помощью проводов соединяют с приемниками. При соединении фаз источника треугольником создается замкнутый контур, в котором при отключенных приемниках, может возникнуть ток короткого замыкания, однако этого не происходит, так как в симметричной трехфазной системе сумма мгновенных значений ЭДС равна $e_A + e_B + e_C = 0$. Следовательно, при холостом ходе источника ток в его фазах не возникает.

Трехфазные приемники могут быть соединены как звездой, так и треугольником. Если нагрузка несимметричная, т. е. сопротивления фаз приемника не равны между собой, то при соединении источника и приемников звездой необходимо применять помимо трёх линейных проводов четвертый, нейтральный провод, соединяющий нейтральные точки O и O' источника и приемника.

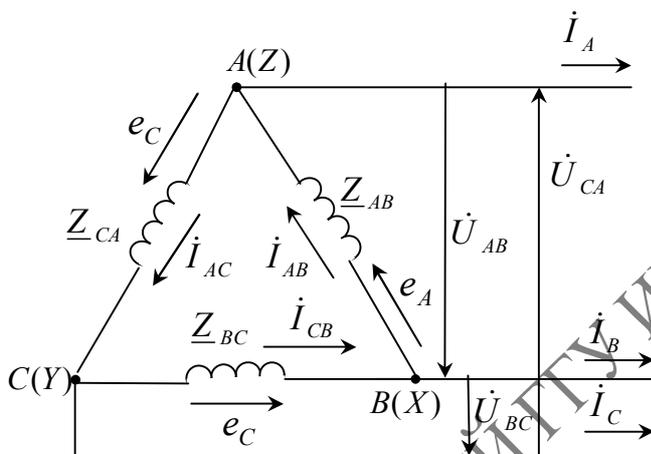
Напряжение между началом и концом фазы источника называют фазным. Например, при соединении звездой фазными являются напряжения между началами фаз и нейтральной точкой источника O (рисунок 3, а).

Фазными токами называются токи, проходящие через каждую фазу источника или приемника. Напряжения между началами A ; B ; C фаз источника или между линейными проводами называются линейными напряжениями, а токи в линейных проводах – линейными токами.

При анализе трехфазных цепей важно знать условные положительные направления ЭДС, напряжений и токов, т. к. от их выбора зависят знаки в уравнениях, составляемых по правилам Кирхгофа, а также направления векторов на векторных диаграммах. За условное положительное направление ЭДС в каждой фазе источника принимают направление от её конца к началу, а за условное положительное направление напряжения в каждой фазе источника принимают направление от начала фазы к её концу. Направление же фазных токов совпадает с направлением ЭДС в каждой фазе источника (рисунок 3).



а)



б)

Рисунок 3 – Схемы соединения фаз источника звездой (а) и треугольником (б)

За условные положительные направления линейных напряжений принимают направление от начала одной фазы к началу другой, в частности, напряжение U_{AB} направлено от A к B . Линейные токи, проходящие через линейные провода, всегда направлены от источника к приемнику. Фазные напряжения и токи приемников направлены в одну и ту же сторону.

Согласно второму правилу Кирхгофа, ЭДС фазы AO при соединении звездой $\dot{E}_A = \dot{I}_A Z_{OA} + \dot{U}_A$, откуда $\dot{U}_A = \dot{E}_A - \dot{I}_A Z_{OA}$, где Z_{OA} – внутреннее сопротивление фазы A источника. Аналогично находят напряжения в двух других фазах $\dot{U}_B = \dot{E}_B - \dot{I}_B Z_{OB}$; $\dot{U}_C = \dot{E}_C - \dot{I}_C Z_{OC}$, где Z_{OB} – внутреннее сопротивление фазы B источника, Z_{OC} – внутреннее сопротивление фазы C источника.

На практике приемники подключают не к отдельному источнику, а к сети, питающейся от системы параллельно работающих генераторов. Поэтому обычно пренебрегают внутренним сопротивлением фаз источников и считают фазные ЭДС равными фазным напряжениям.

Чтобы найти связь между фазными и линейными напряжениями, при соединении источников ЭДС звездой согласно с выбранными условными положительными направлениями фазных и линейных напряжений по второму правилу Кирхгофа можно записать следующие соотношения:

$$\dot{U}_{AB} + \dot{U}_B - \dot{U}_A = 0; \quad \dot{U}_{BC} + \dot{U}_C - \dot{U}_B = 0; \quad \dot{U}_{CA} + \dot{U}_A - \dot{U}_C = 0,$$

Откуда

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (5)$$

Для симметричных источников

$$\dot{U}_A = \dot{U}_B = \dot{U}_C = \dot{U}_\phi; \quad \dot{U}_{AB} = \dot{U}_{BC} = \dot{U}_{CA} = \dot{U}_L.$$

Если принять потенциал нейтральной точки источника $\varphi_0 = 0$, то потенциалы начала его фаз будут равны фазным напряжениям:

$$\dot{U}_A = \varphi_A - \varphi_0 = \varphi_A; \quad \dot{U}_B = \varphi_B - \varphi_0 = \varphi_B; \quad \dot{U}_C = \varphi_C - \varphi_0 = \varphi_C,$$

а линейные напряжения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{AB} &= \varphi_A - \varphi_B = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \\ \dot{U}_{BC} &= \varphi_B - \varphi_C = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \\ \dot{U}_{CA} &= \varphi_C - \varphi_A = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \end{aligned} \quad (6)$$

По соотношениям (5), зная значения фазных напряжений, можно построить векторные диаграммы фазных и линейных напряжений источника при соединении его фаз звездой (рисунок 4), которые будут представлять собой симметричную систему векторов, так как система фазных и линейных напряжений трехфазных генераторов, питающих электрическую сеть, вследствие их конструктивных особенностей симметрична.

Векторная диаграмма, представленная на рисунке 4, а) соответствует симметричной системе фазных и линейных напряжений при соединении источников звездой.

Векторную диаграмму фазных и линейных напряжений источника при соединении звездой можно представить, и как показано на рисунке 4, б), где линейные напряжения изображены векторами, соединяющими соответствующие векторы фазных напряжений.

Из векторных диаграмм можно получить соотношение, связывающее между собой фазные и линейные напряжения симметричного источника при соединении звездой. Так для фазы A линейное напряжение равно $\dot{U}_{AB} = 2U_A \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_A$. В общем случае при соединении фаз симметричного источника звездой связь между линейными и фазными напряжениями описывается выражением $U_L = \sqrt{3} U_\phi$.

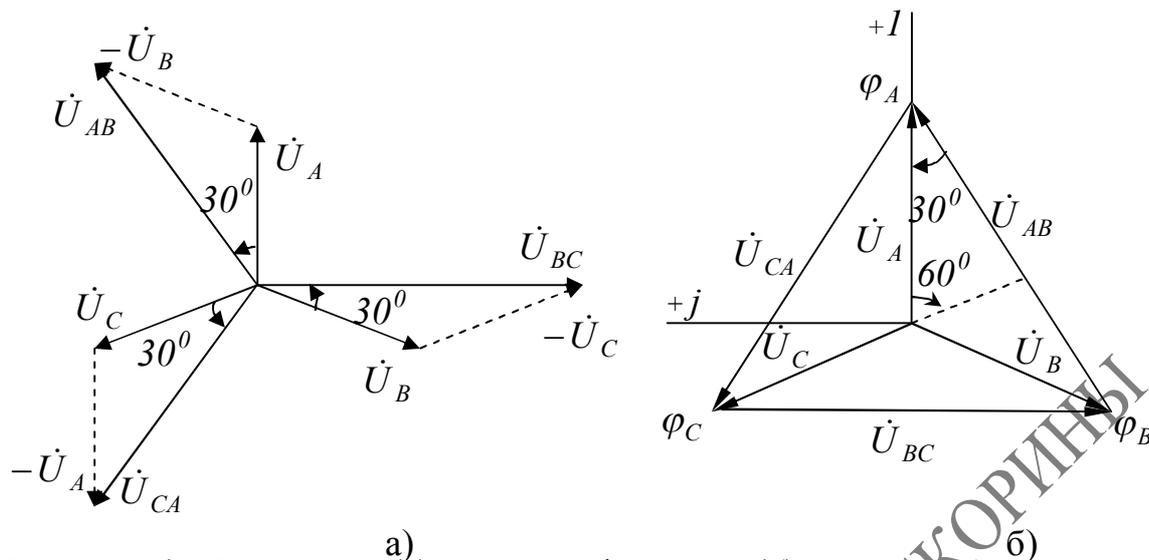


Рисунок 4 – Векторная (а) и топографическая (б) диаграммы напряжений трехфазного источника при соединении его фаз звездой

Следует отметить, что в практике эксплуатации синхронных генераторов фазы их трехфазных обмоток соединяют только звездой, так как при отклонении ЭДС источника от синусоидальной формы из-за наличия высших гармоник сумма мгновенных значений ЭДС не будет равна нулю. При соединении фаз синхронного генератора треугольником при холостом ходе в его обмотках будут возникать токи, которые будут вызывать их нагревание и снижение КПД генератора. Из рисунка 3, б) видно, что при соединении фаз источника треугольником линейные напряжения равны фазным $U_{л} = U_{\phi}$.

Итак, независимо от способа соединения фаз источника линейные напряжения между линейными проводами трехфазной цепи одинаковы и сдвинуты по фазе относительно друг друга на угол $\frac{2\pi}{3}$, вследствие чего сумма их мгновенных значений или векторов всегда равна нулю. Однако значение линейных напряжений при соединении фаз источника треугольником будут в $\sqrt{3}$ раз меньше, чем значения линейных напряжений при соединении фаз того же источника звездой.

Лекция 9

Раздел 3 Трёхфазные цепи

Тема 2 Трёхфазные цепи при соединении приемников звездой и треугольником

Трёхфазные цепи при соединении приемников звездой

Нагрузка симметричная. В этом случае концы фаз приемника соединены в общий узел o' , а концы фаз генератора соединены в общий узел o . Если узлы o и o' соединить проводом, называемым нейтральным, с сопротивлением $\underline{Z}_{oo'}$, то получим четырехпроводную цепь (рисунок 5, а). Сопротивления проводов, связывающих источник с нагрузкой, можно учесть в сопротивлениях нагрузки $\underline{Z}_a; \underline{Z}_b; \underline{Z}_c$.

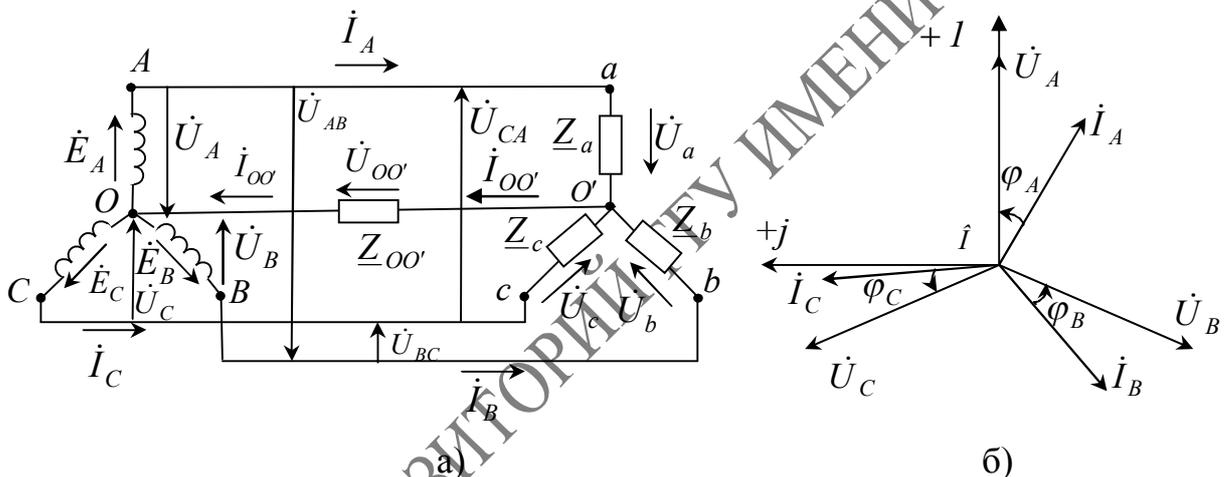


Рисунок 5 – Схема четырехпроводной трехфазной цепи (а) и векторная диаграмма (б) напряжений и токов симметричного приемника, соединенного звездой

Так как при соединении звездой фазы генератора соединены последовательно с фазами нагрузки, линейные токи одновременно являются и фазными токами, как в фазах генератора, так и фазах нагрузки $I_l = I_\phi$.

За условные положительные направления линейных токов $\dot{I}_A; \dot{I}_B; \dot{I}_C$ принимают направления от источника к нагрузке, а за положительное направление тока в нейтральном проводе – от нагрузки к источнику.

Согласно первому правилу Кирхгофа, ток в нейтральном проводе равен

$$\dot{I}_{oo'} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C .$$

При симметричной нагрузке напряжения $\dot{U}_a = \dot{U}_b = \dot{U}_c$ и сопротивления $\underline{Z}_a = \underline{Z}_b = \underline{Z}_c$, поэтому токи в фазах приемника равны по значению и

сдвинуты по фазе на один и тот же угол относительно соответствующих напряжений, т. е. на угол $\varphi_A = \varphi_B = \varphi_C = \varphi$. Векторная диаграмма напряжений и токов для симметричной нагрузки представлена на рисунок 5, б). Из диаграммы видно, что ток в нейтральном проводе равен нулю $\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0$. Таким образом, если нагрузка симметричная (равномерная), то необходимость в нейтральном проводе отпадает. Трехфазная цепь без нейтрального провода является трехпроводной цепью.

Рассмотрим четырехпроводную цепь более подробно. Найдем для этой цепи напряжение между нейтральными точками 0 и $0'$ или смещение нейтрали по методу двух узлов

$$\dot{U}_{00'} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_a + \dot{U}_B \underline{Y}_b + \dot{U}_C \underline{Y}_c}{\underline{Y}_a + \underline{Y}_b + \underline{Y}_c + \underline{Y}_{00'}}, \quad (4.10)$$

где $\dot{U}_A = U_A$; $\dot{U}_B = U_A e^{-j120^\circ}$; $\dot{U}_C = U_A e^{j120^\circ}$; $\underline{Y}_a = \frac{1}{\underline{Z}_a}$; $\underline{Y}_b = \frac{1}{\underline{Z}_b}$; $\underline{Y}_c = \frac{1}{\underline{Z}_c}$ —

комплексные проводимости фаз приемника; $\underline{Y}_{00'} = \frac{1}{\underline{Z}_{00'}}$ — комплексная про-

водимость нейтрального провода. Так как при симметричной нагрузке $\underline{Y}_a = \underline{Y}_b = \underline{Y}_c$, то (4.10) можно переписать в виде

$$\dot{U}_{00'} = \frac{\underline{Y}_a (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{3\underline{Y}_a + \underline{Y}_{00'}}. \quad (4.11)$$

Для случая симметричной нагрузки имеем $\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c = 0$, а значит $\dot{U}_{00'} = 0$. Так как ток в нейтральном проводе $\dot{I}_{00'} = \frac{\dot{U}_{00'}}{\underline{Z}_{00'}}$, то при симметричной нагрузке $\dot{I}_{00'} = 0$.

Согласно второму правилу Кирхгофа, для контуров (рисунок 5, а) $OAaO'O$; $OBbO'O$; $OCcO'O$ находим

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A - \dot{U}_{00'}; \dot{U}_b = \dot{U}_B - \dot{U}_{00'}; \dot{U}_c = \dot{U}_C - \dot{U}_{00'}. \quad (12)$$

Так как, при симметричной нагрузке $\dot{U}_{00'} = 0$, то из (12) следует, что

$$\dot{U}_a = \dot{U}_A; \dot{U}_b = \dot{U}_B; \dot{U}_c = \dot{U}_C.$$

Итак, зная фазные напряжения и сопротивления нагрузки, находим токи в каждой фазе приемника

$$\dot{I}_a = \frac{\dot{U}_a}{\underline{Z}_a}; \dot{I}_b = \frac{\dot{U}_b}{\underline{Z}_b}; \dot{I}_c = \frac{\dot{U}_c}{\underline{Z}_c}. \quad (13)$$

Так как при симметричной нагрузке токи в фазах приемника равны, то достаточно определить ток только в одной из фаз трехфазной цепи.

Несимметричная нагрузка. Рассмотрим трехфазную цепь с несимметричным приемником, соединенным звездой, т. е. для которого $\underline{Z}_a \neq \underline{Z}_b \neq \underline{Z}_c$. В этом случае для анализа применяют четырехпроводные цепи. Так как напряжения на фазах приемника различны, то нарушается соот-

ношение между фазными и линейными напряжениями $U_{л} = \sqrt{3}U_{\phi}$, причем на одних фазах приемника напряжение становится большим, а на других – меньшим чем $\frac{U_{л}}{\sqrt{3}}$.

Наличие нейтрального провода в цепи с несимметричным приемником позволяет выравнять напряжение на фазах приемника и поддерживать их постоянными, равными фазным напряжениям источника $\frac{U_{л}}{\sqrt{3}}$, т. е. нейтральный провод обеспечивает симметрию фазных напряжений приемника. Иначе говоря, при наличии нейтрального провода, когда $Z_{OO'} = 0$, даже при несимметричном приемнике фазные напряжения равны друг другу и соблюдается соотношение между фазными и линейными напряжениями $U_{л} = \sqrt{3}U_{\phi}$.

Если сопротивления приемника несимметричны и нейтральный провод имеет конечное сопротивление $Z_{OO'}$, то напряжение $\dot{U}_{OO'}$ между нейтральными точками O и O' определяется по формуле (10), а напряжения на фазах нагрузки – по формулам (12). Тогда токи в схеме рисунка 5, а) запишутся как:

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \frac{\dot{U}_a}{Z_a} = (\dot{U}_A - \dot{U}_{OO'}) Y_a; & \dot{I}_B &= \frac{\dot{U}_b}{Z_b} = (\dot{U}_B - \dot{U}_{OO'}) Y_b; \\ \dot{I}_C &= \frac{\dot{U}_c}{Z_c} = (\dot{U}_C - \dot{U}_{OO'}) Y_c; & \dot{I}_{OO'} &= \frac{\dot{U}_{OO'}}{Z_{OO'}} = \dot{U}_{OO'} Y_{OO'} = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C. \end{aligned}$$

Если напряжения источника $\dot{U}_A; \dot{U}_B; \dot{U}_C$ образуют симметричную систему, то при отсутствии нейтрального провода и при $\dot{U}_{OO'} \neq 0$ напряжения на фазе нагрузки $\dot{U}_a; \dot{U}_b; \dot{U}_c$ несимметричны, что видно из векторной диаграммы, приведенной на рисунке 6. Особенностью этой диаграммы является то, что каждой точке электрической цепи $A; B; C; O; O'$ соответствует определенная точка на диаграмме.

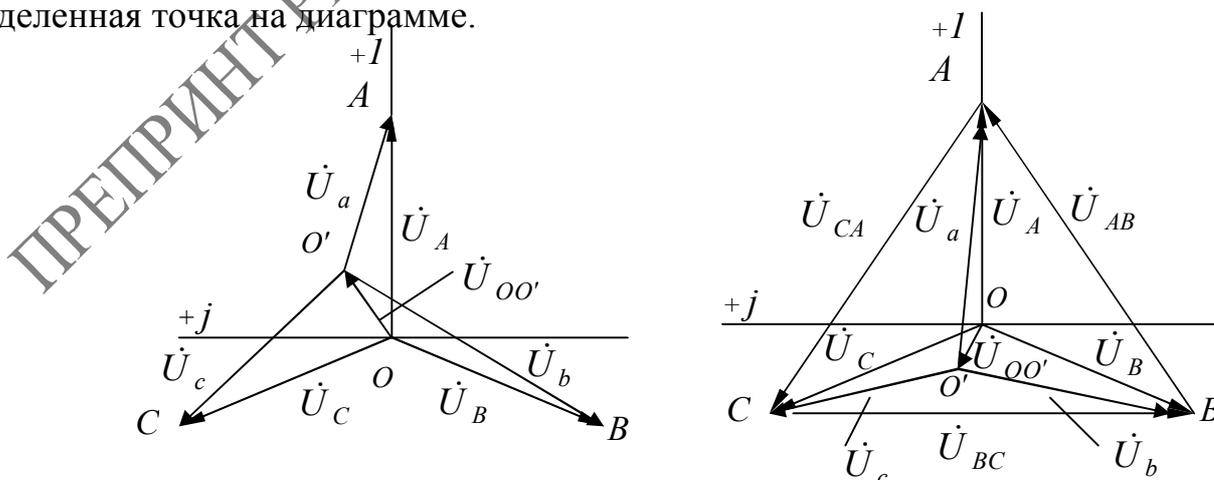


Рисунок 6 – Векторные диаграммы напряжений и токов несимметричного приемника, соединенного звездой

Напряжения на фазах нагрузки тем больше отличаются друг от друга, чем больше напряжение $\dot{U}_{OO'}$. Из выражения (10) и из рисунка 6 видно, что напряжение между нейтральными точками $\dot{U}_{OO'}$ будет изменяться при изменении нагрузки в любой фазе, при этом с изменением $\dot{U}_{OO'}$ будет изменяться напряжение всех фаз приемника.

Чтобы напряжения на фазах приемника были одинаковыми, необходимо чтобы $\dot{U}_{OO'} = 0$, что может быть получено двумя способами. Во-первых, выравниванием сопротивлений в фазах приемника, т. е. чтобы $\underline{Y}_A = \underline{Y}_B = \underline{Y}_C = \underline{Y}_\phi$, а значит, согласно (4.10),

$$\dot{U}_{OO'} = \frac{\dot{U}_A \underline{Y}_A + \dot{U}_B \underline{Y}_B + \dot{U}_C \underline{Y}_C}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_{OO'}} = \frac{\underline{Y}_\phi (\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C)}{\underline{Y}_A + \underline{Y}_B + \underline{Y}_C + \underline{Y}_{OO'}} = 0,$$

так как $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$.

Во-вторых, если имеется нейтральный провод с сопротивлением $\underline{Z}_{OO'} = 0$, то напряжение $\dot{U}_{OO'}$ согласно (10), также принимает нулевое значение независимо от нагрузки фаз. Для этого случая построена векторная диаграмма (рисунок 7).

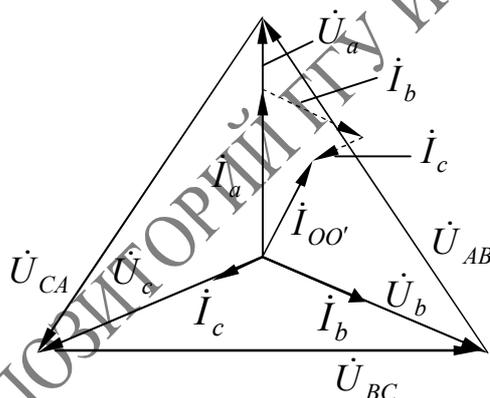


Рисунок 7 – Векторная диаграмма напряжений и токов несимметричного приемника, соединенного звездой при $\underline{Z}_{OO'} = 0$

При обрыве нейтрального провода и несимметричной нагрузке напряжение $\dot{U}_{OO'}$ станет максимальным. В фазах нагрузки могут возникнуть перенапряжения, поэтому в нейтральный провод плавкий предохранитель не ставят.

Трёхфазные цепи при соединении приемников треугольником

Симметричная нагрузка. Рассмотрим трёхфазную цепь при соединении симметричных приемников треугольником (рисунок 8).

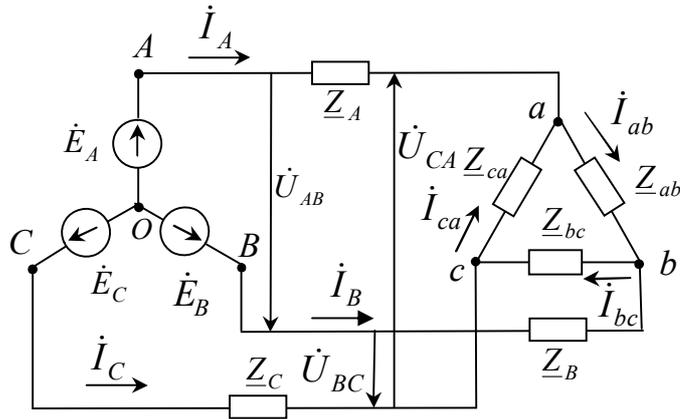


Рисунок 8 – Схема трехпроводной трехфазной цепи при соединении нагрузки треугольником

Если учесть сопротивление линейных проводов, то потенциалы вершин этого треугольника будут отличаться от потенциалов зажимов источника, поэтому зажимы трехфазного приемника обозначены a, b, c . Из схемы рисунка 8 видно, что каждая фаза приемника непосредственно подключена на линейное напряжение, т. е.

$$U_{\phi} = U_{л}. \quad (14)$$

Однако, при соединении треугольником, в отличие от соединения звездой фазные и линейные токи не равны между собой. У приемников условно принятые положительные направления линейных напряжений совпадают с условными положительными направлениями фазных токов. Применяя первое правило Кирхгофа к узловым точкам a, b, c , определяем линейные токи:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca}; \dot{I}_B = \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab}; \dot{I}_C = \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc}, \quad (15)$$

где $\dot{I}_A; \dot{I}_B; \dot{I}_C$ – линейные токи; $\dot{I}_{ab}; \dot{I}_{ca}; \dot{I}_{bc}$ – фазные токи.

Из (15) следует, что значения линейных токов $\dot{I}_A; \dot{I}_B; \dot{I}_C$ равны геометрической разности векторов соответствующих фазных токов.

Зная сопротивление фаз приемника, можно определить фазные токи по формулам:

$$\dot{I}_{ab} = \frac{\dot{U}_{ab}}{\underline{Z}_{ab}}; \dot{I}_{bc} = \frac{\dot{U}_{bc}}{\underline{Z}_{bc}}; \dot{I}_{ca} = \frac{\dot{U}_{ca}}{\underline{Z}_{ca}}. \quad (16)$$

Из уравнения (15) следует, что геометрическая сумма векторов линейных токов в трехпроводной цепи равна нулю:

$$\dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C = 0.$$

Так как при симметричной нагрузке комплексы полных сопротивлений фаз $\underline{Z}_{ab} = \underline{Z}_{bc} = \underline{Z}_{ca}$ и значения напряжений $\dot{U}_{ab} = \dot{U}_{bc} = \dot{U}_{ca}$ равны, то также равны между собой фазные токи и углы сдвига их фаз по отношению к соответствующим фазным напряжениям:

$$I_{ab} = I_{ca} = I_{bc} = I_{\phi}; \varphi_{ab} = \varphi_{bc} = \varphi_{ca} = \varphi.$$

На рисунке 9 изображена векторная диаграмма токов и напряжений при симметричной нагрузке, соединенной треугольником. Из векторной диаграммы видно, что фазные токи сдвинуты относительно друг друга на угол $\frac{2\pi}{3}$ и что линейные токи отстают от соответствующих фазных токов на угол $\frac{\pi}{6}$. Находим соотношение между линейным I_A и фазным I_{ab} токами: $I_A = 2I_{ab} \cos 30^\circ = \sqrt{3}I_{ab}$. Такое же соотношение будет между другими линейными и фазными токами. При симметричной нагрузке линейные токи в $\sqrt{3}$ раз больше фазных токов $I_L = \sqrt{3}I_{\phi}$.

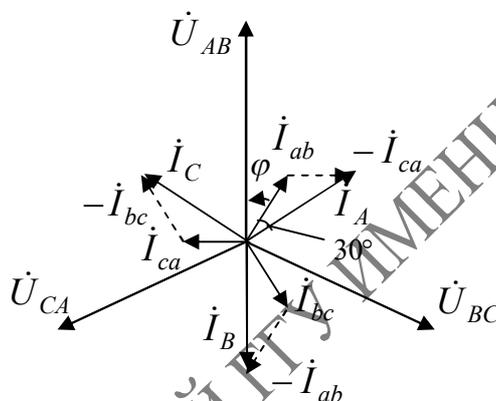


Рисунок 9 – Векторная диаграмма токов и напряжений при симметричной нагрузке, соединенной треугольником

Несимметричная нагрузка. Несимметричной нагрузку в общем случае считают, когда сопротивление фаз $Z_{ab} \neq Z_{bc} \neq Z_{ca}$. Однако нагрузка несимметрична и в том случае, когда сопротивление хотя бы одной из фаз не равно сопротивлениям других фаз. При несимметричной нагрузке фазные токи, углы сдвига фаз между фазными токами и напряжениями, а также линейные токи различные. При этом фазные токи определяют, как и при симметричной нагрузке, по формулам (16), а линейные токи по формулам (15).

Линейные токи можно определить и графическим способом, построив векторную диаграмму напряжений и токов (рисунок 10). Построение векторов линейных токов на диаграмме производится в соответствии с выражениями (15).

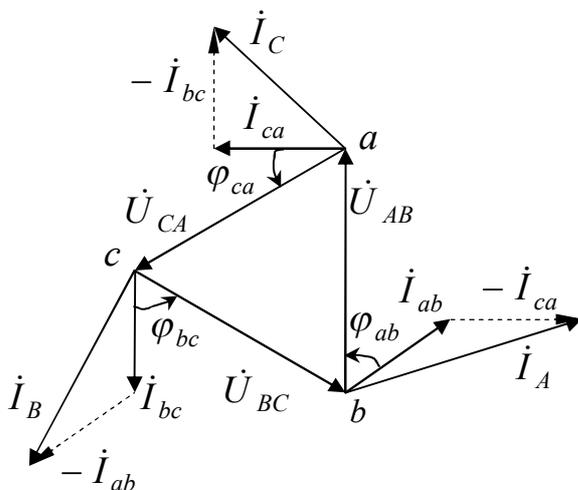


Рисунок 10 – Топографическая диаграмма напряжений и векторная диаграмма токов при нагрузке соединенной треугольником

Необходимо отметить, что, согласно (15), геометрическая сумма векторов линейных токов в трехфазной цепи при несимметричной нагрузке, соединенных треугольником, также как и при симметричной нагрузке, равна нулю.

Если пренебречь сопротивлением линейных проводов, то напряжения фаз приемника будут равны напряжениям источника. В этом случае фазы приемника независимы друг от друга, т. е. изменение сопротивления в какой-либо одной фазе приемника вызывает изменение тока этой фазы и токов в двух линейных проводах, соединенных с этой фазой, но никак не отражается на токах других фаз. Если же сопротивления линейных проводов не равны нулю, то из-за падения напряжения в них при соединении треугольником не обеспечивается независимость фаз. Например, изменение сопротивления фазы ab вызовет изменение фазного тока \dot{I}_{ab} , а, следовательно, и линейных токов \dot{I}_A и \dot{I}_B . При этом происходит падение напряжения в линейных проводах A и B , что при неизменных линейных напряжениях на зажимах генератора вызывает изменение напряжений на всех трех фазах приемника, так как потенциалы узлов a и b изменяются, то изменяются также токи \dot{I}_{bc} и \dot{I}_{ca} в тех фазах, сопротивление которых оставалось неизменным. Следует отметить, что при расчетах трехфазных цепей считают, что генераторы имеют симметричную систему напряжений.

Несимметрия нагрузки практически не влияет на систему напряжений фаз генератора в том случае, если мощность нагрузки очень мала по сравнению с мощностью генераторов (или сети электроснабжения), т. е. тогда, когда рассматривается система с источником бесконечно большой мощности.

Мощность трехфазных цепей

Трехфазную цепь можно рассматривать как цепь однофазного синусоидального тока с тремя источниками энергии, поэтому комплекс полной мощности трехфазной цепи можно записать в виде

$$\tilde{S} = \dot{U}_A \dot{I}_A^* + \dot{U}_B \dot{I}_B^* + \dot{U}_C \dot{I}_C^* = P + jQ, \quad (17)$$

где P – активная мощность трехфазной цепи

$$P = U_A I_A \cos \varphi_A + U_B I_B \cos \varphi_B + U_C I_C \cos \varphi_C = P_A + P_B + P_C, \quad (18)$$

а Q – реактивная мощность трехфазной цепи

$$Q = U_A I_A \sin \varphi_A + U_B I_B \sin \varphi_B + U_C I_C \sin \varphi_C = Q_A + Q_B + Q_C. \quad (19)$$

По формулам (18) и (19) можно подсчитать мощность в трехфазной цепи при несимметричной нагрузке, соединенной звездой.

Активная и реактивная мощности при симметричной нагрузке

$$P = 3P_\phi = 3I_\phi U_\phi \cos \varphi_\phi; \quad Q = 3Q_\phi = 3I_\phi U_\phi \sin \varphi_\phi.$$

Полная мощность при симметричной нагрузке

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3\sqrt{P_\phi^2 + Q_\phi^2} = 3S_\phi = 3U_\phi I_\phi.$$

Обычно в качестве паспортных данных для трехфазных приемников приняты линейные напряжения и токи. Поэтому мощности трехфазных приемников целесообразно выражать через линейные напряжения и токи. Обычно при таком условии индекс «л» у линейного напряжения и тока не указывают.

Так как при соединении симметричной нагрузки треугольником $U_\phi = U_L = U$ и $I_\phi = \frac{I_L}{\sqrt{3}} = \frac{I}{\sqrt{3}}$, а при соединении симметричной нагрузки

звездой $U_\phi = \frac{U_L}{\sqrt{3}} = \frac{U}{\sqrt{3}}$ и $I_\phi = I_L = I$, то независимо от схемы соединения

фаз приемника произведение $U_\phi I_\phi = \frac{UI}{\sqrt{3}}$ оказывается одинаковым. Таким

образом, независимо от схемы соединения симметричной нагрузки имеет место следующие выражения для мощностей:

$$P = \sqrt{3} UI \cos \varphi; \quad Q = \sqrt{3} UI \sin \varphi; \quad S = \sqrt{3} UI.$$

Индекс «ф» у угла сдвига фаз φ между фазным напряжением и током также опускают.

ЛИТЕРАТУРА

ОСНОВНАЯ

- 1 Атабеков, Г.И. Теоретические основы электротехники: в 3ч. Ч.1: Линейные электрические цепи. / Г.И. Атабеков. – 5-е изд. – М.: Энергия, 1978.
- 2 Электротехника / под ред. Герасимова В.Г. – М.: Высшая школа, 1985
- 3 Каплянский, А.Е. Теоретические основы электротехники: учеб. пособие / А.Е. Каплянский, А.П. Лысенко, Л.С. Полотовский; под ред. А.Е. Каплянского. – М.: «Высшая школа», 1972.
- 4 Морозов, А.Г. Электротехника, электроника и импульсная техника: учеб. пособие / А.Г. Морозов. – М.: Высшая школа, 1987.
- 5 Бессонов, Л.А. Теоретические основы электротехники: в 2ч. Ч. 1: Теоретические основы электротехники. / Л.А. Бессонов. – М.: Радио, 1973.
- 6 Иванов – Цыганов, А.И. Электротехнические устройства радиосистем. / А.И. Иванов – Цыганов. – М.: Высшая школа, 1979.
- 7 Сборник задач по электротехнике и основам электроники / под ред. В. Г. Герасимова. – М.: Высшая школа, 1987.
- 8 Шебес, М.Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. / М.Р. Шебес. – М.: Высшая школа, 1989.
- 9 Сборник задач по общей электротехнике / под ред. В.С. Пантюшина. – М.: Высшая школа, 1973.
- 10 Сборник задач по теоретическим основам электротехники / под ред. Л. А. Бессонова. – М.: Высшая школа, 1980.

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ

- 1 Бокалов, В.П. Основы теории электрических цепей и электроники / В.П. Бокалов. – М.: Радио и связь, 1989.
- 2 Молчанов, А.П. Курс электротехники и радиоэлектроники / А.П. Молчанов, П. Н. Западворов. – изд. 3-е – М.: Наука, 1976.
- 3 Касаткин, А.С. Электротехника / А.С. Касаткин, М. В. Немцов. – М.: Энергоатомиздат, 1983.
- 4 Веселовский, О.Н. Основы электротехники и электротехнические устройства радиоэлектронной аппаратуры: учеб. пособие для вузов / О.Н. Веселовский, Л.М. Браславский Л.М. – М.: Высшая школа, 1977.
- 5 Электротехника: учеб. для вузов / Х. Э. Зайдель [и др.] – 3-е изд. – М.: Высшая школа, 1985.
- 6 Теоретические основы электротехники: в 3 т. 1 т.: Теоретические основы электротехники. / К. С. Демирчян [и др.] – учеб. для вузов – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2004.
- 7 Теоретические основы электротехники: в 3 т. т.2: Теоретические основы электротехники. / К. С. Демирчян [и др.] – учеб. для вузов – 4-е изд. – СПб.: Питер, 2004.
- 8 Зайцев, И.А. Задачник по теоретическим основам электротехники. / И.А. Зайцев, А.Г. Лурье – Львов, 1960.

9 Задачник программируемых задач по теоретическим основам электротехники / под ред. Н.Г. Максимовича, И.Б. Куделько – Львов, 1976.

10 Мелузин, Г. Примеры и задачи по электротехнике. / Г. Мелузин; под редакцией Б. Я. Жуховицкого. – М.: Энергия, 1979.

ПРЕПРИНТ РЕПОЗИТОРИЙ ГТУ ИМЕНИ Ф.СКОРИНЫ