Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
«Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

Т. В. БОРОДИЧ

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
# БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Практическое руководство
для студентов физических специальностей вуза

Гомель
ГГУ им. Ф. Скорины
2017

УДК 512 : 514.123.1(076)
ББК 22.1 я73
Б937

Рецензенты:

доктор физико-математических наук В. М. Селькин,
кандидат физико-математических наук М. В. Задорожнюк

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом
учреждения образования «Гомельский государственный университет
имени Франциска Скорины»

**Бородич, Т. В.**

Б937 Системы линейных уравнений. Билинейные и квадратичные формы : практическое руководство / Т. В. Бородич ; М-во образования Республики Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2017. – 47 с.

ISBN 978-985-577-261-4

В практическом руководстве рассматриваются теоретические аспекты систем линейных уравнений и методы их решений, а также описаны билинейные и квадратичные формы : квадратные системы линейных уравнений, общие методы решения систем линейных уравнений, однородные системы линейных уравнений, скалярное произведение в линейном пространстве, ортонормированный базис в евклидовом пространстве, квадратичные функции на линейном пространстве, исследование квадратичных функций. Даются примеры, задания, вопросы для самостоятельного изучения и самоконтроля.

Адресовано студентам физических специальностей вуза.

**УДК 512 : 514.123.1(076)**
**ББК 22.1 я73**

**ISBN 978-985-577-261-4**

# Оглавление

# Предисловие

Курс **«Аналитическая геометрия и линейная алгебра»** занимает важное место в математическом образовании студентов физического факультета. ***Математические методы аналитической геометрии и линейной алгебры лежат в основе классической механики, теории тяготения, теории света, физических полей, гидро- и аэродинамики, акустики и всех других направлений исследования в области физики.*** Математические методы позволяют получить количественные характеристики физических явлений, рассчитать с заданной точностью ход реальных процессов, проникнуть в суть закономерностей физических явлений, предсказать новые эффекты.

Аналитическая геометрия – это способ решения геометрических задач аналитическими, то есть алгебраическими методами. Это означает, что вместо рисования чертежа и изучения составляющих его геометрических объектов пишутся формулы. Аналитическая геометрия легко справляется с задачами в пространствах любой размерности, в то время как геометрические методы решения в этом случае или очень сложны, или просто невозможны.

Методы аналитической геометрии и линейной алгебры применяются в качестве аппарата и инструмента исследования физических явлений. *Современный физик должен иметь широкую и глубокую математическую подготовку, хорошо владеть новейшими математическими методами исследования*, которые могут применяться в области его деятельности.

# 1 Квадратные системы линейных уравнений

## 1.1 Основные понятия теории систем линейных уравнений

Совокупность уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.1}$$

называется *системой $m$ линейных уравнений с $n$ неизвестными* $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Числа $a_{ij}$ называются *коэффициентами системы,* а числа $b_i$ – *свободными членами*.

*Решением системы* (1.1) называется совокупность чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$, при подстановке которых в систему (1.1) вместо $x_1, x_2, \ldots, x_n$, получаем верные числовые равенства.

*Решить систему* – значит найти все её решения или доказать, что их нет.

### Виды систем линейных уравнений

Система линейных алгебраических уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. В противном случае система называется *несовместной*.

**Пример 1.1.** Система является совместной, так как она имеет по крайней мере одно решение $x = 0$, $y = 3$.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6, \\ 5x + y = 3. \end{cases}$$

**Пример 1.2.** Система является несовместной, так как выражения стоящие в левых частях уравнений системы равны, но правые части не равны друг другу. Ни для каких наборов $\{x, y\}$ это не выполняется.

$$\begin{cases} 5x + y = -6, \\ 5x + y = 3. \end{cases}$$

Система (1.1) называется *определенной*, если она совместна и имеет единственное решение. В противном случае (то есть если система совместна и имеет более одного решения) система называется *неопределенной*.

Когда уравнений больше, чем неизвестных, система называется *переопределенной*.

Система называется *однородной*, если все правые части (свободные члены) уравнений, входящие в нее, равны нулю одновременно.

**Пример 1.3.** Система является однородной, так как свободные члены равны нулю.

$$\begin{cases} x - y + z - 4l = 0, \\ 5x + y + l = 0. \end{cases}$$

Система называется *квадратной*, если количество уравнений равно количеству неизвестных.

**Пример 1.4.** Система является квадратной, поскольку в ней две неизвестные и их число совпадает с числом уравнений системы.

$$\begin{cases} 3x - 2y = -6, \\ 5x + y = 3. \end{cases}$$

## 1.2 Матричная форма системы линейных уравнений

Матрица, составленная из коэффициентов системы (1.1) при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}....a_{1n} \\ a_{21}a_{22}....a_{2n} \\ ................ \\ a_{m1}a_{m2}...a_{mn} \end{pmatrix},$$

называется матрицей системы (1.1).

Обозначим через $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}$ соответственно столбец неизвестных и столбец свободных членов, тогда систему (1.1) можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$.

## 1.3 Основная и расширенная матрицы системы

Матрица системы $A$ называется основной матрицей системы. Если к основной матрице системы $A$ добавить столбец свободных членов, то получим матрицу, которую называют *расширенной матрицей системы* (1.1) $\overline{A} = (A \mid B)$

$$
\overline{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).
$$

## 1.4 Теорема Крамера для квадратных линейных систем

Система линейных уравнений называется *крамеровской,* если число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы отличен от нуля. (Другими словами, крамеровская система – это квадратная система с ненулевым определителем матрицы системы)

**Теорема 1.1.** Крамеровская система имеет единственное решение, которое находится по формулам:

$$
x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, ..., x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta},
$$

где $\Delta$ – определитель матрицы системы,

$\Delta x_i$ – определитель, полученный из $\Delta$, заменой столбца коэффициентов при $x_i$ на столбец свободных членов.

$\triangleleft$ Пусть дана крамеровская система

$$
\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ ...................................... \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \tag{1.2}
$$

Тогда ее определитель отличен от нуля:

$$
|A| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.
$$

Так как $|A| \neq 0$, то матрица системы $A$ имеет обратную матрицу $A^{-1}$. Запишем крамеровскую систему (1.2) в матричном виде

$$
AX = B, \tag{1.3}
$$

где

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\dots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\dots a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}a_{n2}\dots a_{nn} \end{pmatrix},\ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Умножим обе части матричного уравнения (1.3) слева на $A^{-1}$:

$$A^{-1}(AX)=A^{-1}B,$$

Ввиду ассоциативности умножения матриц имеем

$$A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=E_nX=X.$$

Таким образом,

$$X=A^{-1}B \text{ – \textit{решение системы.}}$$

1) Покажем, что такое решение единственно. Предположим, что $X_1$ и $X_2$ – два решения матричного уравнения (1.3). Тогда $AX_1=B$ и $AX_2=B$, откуда $AX_1=AX_2$. Умножая обе чисти равенства на $A^{-1}$ слева, имеем

$$A^{-1}(AX_1)=A^{-1}(AX_2),$$
$$(A^{-1}A)X_1=(A^{-1}A)X_2,$$
$$E_nX_1=E_nX_2,$$
$$X_1=X_2.$$

Следовательно, система (1.2) имеет единственное решение.

2) Найдём решение системы (1.2). Из равенства $X=A^{-1}B$ имеем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

откуда

$$x_1=\frac{1}{\Delta}(A_{11}b_1+A_{21}b_2+\dots+A_{n1}b_n)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$x_2=\frac{1}{\Delta}(A_{12}b_1+A_{22}b_2+\dots+A_{n2}b_n)=\frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

и так далее

$$x_n = \frac{1}{\Delta}(A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \ldots + A_{nn}b_n) = \frac{1}{\Delta}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

Обозначая определители в правой части равенств $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ соответственно, получим формулы $x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}$. ▷

## 1.5 Вычислительные процедуры решения квадратных систем линейных уравнений

Пусть дана крамеровская система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

1) Составляем матрицу системы и вычисляем ее определитель:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12}\ldots a_{1n} \\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}a_{n2}\ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \ |\mathrm{A}| = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Если $\Delta \neq 0$, то система совместна, в противном случае – несовместна.

2) Для совместной системы находим дополнительные определители $\Delta x_i$, полученный из $\Delta$, заменой столбца коэффициентов при $x_i$ на столбец свободных членов:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_n & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ \Delta x_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \text{ и т. д. } \Delta x_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & b_n \end{vmatrix}.$$

3) Находим решение системы по *формулам Крамера*:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta}, \ldots, \ x_n = \frac{\Delta x_n}{\Delta}.$$

**Пример 1.5.** Решить систему уравнений по правилу Крамера

$$\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 3x - 5y + 3z = 1. \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

**Решение.** 1) Запишем матрицу системы и столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы системы $|A| = \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -29$. Поскольку $\Delta = -29 \neq 0$ и число уравнений совпадает с числом неизвестных, тогда наша система уравнений является крамеровской и к ней применимо правило Крамера.

2) Найдем определители $\Delta x_i$, полученные из определителя $\Delta$, заменой столбца коэффициентов при переменной $x_i$ на столбец свободных членов.

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -29,\ \Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -29,\ \Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & -5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = -29.$$

3) Находим решение системы по формулам Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1,\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-29}{-29} = 1.$$

**Ответ:** $x_1 = 1,\ x_2 = 1,\ x_3 = 1$, ответ также можно записать тройкой (1, 1, 1).

## 1.6 Матричный метод решения систем линейных уравнений

Матричный метод применяется для решения крамеровских систем. Основан он на равенстве

$$X = A^{-1}B,$$

которое получили при доказательстве теоремы 1.1.

**Пример 1.6.** Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}.$$

**Решение:** 1) Запишем матрицу системы и столбец свободных членов: $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 11\end{pmatrix}$. Найдем определитель матрицы системы $|A|=\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -4 & 2\end{vmatrix}=-25$. Поскольку $|A|=-25\neq 0$ и число уравнений совпадает с числом неизвестных, тогда наша система уравнений является крамеровской и ее можем решить матричным методом.

2) Найдем обратную матрицу к матрице $A$ с помощью алгебраических дополнений $A^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}$, где $A_{ij}$ – алгебраические дополнения к элементу $x_{ij}$, которые находятся по формуле $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, где $M_{ij}$ – минор к элементу $x_{ij}$.

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1 & 1\\ -4 & 2\end{vmatrix}=2$, $A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-3$, $A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & -4\end{vmatrix}=-7$,

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -4 & 2\end{vmatrix}=-16$, $A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix}=-1$, $A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 1 & -4\end{vmatrix}=6$,

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}2 & 3\\ -1 & 1\end{vmatrix}=5$, $A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=5$, $A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-5$.

Таким образом, обратная матрица к матрице $A$ имеет вид:

$$A^{-1}=\frac{1}{-25}\begin{pmatrix}2 & -16 & 5\\ -3 & -1 & 5\\ -7 & 6 & -5\end{pmatrix}.$$

3) Найдем решение системы уравнений по формуле $X=A^{-1}B$, будем иметь

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{-25}\begin{pmatrix}2 & -16 & 5\\ -3 & -1 & 5\\ -7 & 6 & -5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\ 9\\ 11\end{pmatrix}=-\frac{1}{25}\begin{pmatrix}2\cdot 7+(-16)\cdot 9+5\cdot 11\\ (-3)\cdot 7+(-1)\cdot 9+5\cdot 11\\ (-7)\cdot 7+6\cdot 9+(-5)\cdot 11\end{pmatrix}=$$

$=-\dfrac{1}{25}\begin{pmatrix}-75\\ 25\\ -50\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ -1\\ 2\end{pmatrix}$. **Ответ**: $x_1=3$, $x_2=-1$, $x_3=2$ или тройка – (3, -1, 2).

## Вопросы для самоконтроля

1 Что называется системой линейных уравнений?

2 Что означает решить систему линейных уравнений?

3 Укажите виды систем линейных уравнений.

4 Укажите матричную форму системы линейных уравнений.

5 Что называется основной матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?

6 Сформулируйте теорему Крамера.

7 Для каких систем линейных уравнений применяется правило Крамера?

8 Опишите вычислительную процедуру решения квадратных систем.

9 В чем заключается матричный метод решения систем линейных уравнений?

# 2 Общие методы решения систем линейных уравнений

## 2.1 Метод Гаусса решения систем линейных уравнений

Метод Гаусса применяется для произвольной системы линейных уравнений.

Систему линейных уравнений будем называть *ступенчатой*, если матрица этой системы ступенчатая.

При решении системы линейных уравнений применим следующий *алгоритм:*

1. Записываем расширенную матрицу системы и приводим её к ступенчатому виду, определяем ранги матрицы и расширенной матрицы системы.

2. Если найденные ранги не равны, то система несовместна.

3. Ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы системы и равен числу $r$. В этом случае система совместна.

4. Используя ступенчатый вид расширенной матрицы системы, записываем соответствующую ступенчатую систему.

5. Если число $r$ равно числу неизвестных $n$, то ступенчатая система имеет вид

$$
\begin{cases}
c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n = l_1, \\
\qquad c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n = l_2, \\
\qquad \ldots \ \ldots. \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\
\qquad\qquad c_{nn}x_n = l_n.
\end{cases}
\tag{2.1}
$$

Из системы (2.1) последовательно находим значения для $x_1, x_2, ..., x_n$, начиная с последнего уравнения. В этом случае система уравнений имеет единственное решение.

6. Если число $r$ меньше числа неизвестных, то ступенчатая система имеет вид

$$
\begin{cases}
c_{i_1 1}x_1 + c_{i_1 2}x_2 + \ldots + c_{i_1 n}x_n = f_1 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_{i_r j_1}x_{j_1} + \ldots + c_{i_r j_k}x_{j_k} = f_r
\end{cases}
\tag{2.2}
$$

В системе (2.2) $r$ уравнений и $n$ неизвестных. Неизвестные $x_1, x_2, ..., x_{j_1}$, которые первыми встречаются в уравнениях системы (2.2), назовём *главными неизвестными*, остальные – *свободными неизвестными.* Из системы (2.2) последовательно выражаем главные неизвестные через свободные, начиная с последнего уравнения. Свободные неизвестные могут принимать любые значения. В этом случае система имеет бесконечно много решений. Тем самым получаем общее решение.

**Примеры 2.1.** Приведем примеры систем линейных уравнений, которые имеют одно решение, не имеют решений и имеют бесконечно много решений.

1) $\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \end{cases}$ Ответ: (2; -3; -1).

2) $\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 = 3 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \end{cases}$ Ответ: нет решений.

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 1 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 5 \end{cases}$ Ответ: бесконечно много решений.

## 2.2 Исследование систем линейных уравнений

Исследовать систему линейных уравнений – означает определить, какой является эта система – совместной или несовместной, и в случае её совместности выяснить, определённая эта система или неопределённая.

Критерий совместности системы линейных уравнений даёт теорема Кронекера-Капелли.

**Теорема 2.1** (*Кронекера-Капелли*). Для того, чтобы система линейных уравнений была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы ($rangA = rang\overline{A}$).

**Пример 2.2.** Исследовать систему на совместность:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 1 \end{cases}$$

**Решение.** Приведение матрицы системы и расширенной матрицы системы к ступенчатому виду будем выполнять одновременно:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[III+1\cdot(-2)]{II+I\cdot(-5)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 14 & -28 & -24 & 7 \\ 0 & 7 & -14 & -12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II+III\cdot(-2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 7 & -14 & -12 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{II \Leftrightarrow III} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & -14 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right).$$

Ранг матрицы системы равен 2, а ранг расширенной матрицы системы равен 3. По теореме Кронекера-Капелли система несовместна.

Для совместной системы линейных уравнений вопрос о её определённости или неопределённости решается с применением следующих теорем.

**Теорема 2.2.** Если ранг основной матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система является определённой.

**Теорема 2.3.** Если ранг основной матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то система является неопределённой.

Таким образом, из сформулированных теорем вытекает *способ исследования систем линейных алгебраических уравнений*.

Пусть $n$ – количество неизвестных, $rangA = r$, $rang\overline{A} = \overline{r}$. Тогда:

1) при $r \neq \overline{r}$ система несовместна;

2) при $r = \overline{r}$ система совместна, причём, если $r = \overline{r} = n$, система определённая; если же $r = \overline{r} < n$, система неопределённая.

*Базисным решением* неопределённой системы линейных уравнений называют такое её решение, в котором все свободные неизвестные равны нулю.

**Пример 2.3.** Исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 16x_3 - 6x_4 = 9, \\ -5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 = 9 \end{cases}$$

и в случае неопределённости системы найти её базисное решение.

**Решение.** Вычислим ранги основной $A$ и расширенной матриц $(A|B)$ данной системы уравнений, для чего приведём расширенную (а вместе с тем и основную) матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ -3 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 2 & -3 & 16 & -6 & 9 \\ -5 & 3 & 5 & 6 & 9 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{III+I\cdot(-2) \\ IV+I\cdot 5}]{II+I\cdot 3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \\ 0 & -2 & 20 & -4 & 14 \end{array}\right) \xrightarrow[IV+II\cdot(-2)]{III+II\cdot(-1)}$$

$$\longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Удалив третью и четвёртую строки, получим ступенчатую матрицу

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 10 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

Таким образом, $rangA = 2$, $rang\overline{A} = 2$. Следовательно, данная система линейных уравнений совместна, а поскольку величина ранга меньше числа неизвестных, система является неопределённой. Полученной в результате элементарных преобразований ступенчатой матрице соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 1, \\ \quad - x_2 + 10x_3 - 2x_4 = 7, \end{cases} \text{откуда находим} \begin{cases} x_1 = -6 + 7x_3, \\ x_2 = -7 + 10x_3 - 2x_4. \end{cases}$$

Неизвестные $x_1$ и $x_2$ являются главными, а неизвестные $x_3$ и $x_4$ – свободными.

Общее решение $(-6+7r, -7+10r-2s, r, s)$, где $r, s \in R$.

Придавая свободным неизвестным нулевые значения, получим базисное решение данной системы линейных уравнений:

$$x_1 = -6,\ x_2 = -7,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0.$$

## Вопросы для самоконтроля

1 Какая система называется ступенчатой?

2 Сформулируйте алгоритм решения систем линейных уравнений методом Гаусса.

3 Какие переменные в методе Гаусса называются главными неизвестными и свободными неизвестными? В каком случае они появляются?

4 Приведите примеры систем линейных уравнений, которые имеют одно решение, бесконечно много и не имеют решения.

5 Сформулируйте критерий совместности системы линейных уравнений.

6 Укажите способ исследования системы линейных уравнений на совместность.

7 Какое решение называется базисным?

# 3 Однородные системы линейных уравнений

## 3.1 Определение однородной системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется однородной, если она имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}. \quad (3.1)$$

Матричный вид однородной системы: $AX = 0$, где $A$ – матрица системы, $X$ – столбец неизвестных.

Однородная система всегда совместна, поскольку любая однородная линейная система имеет по крайней мере одно решение: $x_1 = 0, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0.$

Если однородная система имеет единственное решение, то это единственное решение – нулевое, и система называется *тривиально совместной.* Если же однородная система имеет более одного решения, то среди них есть и ненулевые и в этом случае система называется *нетривиально совместной*.

**Пример 3.1.** Нетривиальная совместность однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.

Применив к матрице системы алгоритм гауссова исключения, приведем матрицу системы к ступенчатому виду.

Ранг матрицы системы равен $r$ ($rangA = r$).

$$\begin{pmatrix} 1 & c_{12} & \dots & c_{1r} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & c_{2r} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & c_{rn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

**Теорема 3.1.** Пусть $c_1, c_2, ..., c_k$ – матрицы-столбцы решение системы (3.1). Тогда $c = \alpha_1 c_1 + \alpha_2 c_2 + ... + \alpha_k c_k$, ($\alpha_i \in R$) – решение системы (3.1).

Другими словами: если однородная система нетривиально совместна, то она имеет бесконечное множество решений, причем линейная комбинация любых решений системы тоже является ее решением.

## 3.2 Критерии существования ненулевых решений

**Теорема 3.2.** Для того чтобы система (3.1) была нетривиально совместной (при $m = n$), необходимо и достаточно, чтобы определитель матрицы системы был равен нулю.

**Теорема 3.3.** Для того чтобы система (3.1) имела нетривиальное (ненулевое) решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг системы (ранг основной матрицы системы) был меньше числа неизвестных.

**Следствие 3.1.** Любая система линейных однородных уравнений, в которой число уравнений меньше числа неизвестных, имеет нетривиальное решение.

**Следствие 3.2.** Для того чтобы система (3.1), в которой число уравнений равно числу неизвестных, имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы её определитель был равен нулю.

## 3.3 Фундаментальная система решений

*Фундаментальной системой решений* (ФСР) системы (3.1) называется линейно независимая система решений (матриц-столбцов), через которую линейно выражается любое решение (3.1).

**Теорема 3.4.** Пусть $r$ – ранг системы (3.1), $n$ – число её неизвестных и $r < n$. Тогда система (3.1) имеет бесконечное множество фундаментальных систем решений, причём каждая из них состоит из $(n - r)$ числа решений.

Другими словами: среди бесконечного множества решений однородной системы можно выделить ровно $(n - r)$ линейно независимых решений.

Совокупность $(n - r)$ линейно независимых решений однородной системы называется *фундаментальной системой решений.* Любое решение системы линейно выражается через фундаментальную систему.

Таким образом, если ранг $r$ матрицы $A$ однородной линейной системы $AX = 0$ меньше числа неизвестных $n$ и векторы $e_1, e_2, ..., e_{n-r}$ образуют ее фундаментальную систему решений ($Ae_i = 0$, $i = \overline{1, n-r}$), то любое решение $x$ системы $AX = 0$ можно записать в виде

$$x = c_1 e_1 + c_2 e_2 + ... + c_{n-r} e_{n-r},$$

где $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ – произвольные постоянные. Записанное выражение называется *общим решением* однородной системы.

*Исследовать однородную систему* – значит установить, является ли она нетривиально совместной, и если является, то найти фундаментальную систему решений и записать выражение для общего решения системы.

Исследуем однородную систему методом Гаусса.

Пусть матрица исследуемой однородной системы, имеет ранг меньше числа неизвестных, то есть $r < n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots. a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots. a_{2n} \\ \ldots. \ \ldots. \ldots. \ \ldots. \\ a_{m1}\, a_{m2} \ldots a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Такая матрица приводится Гауссовым исключением к следующему ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & c_{1r+1} & \cdots & c_{1n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & c_{2r+1} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{rr+1} & \cdots & c_{rn} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

Соответствующая эквивалентная система имеет вид

$$\begin{cases} x_1 + c_{1r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{1n}x_n = 0, \\ x_2 + c_{2r+1}x_{r+1} + \ldots + c_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_r + c_{nr+1}x_{r+1} + \ldots + c_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Отсюда легко получить выражения для переменных $x_1, x_2, \ldots, x_r$ через $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$.

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_r$ называют *базисными (главными) переменными,* а переменные $x_{r+1}, x_{r+2}, \ldots, x_n$ – *свободными переменными.*

Перенеся свободные переменные в правую часть, получим формулы, которые определяют общее решение системы.

$$\begin{cases} x_1 = -c_{1r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{1n}x_n, \\ x_2 = -c_{2r+1}x_{r+1} - \ldots - c_{2n}x_n, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_r = -c_{nr+1}x_{r+1} - \ldots - c_{nn}x_n. \end{cases}$$

Положим последовательно значения свободных переменных равными:

$$\begin{gathered} x_{r+1} = 1, x_{r+2} = 0, x_{r+3} = 0, \ldots, x_n = 0, \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 1, x_{r+3} = 0, \ldots, x_n = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ x_{r+1} = 0, x_{r+2} = 0, x_{r+3} = 0, \ldots, x_n = 1, \end{gathered}$$

и вычислим соответствующие значения базисных переменных. Полученные $n$-$r$ решений линейно независимы и, следовательно, образуют фундаментальную систему решений исследуемой однородной системы.

## 3.4 Вычислительный алгоритм нахождения фундаментальной системы решений

1. Берём любой отличный от нуля определитель $d$ порядка ($n$-$r$).
2. Свободным неизвестным поочерёдно придаются значения, равные элементам 1-го, 2-го и т. д. столбцов определителя $d$, и каждый раз из общего решения находят соответствующие значения главных неизвестных.
3. Полученные ($n$-$r$) решений составляют фундаментальную систему.

**Пример 3.2.** Найти ФСР однородной системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}.$$

**Решение.** Однородная система линейных алгебраических уравнений с помощью элементарных преобразований может быть приведена к ступенчатому виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_2 - 2x_4 = 0, \\ 0 = 0. \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 + 3x_4 - x_5, \\ x_2 = 2x_4. \end{cases}$$

где $x_1, x_2$ – главные переменные,

$x_3, x_4, x_5$ – свободные переменные.

Ранг $r$ матрицы равен 2, число $n$ неизвестных равно 5, система нетривиально совместна. *Размерность пространства решений* $d$ этой однородной системы равна 3:

$$d = n - r = 5 - 2 = 3.$$

Получили три линейно независимые решения системы $E_1$, $E_2$, $E_3$ (таблица 3.1).

Таблица 3.1

| Решение | Переменные | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ |
| $E_1$ | -1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| $E_2$ | 3 | 2 | 0 | 1 | 0 |
| $E_3$ | -1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

Или в виде матриц-столбцов:

$$E_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; E_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

которые образуют базис пространства решений системы, то есть образуют её *фундаментальную систему решений*.

## Вопросы для самоконтроля

1 Укажите, какие системы линейных уравнений называются однородными.

2 Сформулируйте критерии существования ненулевых решений однородных систем линейных уравнений.

3 Что называется фундаментальной системой решений?

4 Какое решение называется общим решение однородных систем линейных уравнений?

5 Опишите схему исследования однородной системы линейных уравнений.

6 Укажите вычислительный алгоритм нахождения фундаментальной системы решений.

# 4 Скалярное произведение в линейном пространстве

## 4.1 Аксиоматическое определение скалярного произведения векторов

Пусть $V$ – действительное линейное пространство. Говорят, что на $V$ задано скалярное произведение, если каждой паре векторов $a,b \in V$ поставлено в соответствие действительное число $(a,b)$, причем выполняются следующие аксиомы:

1) $(a,b)=(b,a)$ для любых $a,b \in V$;

2) $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$ для любых $a,b,c \in V$;

3) $(\alpha a,b)=\alpha(a,b)$ для любых $a,b \in V$ и любого $\alpha \in R$;

4) $(a,a)>0$ для любого ненулевого вектора $a \in V$.

Действительное линейное пространство с определенным на нем скалярным произведением называется *евклидовым пространством*. Приведем несколько важных примеров евклидовых пространств.

1. Скалярное произведение векторов на $V^3$ определим как произведение длин этих векторов на косинус угла между ними. Тогда $V^3$ – евклидово пространство.

2. Для любых двух функций $f,g \in C_{[a,b]}$ положим

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx. \tag{4.1}$$

Формула (4.1) задает скалярное произведение на $C_{[a,b]}$. Значит, $C_{[a,b]}$ – евклидово пространство.

3. Скалярное произведение для $x = (x_1, ..., x_n) \in R^n$ и $y = (y_1, ..., y_n) \in R^n$ определим формулой (4.2)

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i \qquad (4.2)$$

Тогда $R^n$ – евклидово пространство.

**Теорема 4.1.** Любое конечномерное действительное линейное пространство можно превратить в евклидово пространство.

**Пример.** Пусть $x = (x_1, x_2) \in R^2$ и $y = (y_1, y_2) \in R^2$. Является ли функция $F(x, y) = 3x_1y_1 - 7x_2y_2$ скалярным произведение в $R^2$? Если нет, то укажите, какие из свойств скалярного произведения нарушаются.

**Решение.** Проверим выполнение свойств скалярного произведения:

1. Поскольку $F(x, y) = 3x_1y_1 - 7x_2y_2 = 3y_1x_1 - 7y_2x_2 = F(y, x)$, тогда первая аксиома выполняется.

2. Положим $z = (z_1, z_2) \in R^2$. Тогда

$$F(x+y, z) = 3(x_1 + y_1)z_1 - 7(x_2 + y_2)z_2 =$$
$$= 3x_1z_1 - 7x_2z_2 + 3y_1z_1 - 7y_2z_2 = F(x, z) + F(y, z).$$

Значит, вторая аксиома скалярного произведения выполняется.

3. Пусть $\alpha \in R$, имеем

$F(\alpha x, y) = 3\alpha x_1y_1 - 7\alpha x_2y_2 = \alpha(3x_1y_1 - 7x_2y_2) = \alpha F(x, y)$

Следовательно, третья аксиома скалярного произведения, выполняется.

4. Пусть $x = (0,1)$. Тогда $F(x, x) = 3\cdot 0 - 7\cdot 1 = -7$. Значит, четвертая аксиома скалярного произведения не выполняется.

Следовательно, искомая функция не задает скалярного произведения на $R^2$.

## 4.2 Основные свойства скалярного произведения

Для любых трех векторов $a$, $b$, $c$ евклидова пространства $V$ со скалярным произведением $(a, b)$ и любого действительного числа $\alpha$ справедливо:

1. $(a, \alpha b) = \alpha(a, b)$;
2. $(a, b + c) = (a, b) + (a, c)$;
3. $(a, 0) = 0$;
4. $(0, b) = 0$;
5. если $(a, b) = 0$, для любого $b \in V$, то $a = 0$.

## 4.3 Понятие нормы вектора

*Длиной вектора* $x$ в евклидовом пространстве $V$ называют число $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$.

Введенное определение в пространстве $V^3$ согласуется с обычным определением длины вектора.

В пространстве $R^n$ длина вектора $x = (x_1, ..., x_n)$ выражается формулой

$$\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}.$$

В пространстве $C_{[a,b]}$ длина вектора выражается формулой

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}.$$

Величину $\|f\|$ называют *нормой функции f.*

Вектор, длина которого равна единице, называется *нормированным*. Операция умножения ненулевого вектора на число, обратное его длине, называется *нормированием вектора.*

## 4.4 Неравенство Коши – Буняковского

Следующая теорема устанавливает связь между скалярным произведением векторов и их длинами.

**Теорема 4.2.** Для любых двух векторов $a, b$ евклидова пространства выполняется неравенство

$$|(a,b)| \le \|a\| \cdot \|b\| \quad (4.3)$$

Неравенство (4.3) называется неравенством *Коши – Буняковского*.

## 4.5 Угол между векторами в евклидовом пространстве

В силу неравенства Коши – Буняковского,

$$-1 \le \frac{(a,b)}{\|a\| \cdot \|b\|} \le 1$$

для любых ненулевых векторов $a, b$ евклидова пространства $V$. Поэтому существует единственный угол $\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi$, такой, что

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|\cdot\|b\|}.$$

Этот угол называется *углом между векторами a и b.*

## 4.6 Неравенства треугольника

**Теорема 4.3.** В евклидовом пространстве $V$ для любых векторов $a$ и $b$ справедливы следующие утверждения:

1) $\|a+b\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 + 2\|a\|\cdot\|b\|\cdot\cos\varphi$, где $\varphi$ – угол между векторами $a$ и $b$;

2) $\|a+b\| < \|a\| + \|b\|$.

Первое утверждение теоремы 4.3 называется *теоремой косинусов*, второе – *неравенством треугольника*.

## Вопросы для самоконтроля

1 Дайте аксиоматическое определение скалярного произведение векторов.

2 Какое пространства называется евклидовым?

3 Сформулируйте основные свойства скалярного произведения?

4 Что называется длиной вектора?

5 Какой вектор называется нормированным? Что означает пронормировать вектор?

6 Сформулируйте неравенство Коши – Буняковского.

7 Как определяется угол между векторами в евклидовом пространстве?

8 В чем заключается неравенство треугольника и теорема косинусов?

# 5 Ортонормированный базис в евклидовом пространстве

## 5.1 Понятие ортонормированного базиса евклидова пространства

Векторы $a$, $b$ евклидова пространства $V$ называются *ортогональными*, если $(a,b) = 0$. Будем писать в этом случае $a \perp b$.

Система векторов $e_1, e_2, ..., e_k$ евклидова пространства $V$ называется *ортогональной,* если любая пара векторов этой системы ортогональна, то есть $e_i \perp e_j$ для всех $i \neq j$.

Будем полагать, что система, состоящая из одного вектора, ортогональна. Ортогональная система нормированных векторов евклидова пространства называется *ортонормированной*.

**Теорема 5.1.** Ортогональная система ненулевых векторов евклидова пространства линейно независима.

Ввиду теоремы 5.1 ортогональные системы играют в евклидовых пространствах фундаментальную роль. Процесс перехода к ортогональной системе векторов называется *процессом ортогонализации*.

В конечномерном евклидовом пространстве со скалярным произведением $(a,b)$ и с ортонормированным базисом $e_1, e_2, ..., e_k$ справедливы следующие соотношения:

1) для любых векторов $a, b \in V$ справедливо тождество параллелограмма:

$$\| a-b \|^2 + \| a+b \|^2 = 2(\| a \|^2 + \| b \|^2);$$

2) для любых векторов $a \in V$ справедливо тождество косинусов:

$$\cos^2(a,e_1) + \cos^2(a,e_2) + ... + \cos^2(a,e_k) = 1.$$

**Теорема 5.2** (*о существовании ортонормированного базиса*). В ненулевом конечномерном евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

## 5.2 Построение ортонормированного базиса

Процесс ортогонализации, описанный ниже, называется *процессом ортогонализации Грама – Шмидта*.

Пусть $a_1, a_2, ..., a_k$ – линейно независимая система векторов евклидова пространства $V$. По векторам этой системы будем последовательно строить ортогональную систему ненулевых векторов $b_1, b_2, ..., b_k$. Полагаем $b_1 = a_1$.

Если векторы $b_1, b_2, ..., b_{l-1}$ уже построены, то вектор $b_l$ находится по формуле

$$b_l = a_l + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + ... + \lambda_{l-1} b_{l-1}, \tag{5.1}$$

$$
\begin{cases}
\lambda_1 = -\dfrac{(a_l, b_1)}{(b_1, b_1)}, \\
\lambda_2 = -\dfrac{(a_l, b_2)}{(b_2, b_2)}, \\
\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\
\lambda_{l-1} = -\dfrac{(a_l, b_{l-1})}{(b_{l-1}, b_{l-1})}.
\end{cases} \tag{5.2}
$$

**Пример.** Применяя процесс ортогонализации Грама – Шмидта, по заданному базису $x_1 = (1, 0, 1)$, $x_2 = (-1, 1, 0)$, $x_3 = (1, -1, 1)$ постройте в $R^3$ ортонормированный базис.

**Решение.** Построим сначала ортогональный базис $a_1, a_2, a_3$ пространства $R^3$. Положим $a_1 = x_1 = (1, 0, 1)$. По формулам (5.1) и (5.2) имеем $a_2 = x_2 + \alpha_1 a_1$, где $\alpha_1 = -\dfrac{(a_1, x_2)}{(a_1, a_1)} = -\dfrac{-1\cdot 1 + 0\cdot 1 + 1\cdot 0}{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} = \dfrac{1}{2}$.

Тогда $a_2 = x_2 + \alpha_1 a_1 = (-1,1,0) + \dfrac{1}{2}(1,0,1) = \left(-\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{1}{2}\right)$.

По формулам (5.1) и (5.2) имеем $a_3 = x_3 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2$, где

$$
\beta_1 = -\frac{(a_1, x_3)}{(a_1, a_1)} = -\frac{1\cdot 1 + 0\cdot(-1) + 1\cdot 1}{1\cdot 1 + 0\cdot 0 + 1\cdot 1} = -1,
$$

$$
\beta_2 = -\frac{(a_2, x_3)}{(a_2, a_2)} = -\frac{-\frac{1}{2}\cdot 1 + 1\cdot(-1) + \frac{1}{2}\cdot 1}{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 1\cdot 1 + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.
$$

Тогда

$$
a_3 = x_3 + \beta_1 a_1 + \beta_2 a_2 = (1,-1,1) - 1\cdot(1,0,1) + \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) =
$$

$$
= (0, -1, 0) + \left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).
$$

Пронормируем векторы $a_1, a_2, a_3$. Для этого найдем их длины:

$$
\|a_1\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2},
$$

$$
\|a_2\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 + \frac{1}{2}^2} = \sqrt{\frac{3}{2}},
$$

$$\|a_3\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Теперь векторы $y_1 = \dfrac{a_1}{\|a_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$,

$$y_2 = \frac{a_2}{\|a_2\|} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left(-\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$y_3 = \frac{a_3}{\|a_3\|} = \sqrt{3}\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

образуют ортонормированный базис пространства $R^3$.

## 5.3 Вычисление скалярного произведения в ортонормированном базисе

Пусть $e_1, e_2, ..., e_k$ – ортонормированная система и $x = e_1x_1 + e_2x_2 + ... + e_kx_k$ и $y = e_1y_1 + e_2y_2 + ... + e_ky_k$ – разложение векторов $x$ и $y$ по этому базису. Тогда скалярное произведение векторов $x$ и $y$ вычисляется по формуле

$$(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_ny_n = \sum_{i=1}^{n} x_iy_i.$$

## 5.4 Изоморфизм евклидовых пространств

Два линейных пространства $V$ и $V'$ над одним и тем же полем $P$ называются *изоморфными*, если существует биективное отображение $\varphi: V \to V'$ такое, что:

1) $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$ для всех $x, y \in V$;

2) $\varphi(\alpha x) = \alpha\varphi(x)$ для любого $x \in V$ и любого $\alpha \in P$.

Отображение $\varphi$ в этом случае называется изоморфизмом линейных пространств $V$ и $V'$. Если пространства $V$ и $V'$ изоморфны, то пишут $V \cong V'$.

**Теорема 5.3.** Отношение изоморфизма линейных пространств над одним и тем же полем есть отношение эквивалентности.

**Теорема 5.4.** Пусть $\varphi: V \to V'$ – изоморфизм линейных пространств $V$ и $V'$ над полем $P$. Тогда:

1) если $\theta$ – нулевой вектор пространства $V$, то $\varphi(\theta)$ – нулевой вектор пространства $V'$;

2) $\varphi(-x) = -\varphi(x)$ для каждого $x \in V$;

3) если система $a_1, a_2, ..., a_n$ векторов пространства $V$ линейно независима, то система $\varphi(a_1), \varphi(a_2), ..., \varphi(a_n)$ векторов пространства $V'$ линейно независима.

Пусть евклидовы пространства $V$ и $V'$ изоморфны как линейные пространства, то есть существует взаимно однозначное линейное отображение $f$ пространства $V$ на пространство $V'$. Если при этом отображении сохраняется скалярное произведение, то есть $(f(x), f(y)) = (x, y)$ для любых $x, y \in V$, то отображение $f$ называется *евклидовым изоморфизмом* пространств $V$ и $V'$. Сами пространства $V$ и $V'$ называются в этом случае *евклидово изоморфными пространствами.*

**Теорема 5.5.** Два конечномерных евклидовых пространства евклидово изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.

**Следствие.** Каждое $n$-мерное евклидово пространство евклидово изоморфно пространству $R^n$.

## Вопросы для самоконтроля

1 Какая система векторов называется ортогональной?

2 Какая система векторов называется ортонормированной?

3 Сформулируйте теорему о существовании ортонормированного базиса.

4 В чем заключается процесс ортогонализации Грамма – Шмидта?

5 Способ вычисления скалярного произведения в ортонормированном базисе.

6 Какие линейные пространства называются изоморфными?

7 Какие линейные пространства называются евклидово изоморфными?

8 Сформулируйте критерий евклидовой изоморфности пространств.

# 6 Квадратичные функции на линейном пространстве

В этом разделе мы будем изучать простейшие числовые функции от векторов в аффинном пространстве.

*Аффинным пространством* над полем $P$ называется тройка $(A,\ L,\ +)$, состоящая из линейного пространства $L$ над полем $P$, множества $A$, элементы которого называются точками, и внешней бинарной операции $A \times L \to A : (a, l) \mapsto a + l$, удовлетворяющей следующим аксиомам:

а) $(a + l) + m = a + (m + l)$ для всех $a \in A$; $l, m \in L$;

б) $a + 0 = a$ для всех $a \in A$;

в) для любых двух точек $a, b \in A$ существует единственный вектор $l \in L$ со свойством $b + a + l$.

## 6.1 Линейная функция

Простейшей функцией в аффинном пространстве является линейная функция.

Говорят, что в аффинном пространстве задана *линейная функция* (линейная форма), если каждому вектору $x$ поставлено в соответствие число $f(x)$, так что при этом выполнены условия:

1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$.

2) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Выберем в $n$-мерном пространстве произвольный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$. Так как каждый вектор $x$ можно представить в виде $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n$,

то в силу свойств линейной функции имеем

$$f(x) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n) = x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2) + \ldots + x_n f(e_n).$$

Таким образом, в $n$-мерном пространстве с заданным базисом линейная функция может быть представлена в виде

$$f(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n, \qquad (6.1)$$

где $a_i = f(e_i)$ – постоянные, зависящие лишь от выбора базиса, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты вектора в этом базисе.

Таким образом, данное выше определение линейной функции совпадает, по существу, с принятым в алгебре определением линейной функции (линейной формы); надо лишь иметь в виду, что в нашем случае коэффициенты зависят от выбора базиса.

### Переход от одного базиса к другому

Выясним, как меняются коэффициенты линейной функции при замене одного базиса другим.

Пусть $e_1, e_2, ..., e_n$ и $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ – два базиса в $R^n$. Пусть, далее, векторы $e'_i$ выражаются через базис $e_1, e_2, ..., e_n$ формулами:

$$\begin{aligned}
e'_1 &= \alpha_{11}e_1 + \alpha_{21}e_2 + ... + \alpha_{n1}e_n, \\
e'_2 &= \alpha_{12}e_1 + \alpha_{22}e_2 + ... + \alpha_{n2}e_n, \\
&\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
e'_n &= \alpha_{1n}e_1 + \alpha_{2n}e_2 + ... + \alpha_{nn}e_n.
\end{aligned}$$

Пусть в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ линейная функция выражается формулой $f(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$, а в базисе $e'_1, e'_2, ..., e'_n$ – формулой $f(x) = a'_1x'_1 + a'_2x'_2 + ... + a'_nx'_n$.

Так как $a_i = f(e_i)$, а $a'_k = f(e'_k)$, то

$$\begin{gathered}
a'_k = f(e'_k) = f(\alpha_{1k}e_1 + \alpha_{2k}e_2 + ... + \alpha_{nk}e_n) = \\
= \alpha_{1k}f(e_1) + \alpha_{2k}f(e_2) + ... + \alpha_{nk}f(e_n) = \alpha_{1k}a_1 + \alpha_{2k}a_2 + ... + \alpha_{nk}a_n.
\end{gathered}$$

Мы видим, что коэффициенты линейной формы преобразуются при переходе к другому базису так же, как векторы базиса (или, как иногда говорят, когредиентно векторам базиса).

**Пример 6.1**. В пространстве, векторами которого являются непрерывные функции $\varphi(t)$, заданные на отрезке $[a,b]$, рассмотрим функцию $f(\varphi)$, заданную формулой $f(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)dt$.

**Решение.** Эта функция линейна, так как выполняются условия 1 и 2. Действительно, первое из них означает, что интеграл суммы равен сумме интегралов, а второе означает, что постоянный множитель можно выносить за знак интеграла.

**Пример 6.2.** В том же пространстве рассмотрим функцию $f(\varphi)$, определенную следующим образом. Выберем на отрезке $[a,b]$ некоторое значение $t = t_0$ и положим $f(\varphi) = \varphi(t_0)$.

Проверьте, что эта функция $f(\varphi)$ также линейна.

## 6.2 Понятие билинейной и квадратичной формы

Мы будем говорить, что $A(x; y)$ есть *билинейная функция* (билинейная форма) от векторов $x$ и $y$, если:

1) при фиксированном $y$ $A(x; y)$ есть линейная функция от $x$,

2) при фиксированном $x$ $A(x; y)$ есть линейная функция от $y$.

Иными словами, в силу определения линейной функции условия 1 и 2 означают соответственно:

1) $A(x_1+x_2;y)=A(x_1;y)+A(x_2;y)$, $A(\lambda x;y)=\lambda A(x;y)$.

2) $A(x;y_1+y_2)=A(x;y_1)+A(x;y_2)$, $A(x;\mu y)=\mu A(x;y)$.

**Примеры 6.3.** Рассмотрим *n*-мерное пространство, в котором вектор есть совокупность *n* чисел. Положим

$$\begin{aligned} A(x;y) = {} & a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1\,y_2 + \ldots + a_{1n}x_1y_n + \\ & + a_{21}x_2y_1 + a_{22}x_2y_2 + \ldots + a_{2n}x_2y_n + \\ & \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ & + a_{n1}x_ny_1 + a_{n2}x_ny_2 + \ldots + a_{nn}x_ny_n \end{aligned}, \qquad (6.2)$$

где *x* есть вектор $(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$,

$y$ – вектор $(y_1, y_2,\ldots,\ y_n)$.

Формула (6.2) определяет билинейную функцию.

**Решение.** В самом деле, если зафиксировать *y*, то есть считать $(y_1, y_2,\ldots,\ y_n)$ постоянными, то $A(x;y)=\sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} a_{ij}x_i\ y_j$ зависит от $x_i$ линейно, то есть есть линейная функция от $x=(x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n)$, а при постоянных $x_1,\ x_2,\ldots,\ x_n$ форма $A(x;y)$ – линейная функция от *y*.

**Пример 6.4.** В пространстве, в котором векторами являются непрерывные на $[a,b]$ функции $f(t)$ и $g(s)$, рассмотрим следующий пример билинейной функции. Пусть $K(s,t)$ – некоторая непрерывная функция на $[a,b]$ переменных *s* и *t*. Положим $A(f;g)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)f(s)g(t)dsdt$.

$A(f;g)$ есть билинейная функция векторов $f$ и $g$.

**Решение.** Действительно, условия 1 и 2 проверяются так же, как и в примере 6.1 предыдущего пункта.

Если $K(s,t)\equiv 1$, то

$$A(f;g)=\int_a^b\int_a^b f(s)g(t)dsdt=\int_a^b f(s)ds\int_a^b g(t)dt,$$

то есть $A(f;g)$ есть произведение линейных функций $\int_a^b f(s)ds$ и $\int_a^b g(t)dt$.

**Упражнение 6.1.** Показать, что если $f(x)$ и $g(y)$ – линейные функции, то их произведение $f(x)g(y)$ есть билинейная функция.

Билинейная функция (форма) называется *симметрической*, если для любых векторов *x* и *y* имеет место равенство $A(x;y)=A(y;x)$.

В приведенном выше примере 6.3 определенная формулой (6.2) билинейная форма $A(x;y)$ симметрична тогда и только тогда, когда $a_{ij}=a_{ji}$ для любых $i$ и $j$.

**Пример 6.5.** Скалярное произведение $(x, y)$ в евклидовом пространстве является симметрической билинейной формой.

**Решение.** В самом деле, аксиомы 2, 3, 4 скалярного произведения как раз и означают, что скалярное произведение есть симметрическая билинейная форма.

Пусть $A(x; y)$ – симметрическая билинейная форма. Функция $A(x; x)$, которая получается из $A(x; y)$, если положить $y = x$, называется *квадратичной формой*.

$A(x; y)$ называется билинейной формой, *полярной* к квадратичной форме $A(x; x)$.

Требование симметричности формы $A(x; y)$ в определении квадратичной формы оправдывается следующим предложением, которое без этого было бы неверно.

**Теорема 6.1.** Полярная форма $A(x; y)$ однозначно определяется своей квадратичной формой $A(x; x)$.

$\lhd$ Из определения билинейной формы легко следует, что

$$A(x+y; x+y) = A(x; x) + A(x; y) + A(y; x) + A(y; y).$$

Отсюда в силу симметрии (то есть равенства $A(x; y) = A(y; x)$) получаем:

$$A(x; y) = \frac{1}{2}\left[A(x+y; x+y) - A(x; x) - A(y; y)\right].$$

В правой части этого равенства стоят значения квадратичной формы; следовательно, мы доказали, что билинейная форма $A(x; y)$ определяется своей квадратичной формой.

Выше мы уже показывали, что всякая симметрическая билинейная форма $A(x; y)$ записывается через координаты векторов $x$ и $y$ в виде

$$A(x, y) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_{ij} x_i\, y_j,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$.

Следовательно, всякая квадратичная форма $A(x; x)$ при заданном базисе выражается формулой $A(x; x) = \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} a_{ij} x_i\, x_j$, где $a_{ij} = a_{ji}$ или

$$\begin{aligned} A(x; x) &= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1\, x_2 + \dots + a_{1n}x_1 x_n + \\ &+ a_{21}x_2 x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2 x_n + \dots + \\ &+ a_{n1}x_n x_1 + a_{n2}x_n x_2 + \dots + a_{nn}x_n^2 \end{aligned} \tag{6.3}$$

где коэффициенты $a_{ij} \in P$ и удовлетворяют условию:

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad (6.4)$$

Если в первоначальной записи квадратичной формы коэффициенты при $x_i x_j$ и $x_j x_i$ различны, то можно сложить их и, разделив сумму на 2, получить равные значения. $\triangleright$

Из условия (6.4) следует, что матрица квадратичной формы является симметрической матрицей.

## 6.3 Матрицы билинейной и квадратичной формы

Мы определили билинейную форму аксиоматически. Выберем теперь в *n*-мерном пространстве какой-либо базис $e_1, e_2, ..., e_n$ и выразим билинейную форму $A(x; y)$ через координаты $(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ и $(y_1, y_2, ...,\ y_n)$ векторов *x* и *y* в этом базисе. Мы имеем:

$$A(x; y) = A(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n; y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n).$$

В силу условий 1 и 2 билинейной формы

$$\begin{aligned}
&A(x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n; y_1e_1 + y_2e_2 + ... + y_ne_n) = \\
&= x_1y_1A(e_1;e_1) + x_1y_2A(e_1;e_2) + ... + x_1y_nA(e_1;e_n) + \\
&+ x_2y_1A(e_2;e_1) + x_2y_2A(e_2;e_2) + ... + x_2y_nA(e_2;e_n) + ... + \\
&+ x_ny_1A(e_n;e_1) + x_ny_2A(e_n;e_2) + ... + x_ny_nA(e_n;e_n),
\end{aligned}$$

или в компактном виде:

$$A(x, y) = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} A(e_i; e_j) x_i\, y_j.$$

Обозначим постоянные $A(e_i; e_j)$ через $a_{ij}$. Тогда имеем: при заданном базисе $e_1, e_2, ..., e_n$ всякая билинейная форма в *n*-мерном пространстве может быть записана в виде $A(x, y) = \sum_{\substack{i=1\\ j=1}}^{n} a_{ij} x_i\, y_j$, где $(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$ – координаты вектора *x*, а $(y_1, y_2, ...,\ y_n)$ – координаты вектора *y* в данном базисе. Числа $a_{ij}$ зависят от выбора базиса и вычисляются по формулам

$$a_{ij} = A(e_i; e_j). \qquad (6.5)$$

Матрица $A = (a_{ij})$, составленная из коэффициентов билинейной формы $A(x; y)$ или квадратичной формы $A(x; x)$ в базисе $e_1, e_2, ..., e_n$, записанной в симметричном виде (6.2) или (6.3), называется *матрицей билинейной формы* $A(x; y)$ *или квадратичной формы* $A(x; x)$.

Таким образом, в каждом базисе билинейная и квадратичная формы определяются своими матрицами.

Квадратичную форму удобно записывать в матричной форме. Для этого введём в рассмотрение строку переменных $X = (x_1 \ \ x_2 \ \ ... \ \ x_n)$. Тогда $A(x; x) = XAX^T$, где $A$ – матрица квадратичной формы $A(x; x)$. Напомним, что $X^T$ – транспонированная матрица по отношению к матрице $X$.

**Пример 6.6.** Пусть $R^3$ – трехмерное пространство, векторами которого являются тройки чисел $(x_1, x_2, x_3)$. Зададим в $R^3$ билинейную форму $A(x; y)$ формулой $A(x; y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3$.

Возьмем в $R^3$ в качестве базиса три вектора $e_1 = (1, 1, 1)$; $e_2 = (1, 1, -1)$; $e_3 = (1, -1, -1)$.

Найдем матрицу $A$ билинейной формы $A(x; y)$ в этом базисе. В силу (6.5) получим:

$a_{11} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot 1 = 6$,

$a_{12} = a_{21} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot 1\cdot(-1) = 0$,

$a_{13} = a_{31} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot 1\cdot(-1) = -4$,

$a_{22} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot 1 + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6$,

$a_{23} = a_{32} = 1\cdot 1 + 2\cdot 1\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 2$,

$a_{33} = 1\cdot 1 + 2\cdot(-1)\cdot(-1) + 3\cdot(-1)\cdot(-1) = 6$,

то есть

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -4 \\ 0 & 6 & 2 \\ -4 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если обозначить через $(x_1', x_2', x_3')$ и $(y_1', y_2', y_3')$ координаты векторов $x$ и $y$ в базисе $e_1, e_2, e_3$, то

$$A(x; y) = 6x_1'y_1' - 4x_1'y_3' + 6x_2'y_2' + 2x_2'y_3' - 4x_3'y_1' + 2x_3'y_2' + 6x_3'y_3'.$$

## 6.4 Преобразование матриц квадратичных функций при переходе к новому базису

*Линейным преобразованием* переменных $x_1, x_2, ...., x_n$ над полем $P$ называется переход от исходных переменных к переменным $y_1, y_2, ..., y_n$ по формулам:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n, \\ x_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n, \\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \\ x_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n, \end{cases} \tag{6.6}$$

где $a_{ij} \in P$. Матрица $S = (a_{ij})$ называется матрицей линейного преобразования (6.6). Линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей называется *невырожденным*. Если $X = (x_1\ x_2\ \ldots\ x_n)$, $Y = (y_1\ y_2\ \ldots\ y_n)$, то система равенств (6.6) в матричной форме принимает вид: $X^T = SY^T$. Если (6.6) – невырожденное линейное преобразование переменных, то можно выразить *обратное* преобразование переменных $y_1, y_2, \ldots, y_n$ через переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которое примет вид: $Y^T = S^{-1}X^T$.

Под *произведением двух линейных преобразований* переменных понимается их последовательное выполнение.

*Матрица произведения линейных преобразований* переменных равна произведению матриц этих преобразований.

Матрица квадратичной формы при линейной невырожденной замене переменных следующая: $A' = S^T AS$, где $A$– матрица квадратичной формы, $S$ – линейное преобразование переменных.

## 6.5 Ранг и канонический вид квадратичных функций

Ранг матрицы *A* называется *рангом* квадратичной формы $A(x; x)$.

Квадратичная форма называется *канонической*, если она не содержит произведений различных переменных.

Каноническим видом квадратичной формы $A(x; x)$ называется любая каноническая квадратичная форма $A(y; y)$, в которую превращается форма $A(x; x)$ в результате применения к входящим в неё переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ невырожденного линейного преобразования.

## Вопросы для самоконтроля

1 Дайте определение аффинного пространства.
2 Какую функцию называют линейной в аффинном пространстве?
3 Дайте определение билинейной формы?
4 Приведите примеры билинейных форм.
5 Какую форму называют квадратичной?
6 Какой вид имеют матрицы билинейной и квадратичной форм?

7 Запишите матричный вид квадратичной формы.
8 Что называется линейным преобразованием?
9 Что называется рангом квадратичной формы?
10 Какой вид называется каноническим для квадратичной формы?

# 7 Исследование квадратичных форм

## 7.1 Приведение квадратичных форм к каноническому виду

**Теорема 7.1** (*о приведении квадратичной формы к каноническому виду*). Всякую квадратичную форму над полем Р можно с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования её переменных привести к каноническому виду.

Конструктивное доказательство этой теоремы составляет содержание метода Лагранжа приведения квадратичной формы к каноническому виду.

*Нормальным видом комплексной квадратичной формы* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется такой её канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны 1.

**Теорема 7.2.** Всякая комплексная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных к нормальному виду.

*Нормальным видом действительной квадратичной формы* $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется такой её канонический вид, в котором все ненулевые коэффициенты равны либо 1, либо (−1).

**Теорема 7.3.** Всякая действительная квадратичная форма может быть приведена с помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных к нормальному виду.

Следующая теорема показывает, что нормальный вид действительной квадратичной формы определён однозначно с точностью до обозначения переменных, а число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде являются инвариантами квадратичной формы.

**Теорема 7.4.** Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.

## 7.2 Метод Лагранжа. Метод Якоби

*Главными минорами* квадратной матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ ....a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ ....a_{2n} \\ ....\ ....\ ....\ .... \\ a_{n1}\ a_{n2}\ ...a_{nn} \end{pmatrix}$$

называются миноры:

$$\Delta_1 = | a_{11} |,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,\ \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

то есть миноры, расположенные в левом верхнем углу матрицы *A*.

### 7.2.1 Метод Лагранжа

Одним из наиболее простых способов приведения квадратичной формы к каноническому виду является так называемый метод Лагранжа.

Для приведения квадратичной формы *n* переменных

$$q(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \ldots + a_{nn}x_n^2$$

к каноническому виду нужно выполнить следующие действия.

1. Выбрать такую переменную (*ведущую*), которая входит в квадратичную форму во второй и в первой степени одновременно (если в квадратичной форме есть член с квадратом переменной и с произведением этой переменной на другую переменную), и перейти к пункту 2.

Если в квадратичной форме нет ведущих переменных, то выбрать пару переменных, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом, и перейти к пункту 3.

Если в квадратичной форме отсутствуют произведения различных переменных, то никаких преобразований делать не надо, так как она уже имеет канонический вид.

2. По ведущей переменной выделить полный квадрат: собрать в квадратичной форме все члены с ведущей переменной, дополнить сумму этих членов до полного квадрата (разумеется, добавленные члены нужно также и вычесть, чтобы не изменилась сумма). Получим сумму полного квадрата некоторой линейной формы (в которую входит ведущая переменная) и квадратичной формы, в которую ведущая переменная не входит. Сделать замену переменных: линейную форму, содержащую ведущую переменную, принять за одну из новых переменных, а все старые переменные, за исключением ведущей, принять за соответствующие новые. Продолжить преобразования с пункта 1.

3. Выбранную пару переменных заменить на разность и сумму двух новых переменных, а остальные старые переменные принять за соответствующие новые переменные. При этом произведение пары выбранных переменных преобразуется к разности квадратов двух новых переменных, то есть в новой квадратичной форме $q(y)$ будут квадраты переменных с отличными от нуля коэффициентами. Продолжить преобразования новой квадратичной формы с пункта 1.

Идея метода Лагранжа состоит в том, что прием, используемый в пункте 2 (выделение полного квадрата), исключает одну переменную из числа ведущих. Например, если переменная $x_1$ – ведущая (то есть $a_{11} \neq 0$ и хотя бы один из коэффициентов $a_{12}, a_{13}, ..., a_{1n}$ отличен от нуля), то выделяем полный квадрат по переменной $x_1$ (собираем все члены с $x_1$ и дополняем их сумму до полного квадрата):

$$q(x) = a_{11}\left[x_1^2 + 2x_1 \cdot \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right) + \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)^2\right] -$$

$$- a_{11} \cdot \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)^2 + a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + ... + a_{nn} x_n^2.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть полный квадрат. Поэтому

$$q(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{11} \cdot \left(x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)^2 + q_1(x_2, ..., x_n),$$

где $q_1(x_2, ..., x_n) = a_{22} x_2^2 + 2a_{23} x_2 x_3 + ... + a_{nn} x_n^2 - a_{11} \cdot \left(\frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n\right)^2$ – квадратичная форма, в которую не входит ведущая переменная, а выражение $x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$ – линейная форма, содержащая ведущую переменную $x_1$. Обозначим $y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 + ... + \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n$, $y_2 = x_2, ..., y_n = x_n$, или, что то же самое, сделаем линейную замену переменных:

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - \frac{a_{12}}{a_{11}} x_2 - ... - \frac{a_{1n}}{a_{11}} x_n, \\ x_2 = y_2, \\ ... \\ x_n = y_n. \end{cases} \tag{7.1}$$

Тогда данная квадратичная форма преобразуется к виду

$$\tilde{q}(y_1, y_2, ..., y_n) = a_{11}y_1^2 + q_1(y_2, ..., y_n) .$$

Заметим, что в результате этого преобразования все члены, содержащие ведущую переменную $x_1$ в первой и второй степени, заменены квадратом одной новой переменной $y_1$. В дальнейших преобразованиях переменная $x_1$ уже никогда не будет встречаться.

Многократно применяя этот прием, исключаем одну за другой все ведущие переменные, получая тем самым канонический вид квадратичной формы.

Однако выделение полного квадрата невозможно, если в квадратичной форме вообще отсутствуют члены с квадратами переменных. В этом случае применяется способ, описанный в пункте 3, который порождает члены с квадратами переменных.

Например, в пункте 1 выделена пара переменных $x_1$ и $x_2$, произведение которых входит в квадратичную форму с отличным от нуля коэффициентом $(a_{12} \neq 0)$. Тогда нужно сделать замену переменных

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - y_2, \\ x_2 = y_1 + y_2, \\ x_3 = y_3, \\ ... \\ x_n = y_n. \end{cases} \tag{7.2}$$

При этом получим новую квадратичную форму $\tilde{q}(y)$, в которой появятся квадраты новых переменных с отличными от нуля коэффициентами, так как в результате замены член $2a_{12}x_1x_2$ преобразуется к виду

$$2a_{12}x_1x_2 = 2a_{12}(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 2a_{12}y_1^2 - 2a_{12}y_2^2,$$

а других членов с $y_1^2$ в новой квадратичной форме не будет.

Заметим, что при помощи метода Лагранжа не только находится канонический вид, но и определяется искомая невырожденная замена переменных. В самом деле, замены переменных (7.1), (7.2), которые производятся в пунктах 2, 3 алгоритма, это линейные замены с матрицами

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 & -\dfrac{a_{12}}{a_{11}} & ... & -\dfrac{a_{1n}}{a_{11}} \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}, \; S_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители матриц отличны от нуля ($\det S_1 = 1, \det S_2 = 2$). Следовательно, эти замены переменных невырожденные. Выполняя пункты 2, 3 алгоритма, можно определить матрицы используемых замен переменных. В результате их перемножения (в порядке нахождения) получается матрица искомой замены (согласно свойству 2 линейных замен переменных).

**Замечание 7.1.** Канонический вид квадратичной формы определен неоднозначно, так как зависит от последовательности выбора ведущих переменных. Сделав, например, замену переменных $y_i = \alpha_i z_i \quad (i = \overline{1, n})$ в каноническом виде, получим другую квадратичную форму, которая тоже имеет канонический вид.

**Замечание 7.2.** Элементы матрицы невырожденной линейной замены переменных, приводящей квадратичную форму к каноническому виду, вычисляются при помощи арифметических операций по коэффициентам квадратичной формы. Поэтому, если коэффициенты квадратичной формы рациональные, действительные, комплексные, то и коэффициенты линейной замены рациональные, действительные, комплексные соответственно.

**Пример 7.1.** Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $G$ к каноническому и нормальному виду. Укажите невырожденные линейные преобразования переменных, приводящие к этим видам:

$$G = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

**Решение:** а) Приведем квадратичную форму $G$ к каноническому виду. Выберем в качестве ведущей переменной $x_1$, поскольку есть квадрат данной переменной, и она присутствует в двух смешанных произведениях. Выделяя с ведущей переменной полный квадрат, будем иметь:

$$G = \left[x_1^2 - 2x_1(2x_2 + 3x_3) + (2x_2 + 3x_3)^2\right] - (2x_2 + 3x_3)^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_2x_3 =$$
$$= (x_1 - 2x_2 - 3x_3)^2 - 10x_2x_3.$$

Сделаем замену переменных $y_1 = x_1 - 2x_2 - 3x_3$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_3$ или $x_1 = y_1 + 2y_2 + 3y_3$, $x_2 = y_2$, $x_3 = y_3$ с матрицей линейного преобразования

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получим квадратичную форму $G = y_1^2 - 10y_2y_3$. Поскольку в квадратичной форме нет квадратов переменных $y_2$ и $y_3$, то сделаем линейное преобразование переменных $y_1 = z_1$, $y_2 = z_2 - z_3$, $y_3 = z_2 + z_3$ или $z_1 = y_1$, $z_2 = \frac{1}{2}(y_2 + y_3)$, $z_3 = \frac{1}{2}(y_3 - y_2)$ с матрицей линейного преобразования

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

которое приводит квадратичную форму к каноническому виду $G = z_1^2 - 10(z_2 - z_3)(z_2 + z_3) = z_1^2 - 10z_2^2 + 10z_3^2$. Матрица линейного преобразования будет

$$T = A_1 A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Невырожденное линейное преобразование переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, приводящее к каноническому виду, следующее: $x_1 = z_1 + 5z_2 + z_3$, $x_2 = z_2 - z_3$, $x_3 = z_2 + z_3$. Нетрудно проверить, что при преобразовании $T$ форма $G(x_1, x_2, x_3)$ примет вид формы $G(z_1, z_2, z_3)$ и матрица канонической квадратичной формы $\Lambda = T^T A T$, где $A$ – матрица квадратичной формы.

б) Найдем нормальный вид квадратичной формы $G$. Для этого сделаем замену переменных $u_1 = z_1$, $u_2 = \sqrt{10} z_2$, $u_3 = \sqrt{10} z_3$ или $z_1 = u_1$, $z_2 = \dfrac{1}{\sqrt{10}} u_2$, $z_3 = \dfrac{1}{10} u_3$ в каноническом виде квадратичной формы с матрицей линейного преобразования

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Получим нормальный вид квадратичной формы $G = u_1^2 - u_2^2 + u_3^2$. Матрицей линейного преобразования переменных будет матрица

$$K = TA_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 1/10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & -1/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} & 1/10 \end{pmatrix}.$$

Невырожденное линейное преобразование переменных $x_1$, $x_2$, $x_3$, приводящее к нормальному виду, следующее: $x_1 = u_1 + 5/\sqrt{10}\, u_2 - 1/\sqrt{10}\, u_3$, $x_2 = 1/\sqrt{10}\, u_2 - 1/\sqrt{10}\, u_3$, $x_3 = 1/\sqrt{10}\, u_2 + 1/\sqrt{10}\, u_3$.

Нетрудно проверить, что при преобразовании $K$ форма $G(x_1, x_2, x_3)$ примет вид формы $G(u_1, u_2, u_3)$ и матрица нормальной квадратичной формы $\Lambda_N = K^T A K$.

### 7.2.2 Метод Якоби

Рассмотрим еще один метод приведения квадратичной формы к каноническому виду, который учитывает особенности преобразования матрицы квадратичной формы при линейной замене переменных.

Две квадратные матрицы $A$ и $A'$ одного и того же порядка называются *конгруэнтными*, если существует такая невырожденная матрица $S$, что $A' = S^T AS$.

Если $A$ и $A'$ конгруентные квадратные матрицы, связанные соотношением $A' = S^T AS$, где матрица $S$ – верхняя треугольная с единицами на главной диагонали

$$S = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

то все главные миноры матриц $A$ и $A'$ равны, где в (7.3) звездочкой (*) обозначаются любые числа.

**Теорема 7.5** (*Якоби о каноническом виде квадратичной формы*). Если квадратичная форма $q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j = x^T Ax$ имеет ранг $r = rgA$ и ее главные миноры отличны от нуля, то ее можно привести к каноническому виду

$$\tilde{q}(y) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2,\ (\lambda_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i-1}}, i = \overline{1,r}, \Delta_0 = 1) \tag{7.4}$$

при помощи линейной замены переменных $x = Sy$ с верхней треугольной матрицей $S$ вида (7.3).

*Алгоритм нахождения канонического вида квадратичной формы методом Якоби*:

1. Составить матрицу $A$ ($n$-го порядка) квадратичной формы.

2. Найти первые $r$ отличных от нуля угловых миноров матрицы квадратичной формы. Если $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \dots, \Delta_n \neq 0$, то перейти к пункту 3, положив $r = n$. Если $\Delta_1 = a_{11} = 0$, то процесс закончить, так как метод Якоби неприменим. Если $\Delta_1 \neq 0, \Delta_2 \neq 0, \dots, \Delta_r \neq 0$ и $\Delta_{r+1} = 0$, где $0 \le r \le n-1$, то найти отличный от нуля минор ($r+1$)-го порядка, окаймляющий минор $\Delta_r \neq 0$. Если такого минора нет, то перейти к пункту 3, иначе процесс закончить, так как метод Якоби неприменим.

3. Записать искомый канонический вид (7.4) квадратичной формы.

**Пример 7.2.** Методом Якоби приведите квадратичную форму $G$ к каноническому виду.

$$G = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

**Решение.** Приведем квадратичную форму $G$ к каноническому виду. Составим матрицу квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

Найдем главные миноры: $\Delta_0 = 1$ – по определению,

$$\Delta_1 = 1,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} = -5,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 9 \end{vmatrix} = -50.$$

Таким образом, матрица квадратичной формы $G(x_1, x_2, x_3)$ по теореме Якоби имеет следующий канонический вид:

$$G(y_1, y_2, y_3) = \frac{\Delta_1}{\Delta_0} y_1^2 + \frac{\Delta_2}{\Delta_1} y_2^2 + \frac{\Delta_3}{\Delta_2} y_3^2 = y_1^2 - 5y_2^2 + 10y_3^2.$$

В следующей теореме предлагается другой способ приведения действительной квадратичной формы к каноническому виду.

**Теорема 7.6.** Для любой действительной квадратичной формы $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ существует линейное преобразование переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ с ортогональной матрицей, приводящее эту форму к каноническому виду. При этом коэффициентами при квадратах переменных будут корни характеристического многочлена матрицы квадратичной формы $f(x_1, x_2, ..., x_n)$.

## 7.3 Закон инерции квадратичных форм

**Теорема 7.7.** Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы над полем $P$ не зависит от способа приведения квадратичной формы к этому виду и равно рангу квадратичной формы.

Последняя теорема позволяет ввести следующее определение. Число ненулевых коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы называется *индексом инерции* этой квадратичной формы.

Число положительных коэффициентов в каноническом виде действительной квадратичной формы называется *положительным индексом* *инерции* этой квадратичной формы, а число отрицательных коэффициентов – её *отрицательным индексом инерции.*

**Пример 7.3.** Определите индекс инерции квадратичной формы
$$G = x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

**Решение.** Канонический вид квадратичной формы следующий $G = z_1^2 - 10z_2^2 + 10z_3^2$ смотреть пример 7.1. Следовательно, индекс инерции равен трем ($I = 3$), положительный индекс инерции – двум ($I^+ = 2$), отрицательный – одному ($I^- = 1$).

## 7.4 Классификация квадратичных форм по каноническому виду

Действительная квадратичная форма $f(x_1, x_2,..., x_n)$ называется:

– *положительно определённой*, если для любых $n$ действительных чисел $a_1, a_2,..., a_n$, из которых хотя бы одно не отлично от нуля, имеет место неравенство $f(a_1, a_2,..., a_n) > 0$;

– *отрицательно определённой*, если для любых $n$ действительных чисел $a_1, a_2,..., a_n$, из которых хотя бы одно не отлично от нуля, имеет место неравенство $f(a_1, a_2,..., a_n) < 0$;

– *знакоопределенной,* если она является положительно или отрицательно определённой квадратичной формой;

– *квазизнакоопределенной*, если она принимает либо только неотрицательные, либо только неположительные значения, при этом обращается в нуль не только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$;

– *знакопеременной*, если она принимает как положительные, так и отрицательные значения.

**Лемма 7.1.** Если к переменным положительно определённой квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также будет положительно определённой.

**Лемма 7.2.** Если к переменным отрицательно определённой квадратичной формы применить невырожденное линейное преобразование, то полученная квадратичная форма также будет отрицательно определённой.

На следующих двух теоремах основаны способы распознавания характера определённости действительной квадратичной формы путём приведения её к каноническому виду.

**Теорема 7.8.** Для того чтобы действительная квадратичная форма от $n$ переменных была положительно определённой, необходимо и достаточно, чтобы положительный индекс инерции этой квадратичной формы был равен $n$.

**Теорема 7.9.** Для того чтобы действительная квадратичная форма от $n$ переменных была отрицательно определённой, необходимо и достаточно, чтобы отрицательный индекс инерции этой квадратичной формы был равен $n$.

## 7.5 Критерий Сильвестра знакоопределенности квадратичной формы

**Лемма 7.3.** Знак определителя матрицы действительной квадратичной формы не меняется при применении к этой форме невырожденного линейного преобразования переменных.

**Следствие.** Определитель матрицы положительно определённой квадратичной формы является положительным числом.

*Способ распознавания* характера определённости квадратичной формы основан на следующей теореме.

**Теорема 7.10** (*критерий Сильвестра*). Действительная квадратичная форма является положительно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры её матрицы положительны.

Действительная квадратичная форма является отрицательно определённой тогда и только тогда, когда все главные миноры нечетного порядка её матрицы отрицательны, а все главные миноры четного порядка положительны.

**Пример 7.4.** При каких значениях параметра $\lambda$ квадратичная форма $G$ является положительно (отрицательно) определенной?

$$G = 3\lambda x_1^2 + 2x_2^2 + \lambda x_3^2 + 6x_1x_2 - 8x_2x_3.$$

**Решение.** Составим матрицу квадратичной формы $G$:

$$A = \begin{pmatrix} 3\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda \end{pmatrix}$$

Матрица $A$ имеет три главных минора

$$\Delta_1 = |3\lambda| = 3\lambda,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3\lambda & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 6\lambda - 9,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3\lambda & 3 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 0 & -4 & \lambda \end{vmatrix} = 3\lambda(2\lambda - 19).$$

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма является положительно определенной, если

$$\begin{cases}\Delta_1 > 0,\\ \Delta_2 > 0,\\ \Delta_3 > 0.\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}3\lambda > 0,\\ 6\lambda - 9 > 0,\\ 3\lambda(2\lambda - 19) > 0.\end{cases}$$

Решая систему, находим $\lambda \in (9,5;+\infty)$. Таким образом, квадратичная форма $G$ является положительно определенной при $\lambda \in (9,5;+\infty)$.

Согласно критерию Сильвестра, квадратичная форма является отрицательно определенной, если

$$\begin{cases}\Delta_1 < 0,\\ \Delta_2 > 0,\\ \Delta_3 < 0.\end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases}3\lambda < 0,\\ 6\lambda - 9 > 0,\\ 3\lambda(2\lambda - 19) < 0.\end{cases}$$

Решая систему, получаем, что система не имеет решения. Таким образом, квадратичная форма $G$ не является отрицательно определенной ни при каких значениях $\lambda$.

## Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте теорему о приведении квадратичной формы к каноническому виду.

2 Какой вид называется нормальным для квадратичной формы?

3 Какие миноры называются главными?

4 Сформулируйте этапы метода Лагранжа для нахождения канонического вида квадратичной формы.

5 Укажите алгоритм нахождения канонического вида квадратичной формы методом Якоби.

6 Что называется индексом инерции, положительным индексом инерции, отрицательным индексом инерции?

7 Классифицируйте квадратичные формы по каноническому виду.

8 Какая квадратичная форма называется положительно (отрицательно) определенной?

9 Какая квадратичная форма называется знакоопределенной?

10 Какая квадратичная форма называется квазизнакоопределенной?

11 Какая квадратичная форма называется знакопеременной?

12 Сформулируйте критерий Сильвестра знакопределенности квадратичной формы.

# Литература


1 Ильин, В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 223 с.

2 Ильин, В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 280 с.

3 Беклемешев, Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Д. В. Беклемешев. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 304 с.

4 Умнов, А. Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / А. Е. Умнов. – М. : МФТИ, 2011. – 570 с.

5 Березкина, Л. Л. Аналитическая геометрия и линейная алгебра / Л. Л. Березкина. – Минск : РИВШ, 2012. – 354 с.

6 Аналитическая геометрия в примерах и задачах / Н. Г. Абрашина-Жадаева [и др.]. – Минск : РИВШ, 2008. – 156 с.

7 Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии / А. А. Бурдун [и др.]. – Минск : Университетское, 1999. – 302 с.

8 Дадаян, А. А. Алгебра и геометрия : учебное пособие для студентов физико-математических факультетов / А. А. Дадаян, В. А. Дударенко. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. – 288 с.

9 Рублев, А. Н. Курс линейнеой алгебры и аналитической геометрии : учебник для студентов вузов / А. Н. Рублев. – М. : Высшая школа., 1972. – 421 с.

10 Алгебра и теория чисел. Линейная алгебра : практическое руководство по выполнению лабораторных работ / А. В. Бузланов, С. Ф. Каморников, В. С. Монахов. – Гомель : ГГУ им. Ф. Скорины, 2008. – 142 с.

11 Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. Ч. 1 / М. В. Милованов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 302 с.

12 Алгебра и аналитическая геометрия : в 2 ч. Ч. 2 / М. В. Милованов [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – 300 с.

13 Шикин, Е. В. Линейные пространства и отображения / Е. В. Шикин. – М. : МГУ, 1987. – 302 с.

14 Курс вышэйшай матэматыкі. Алгебра і геаметрыя, аналіз функцый адной зменнай / В. Н. Русак [і інш.]. – Мінск : Вышэйшая школа, 1994. – 431 с.

15 Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии : учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Р. Ф. Апатенок [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1986. – 272 с.

16 Апатенок, Р. Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии / Р. Ф. Апатенок, А. М. Маркина, В. Б. Хейнман. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 186 с.

*Производственно-практическое издание*

**Бородич** Тимур Викторович

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

Практическое руководство

Редактор *В. И. Шкредова*
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 21.02.2017. Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.
Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 141.

Издатель и полиграфическое исполнение:
учреждение образования
«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины»
Свидетельство о государственной регистрации издателя,
Изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.
Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.
Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.

Т. В. БОРОДИЧ

# СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ
# БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ



Гомель
2017