

Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования  
«Гомельский государственный университет  
имени Франциска Скорины»

**В. Ф. ШОЛОХ, А. Л. САМОФАЛОВ, Е. Л. ТИХОВА**

# **МЕХАНИКА**

Практическое пособие

для студентов специальности  
1–31 04 01 Физика (по направлениям)

Гомель  
ГГУ им. Ф. Скорины  
2016

УДК 531.8(076.5)  
ББК 22.2я73  
Ш786

Рецензенты:

кандидат физико-математических наук П. В. Астахов,  
кандидат физико-математических наук Д. Л. Коваленко

Рекомендовано к изданию научно-методическим советом  
учреждения образования «Гомельский государственный  
университет имени Франциска Скорины»

**Шолох, В. Ф.**

Ш786      **Механика** : практическое пособие / В. Ф. Шолох,  
А. Л. Самофалов, Е. Л. Тихова ; М-во образования Республики  
Беларусь, Гомельский гос. ун-т им. Ф. Скорины. – Гомель:  
ГГУ им. Ф. Скорины, 2016. – 46 с.  
ISBN 978-985-577-192-1

Целью практического пособия является методическое обеспечение выполнения лабораторных работ по дисциплине «Механика» студентами физических специальностей. Практикум содержит описания лабораторных работ по четырем разделам «Механики»: «Кинематика и динамика материальной точки», «Динамика системы материальных точек», «Динамика твердого тела», «Движение тел при наличии трения». Перечень и содержание лабораторных работ соответствует учебной программе дисциплины «Механика».

Издание адресовано студентам физических специальностей.

УДК 531.8(076.5)  
ББК 22.2я73

**ISBN 978-985-577-192-1**

© Шолох В. Ф., Самофалов А. Л.,  
Тихова Е. Л., 2016

© Учреждение образования «Гомельский  
государственный университет  
имени Франциска Скорины», 2016

## Оглавление

Предисловие .....	4
Тема 1. Кинематика и динамика материальной точки .....	5
Лабораторная работа 1.1. Изучение законов движения тела под действием постоянной силы .....	6
Тема 2. Динамика системы материальных точек .....	12
Лабораторная работа 2.1. Изучение закона соударения шаров .....	14
Тема 3. Динамика твердого тела .....	20
Лабораторная работа 3.1. Проверка основного уравнения динамики вращательного движения .....	23
Лабораторная работа 3.2. Изучение маятника Максвелла .....	29
Лабораторная работа 3.3. Определение момента инерции тела и проверка теоремы Штейнера методом крутильных колебаний .....	33
Тема 4. Движение тел при наличии трения .....	39
Лабораторная работа 4.1. Изучение сил внешнего трения .....	41
Литература .....	46

## Предисловие

В соответствии с учебным планом специальности 1–31 04 01 Физика (по направлениям) изучение дисциплины обязательного компонента «Механика» сопровождается лабораторными работами. Для выполнения лабораторных работ используются типовые лабораторные установки, а также оборудование, разработанное в лабораториях ГГУ имени Ф. Скорины. Подготовка к лабораторным работам осуществляется студентами самостоятельно: в лабораториях или в домашних условиях.

Цель данного практического пособия – помочь студентам самостоятельно изучить методику лабораторного эксперимента, ознакомиться с теоретическими основами изучаемых явлений и принципами работы лабораторных установок.

Издание содержит описания лабораторных работ и краткие теоретические сведения по четырем темам дисциплины обязательного компонента «Механика»: «Кинематика и динамика материальной точки», «Динамика системы материальных точек», «Динамика твердого тела», «Движение тел при наличии трения». Содержание теоретического материала и лабораторных работ соответствует учебной программе дисциплины «Механика». Каждая работа содержит краткое изложение сущности изучаемых явлений, сведения об экспериментальной методике, положенной в основу лабораторной работы, подробное описание методики проведения измерений. К каждой теме предлагаются вопросы для самоконтроля, призванные помочь студентам проконтролировать уровень своих знаний и степень усвоения материала.

Работа в лаборатории является одним из основных элементов процесса изучения физики, поскольку учит самостоятельно воспроизводить и анализировать важнейшие физические явления, получать правильные числовые значения измеряемых величин, сопоставлять их с имеющимися теоретическими и табличными значениями.

Каждая лабораторная работа рассчитана на одно занятие продолжительностью четыре академических часа.

Данное пособие написано авторами на основании многолетнего опыта проведения лабораторных работ по дисциплине «Механика».

# Тема 1. Кинематика и динамика материальной точки

1. Поступательное движение.
2. Равноускоренное прямолинейное движение.
3. Законы Ньютона.

## Основные понятия по теме

*Поступательное движение твердого тела* – это такое движение, при котором любая прямая, жестко связанная с телом, остается параллельной самой себе. Поступательное движение твердого тела будет прямолинейным, если траектории всех его точек – параллельные прямые линии.

Согласно *второму закону Ньютона*, ускорение  $\vec{a}$ , сообщаемое телу массой  $m$ , силой  $\vec{F}$ : а) пропорционально этой силе; б) обратно пропорционально массе тела:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (1.1)$$

Если тело движется с постоянным ускорением  $\vec{a} = \text{const}$ , то такое движение называется *равноускоренным*. Примерами равноускоренного движения могут служить: свободное падение тела, движение тела, брошенного горизонтально.

Мгновенное ускорение тела:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \quad (1.2)$$

где  $\vec{V}$  – мгновенная скорость,  
 $\vec{r}$  – радиус-вектор.

Тогда мгновенная скорость тела при равноускоренном движении

$$V(t) = V_0 + \int a dt = V_0 + at, \quad (1.3)$$

где  $V_0$  – скорость тела в начальный момент времени.

Координата тела в момент времени  $t$ :

$$x(t) = \int V(t) dt = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad (1.4)$$

Если в начальный момент времени тело покоилось, то есть  $V_0 = 0$ , то соотношения (1.3) и (1.4) упрощаются:

$$V(t) = at, \quad (1.5)$$

$$x(t) = \frac{at^2}{2}. \quad (1.6)$$

Используя (1.6), нетрудно доказать, что при равноускоренном движении пути  $X_1, X_2, X_3 \dots$ , проходимые за последовательно равные промежутки времени, пропорциональны ряду нечетных чисел, то есть имеет место соотношение

$$X_1 : X_2 : X_3 : X_4 \dots = 1 : 3 : 5 : 7 \dots \quad (1.7)$$

## Вопросы для самоконтроля

1. Назовите способы задания движения материальной точки (естественная, координатная и векторная формы).
2. Что такое скорость и ускорение? Нормальное и тангенциальное ускорения?
3. Постройте графики зависимости  $a(t)$ ,  $V(t)$  и  $x(t)$  для различных случаев равноускоренного движения ( $a > 0$ ,  $a < 0$ ).
4. Докажите соотношение (1.7).

## Лабораторная работа 1.1

### Изучение законов движения под действием постоянной силы

**Цель работы:** исследование законов кинематики и динамики поступательного движения тела на машине Атвуда.

**Приборы и принадлежности:** установка FPM-02, набор перегрузов.

### Описание установки

Основные законы кинематики и динамики равноускоренного движения (1.1), (1.5), (1.6), (1.7) могут быть проверены опытным путем на машине Атвуда. Машина Атвуда выполнена в виде типовой установки FPM-02, входящей в состав комплекта приборов для лабораторного практикума по курсу «Физические основы механики». Общий вид установки показан на рисунке 1.1.

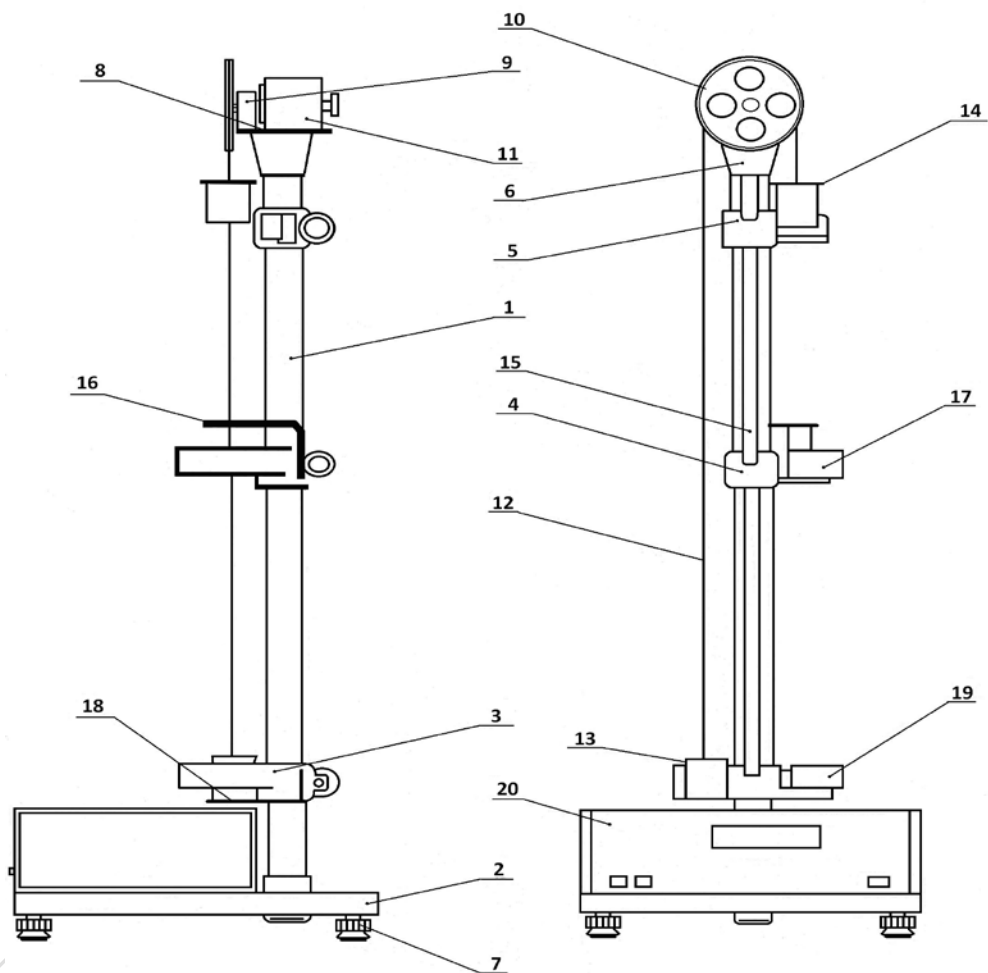


Рисунок 1.1 – Установка FPM-02

На вертикальной колонне 1, закрепленной в основании 2, укреплены три кронштейна: неподвижный нижний кронштейн 3 и два подвижных кронштейна – средний 4 и верхний 5, а также верхняя втулка 6.

Основание оснащено регулируемыми ножками 7, которые позволяют произвести выравнивание положения установки.

На верхней втулке при помощи верхнего диска 8 закреплен узел подшипника ролика 9, ролика 10 и электромагнит 11. Через ролик проходит нить 12 с привязанными на ее концах грузиками 13 и 14.

Электромагнит, после подведения к нему питающего напряжения при помощи фрикционной муфты, удерживает систему ролика с грузиками в состоянии покоя.

Верхний и средний кронштейны можно перемещать вдоль колонны и фиксировать в любом положении, устанавливая таким образом длину пути равноускоренного  $h$  и равномерного  $H$  движений. Для облегчения определения этих путей на колонне имеется миллиметровая шкала 15. Все кронштейны имеют указатель положения, а верхний кронштейн дополнительную черту, облегчающую точное согласование нижней грани верхнего, большего грузика с определенным началом пути движения.

На среднем кронштейне закреплено кольцо 16 и фотоэлектрический датчик 17. Кольцо 16 снимает с падающего вниз большого грузика дополнительный кольцеобразный перегрузок, а фотоэлектрический датчик в это время образует электрический импульс, сигнализирующий начало равномерного движения.

### **Функциональное назначение клавиш управления**

На лицевой панели секундомера размещены клавиши:

**СЕТЬ** – нажатие этой клавиши вызывает включение питающего напряжения и автоматический сброс цифрового индикатора (во всех рядах высвечивается цифра нуль и светятся лампочки фотодатчика);

**ПУСК** – нажатие этой клавиши освобождает электромагнит и генерирует импульс разрешения на измерение времени;

**СБРОС** – установка нуля индикатора. Нажатие этой клавиши вызывает сброс схем секундомера и фиксацию грузов в заданном положении с помощью электромагнита.

Для выполнения измерений вначале последовательно нажмите клавишу СЕТЬ, ПУСК, СБРОС, после чего установите груз на заданной высоте и зафиксируйте его, отжав клавишу ПУСК. Нажав клавишу ПУСК, измерьте время движения груза между верхним и нижним фотодатчиками. Нажав клавишу СБРОС, обнулите индикатор и вновь установите грузы на этой высоте. Отжав клавишу ПУСК, зафиксируйте грузы с помощью электромагнита. Перейдите к очередному измерению.

### **Ход работы**

#### **Упражнение 1. Исследование зависимости пути от времени при равноускоренном движении**

1. Ознакомьтесь с устройством установки FPM-02 и функциональным назначением клавиш управления.



2. С помощью ножек 7 установите колонну 1 в вертикальном положении. При этом груз 14 должен свободно проходить сквозь кольцо 16 и датчики 17 и 19.

3. Установите датчик 17 на расстоянии  $H = 5$  см от датчика 19.

4. Поместите на груз 14 указанный перегрузок и установите его на уровне датчика 17, измерьте время прохождения грузом расстояния  $H$ . Измерения времени проведите не менее пяти раз. Результаты измерения занесите в таблицу и обработайте, вычислив среднее значение  $\bar{t}$  и абсолютную погрешность  $\Delta t$ .

5. Последовательно увеличивая расстояние  $H$  на 5 см в интервале от 5 до 40 см, повторите измерения, описанные в пункте 4. Результаты занесите в таблицу и обработайте.

6. По данным таблицы постройте график зависимости  $H(t)$  и убедитесь в справедливости соотношения (1.6).

7. Используя график зависимости  $H(t)$ , проверьте справедливость соотношения (1.7).

8. По полученным данным постройте график зависимости  $H(t^2)$  и с его помощью определите ускорение  $a$  движения грузов.

9. Сделайте выводы.

## Упражнение 2. Исследование зависимости скорости от времени при равноускоренном движении

В упражнении проверяется справедливость формулы (1.5). Получим выражение, удобное для экспериментальной проверки этого соотношения на данной установке. Пусть груз 14 согласно рисунку 1.1, с помещенным на нем кольцеобразным перегрузом, начинает движение без начальной скорости от кронштейна 5. На пути между кронштейном 5 и датчиком 17 груз будет двигаться равноускоренно.

Следовательно,

$$h = \frac{a\tau^2}{2}, \quad (1.8)$$

где  $\tau$  – время прохождения грузом пути  $h$ .

Согласно (1.5), в конце пути  $h$ , груз 14 приобретает скорость и вместо (1.8) можно записать

$$h = \frac{V^2}{2a}. \quad (1.9)$$

Путь  $H$  между датчиками 17 и 19, после снятия кольцеобразного перегрузка кольцом 16, груз 14 проходит равномерно со скоростью  $V$ , приобретаемой им в конце пути. Если время движения груза по пути  $H$  равно  $t$ , то  $V = \frac{H}{t}$  и (1.9) принимает вид

$$h = \frac{H^2}{2at^2}. \quad (1.10)$$

Изменяя значение  $H$  и  $h$  при одной и той же перегрузке, из (1.10) получаем

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{H_1^2 t_2^2}{t_1^2 H_2^2}. \quad (1.11)$$

Экспериментальная проверка соотношения (1.11) позволяет сделать вывод о справедливости выражений (1.5) и (1.6), использованных при его выводе.

### **Выполнение упражнения 2**

1. Установите датчик 17 на заданной высоте  $H_1$ .
2. Поместите на груз 14 кольцеобразный перегрузок и измерьте время  $t_1$  прохождения грузом пути  $H_1$ . Измерения выполните не менее пяти раз. Результаты измерений занесите в таблицу и обработайте.
3. Установите датчик 17 на высоте  $H_2 \neq H_1$ , определите время  $\bar{t}_2 \pm \Delta t_2$ , аналогично пункту 2.
4. Проверьте справедливость формулы (1.11), учитывая погрешность измеренных величин.
5. Сделайте выводы.

### **Упражнение 3. Исследование зависимости ускорения от величины приложенной силы**

При выполнении этого упражнения необходимо, чтобы движущаяся масса оставалась постоянной, а величина действующей силы изменялась. Это можно осуществлять, перекладывая перегрузки массами  $m_1$  и  $m_2$  с одного груза на другой.

Сила, приводящая систему в движение, равна разности весов правого и левого движущихся тел. Если оба перегруза на правом грузе 14, то

$$F_1 = (m_1 + m_2)g. \quad (1.12)$$

Если перегруз меньшей массы  $m_2$  переложить на левое тело (груз 13), то

$$F_2 = (m_1 - m_2)g. \quad (1.13)$$

Для двух отмеченных случаев, на основании второго закона Ньютона можем записать

$$F_1 = (2m + m_1 + m_2)a_1 \text{ и } F_2 = (2m + m_1 + m_2)a_2, \quad (1.14)$$

где  $2m$  – масса грузов 13 и 14.

Из (1.12), (1.13), (1.14) получаем

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{a_1}{a_2}. \quad (1.15)$$

Определив значение ускорения  $a$  из формулы (1.6) и, считая, что  $h$  на протяжении опыта не изменяется, окончательно получаем

$$\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (1.16)$$

### Выполнение упражнения 3

1. Установите датчик 17 на заданной высоте  $H$ . Поместив на правый груз (14) два перегруза с массами  $m_1$  и  $m_2$  и, установив его на уровне датчика 17, измерьте время  $t_1$  равноускоренного движения груза. Измерения проведите не менее пяти раз. Результаты занесите в таблицу и обработайте.

2. Поместив перегруз меньшей массы на левый груз (13), повторите измерения пункта 2.

3. Проверьте справедливость формулы (1.16) с учетом погрешности измеренных величин.

4. Сделайте выводы.

## Тема 2. Динамика системы материальных точек

1. Законы сохранения в механике.
2. Столкновения.
3. Количественные характеристики удара.

### Основные понятия по теме

Законы сохранения являются фундаментальными законами природы. В механике к ним относятся: закон сохранения импульса (количества движения), закон сохранения энергии, закон сохранения момента импульса.

В замкнутой системе имеет место закон сохранения импульса – *импульс замкнутой системы с течением времени не изменяется:*

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = 0 \text{ или } \vec{p} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{V}_i = \text{const}, \quad (2.1)$$

где  $m_i \vec{V}_i$  – импульс  $i$ -го тела,  
 $\vec{p}$  – импульс системы.

В механике различают два вида энергии – кинетическую  $W_k$  и потенциальную  $W_n$ . Применительно к задачам механики закон сохранения энергии гласит: *в консервативной системе механическая энергия может переходить из одного вида в другой и передаваться от одного тела другому, но ее количество остается неизменным:*

$$W = W_k + W_n = \text{const}, \quad (2.2)$$

где  $W$  – полная механическая энергия системы.

Наблюдать превращение кинетической энергии в потенциальную и обратно можно на примере удара двух тел.

*Ударом* называется явление конечного изменения скорости твердых тел за весьма малый промежуток времени, возникающее при столкновении тел. Физические явления при столкновениях тел довольно сложны. Сталкивающиеся тела деформируются, возникают упругие силы и силы трения, в телах возбуждаются колебания, волны и т. д.

Процесс удара можно разбить на две фазы. Первая фаза – сжатие материала: центры масс сталкивающихся тел сближаются. В момент наибольшей деформации скорость сближающихся тел обращается в нуль, кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию упругой деформации и частично в другие виды энергии.

Вторая фаза – восстановление: потенциальная энергия упругой деформации превращается в кинетическую энергию тел, тела начинают расходиться, и в конце второй фазы соприкосновение тел прекращается. В случае, если соударяются абсолютно упругие тела, потенциальная энергия упругой деформации в первой фазе полностью переходит в кинетическую энергию движения тел, это – *упругий* удар.

Удар совершенно неупругих тел заканчивается на первой фазе. Такой удар называют *абсолютно неупругим*. При этом тела после удара движутся вместе с одинаковой скоростью.

Различают удар прямой и косой, центральный и нецентральный. Если при ударе скорости центров масс лежат на линии удара, то удар называют *прямым*, в противном случае – *косым*. Если при ударе центры масс лежат на линии удара, удар называют *центральный*.

Рассмотрим центральный абсолютно упругий удар двух шаров. Пусть шары массой  $m_1$  и  $m_2$  движутся до соударения со скоростями  $\vec{V}_1$  и  $\vec{V}_2$ , а после соударения – со скоростями  $\vec{U}_1$  и  $\vec{U}_2$ . На основе законов сохранения механической энергии и импульса можно записать:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2}, \quad (2.3)$$

$$m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2 = m_1 \vec{U}_1 + m_2 \vec{U}_2. \quad (2.4)$$

Перепишав эти равенства в виде

$$m_1 (\vec{V}_1 - \vec{U}_1) (\vec{V}_1 + \vec{U}_1) = m_2 (\vec{U}_2 - \vec{V}_2) (\vec{U}_2 + \vec{V}_2),$$

$$m_1 (\vec{V}_1 - \vec{U}_1) = m_2 (\vec{U}_2 - \vec{V}_2),$$

нетрудно получить

$$\vec{V}_1 + \vec{U}_1 = \vec{U}_2 + \vec{V}_2 \text{ или } \vec{V}_1 - \vec{V}_2 = \vec{U}_2 - \vec{U}_1 = -(\vec{U}_1 - \vec{U}_2).$$

Из них следует, что при абсолютно упругом ударе шаров относительная скорость их меняет свое направление на противоположное, оставаясь неизменной по величине.

Для количественной оценки восстановления кинетической энергии вводят коэффициент восстановления энергии

$$K_э = \frac{W_{2k}}{W_{1k}}, \quad (2.5)$$

где  $W_{1k}$  – суммарная кинетическая энергия тел до удара;

$W_{2k}$  – суммарная кинетическая энергия тел после удара.

Наряду с  $K_э$  пользуются коэффициентом восстановления скорости

$$K_c = \frac{|\vec{U}_1 - \vec{U}_2|}{|\vec{V}_1 - \vec{V}_2|}. \quad (2.6)$$

Коэффициент  $K_c$  в отличие от  $K_э$  позволяет количественно оценить, насколько реальный удар близок к абсолютно упругому удару.

## Вопросы для самоконтроля

1. Опишите внутренние и внешние силы.
2. Что такое импульс? Как формулируется закон сохранения импульса?
3. Какие различают типы ударов твердых тел?
4. Дайте количественные характеристики удара твердых тел.
5. Как изменяются кинетическая энергия шаров и их относительная скорость при различных видах удара: абсолютно упругом, неупругом и абсолютно неупругом?

## Лабораторная работа 2.1

### Изучение закона соударения шаров

**Цель работы:** на примерах упругого и неупругого ударов проверить закон сохранения импульса и определить количественные характеристики соударения шаров.

**Приборы и принадлежности:** установка FPM-08, набор шаров, линейка, весы, пресс форма, пластилин.

## Описание установки

Общий вид прибора для исследования столкновения шаров FPM-08 представлен на рисунке 2.1. Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2, которые позволяют произвести выравнивание прибора.

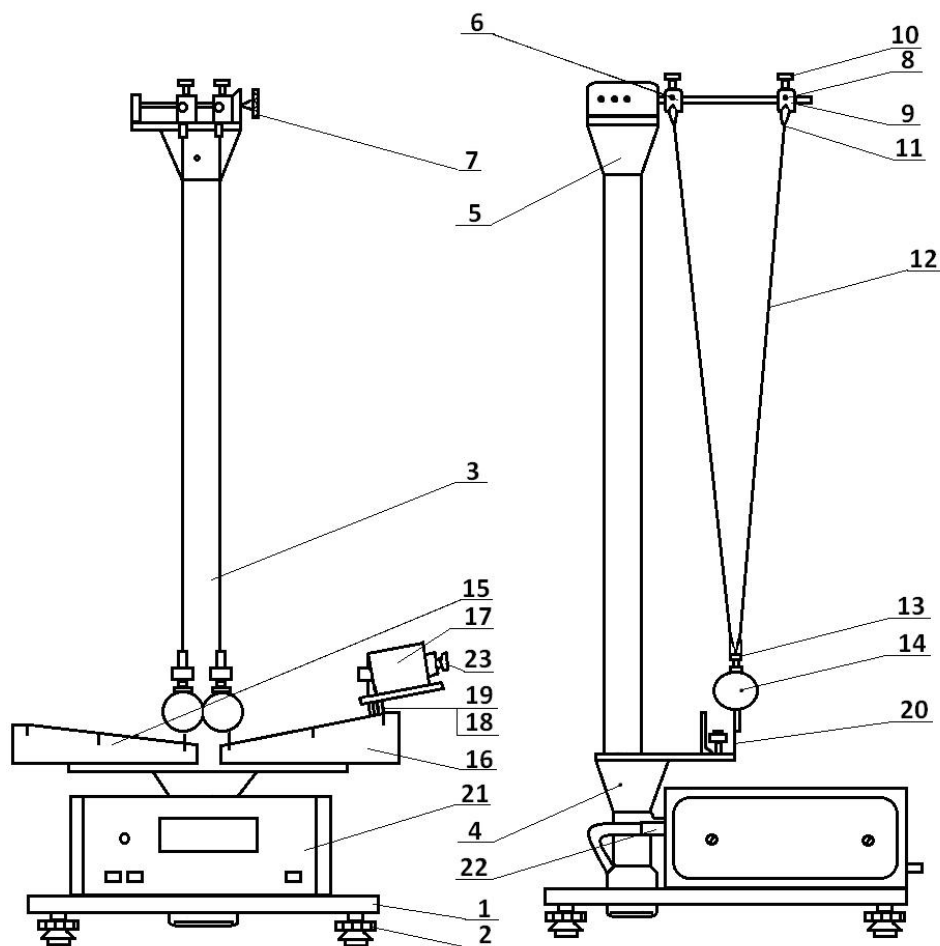


Рисунок 2.1 – Установка FPM-08

В основании закреплена колонна 3, к которой прикреплен нижний кронштейн 4 и верхний кронштейн 5.

На верхнем кронштейне прикреплены кронштейны со стержнями 6 и вороток 7, позволяющий установить расстояния между шарами. На стержнях 6 помещены передвигаемые держатели 8 с втулками 9, фиксированные при помощи болта 10. Через подвесы 11 проведены провода 12, подводящие напряжение к подвесам 13, а через них к шарам 14. После отвинчивания винтов, в подвесах 11, можно установить длину подвески шаров.

На нижнем кронштейне закреплены угольники со шкалами 15, 16, а на специальных направляющих электромагнит 17.

После отвинчивания болтов 18, 19 электромагнит можно передвигать вдоль правой шкалы и фиксировать высоту его установки. Силу электромагнита можно регулировать воротком 23.

Угольники со шкалами также могут передвигаться вдоль нижнего кронштейна. Для изменения их положения надо отпустить гайку 20.

К основанию прибора привинчен микросекундомер FPM-16 – 21 передающий через разъем 22 напряжение к шарам и электромагниту.

## Ход работы

### Упражнение 1. Проверка закона сохранения импульса и определение коэффициентов восстановления упругого удара

Изучается прямой центральный удар шаров, подвешенных на нитях, причем один из шаров (левый) до удара покоится. В процессе движения шары будут испытывать сопротивление окружающей среды, однако конструкция и условия работы таковы, что этим фактором можно пренебречь. Скорости шаров до и после удара определим из закона сохранения энергии

$$m_1gh_0 = \frac{m_1V_1^2}{2}, \quad \frac{m_1U_1^2}{2} = m_1gh_1, \quad \frac{m_2U_2^2}{2} = m_2gh_2, \quad (2.7)$$

где  $h_0$  – высота начального положения ударяющего (правого) шара согласно рисунку 2.2;

$h_1, h_2$  – высоты, на которые поднимаются ударяющий (правый) и ударяемый (левый) шары после соударения;

$\vec{V}_1$  – скорость правого шара в момент удара;

$\vec{U}_1$  и  $\vec{U}_2$  – скорости шаров после удара.

Из (2.7) получаем

$$V_1 = \sqrt{2gh_0}, \quad U_1 = \sqrt{2gh_1}, \quad U_2 = \sqrt{2gh_2}. \quad (2.8)$$

В данной работе проще и точнее можно измерить не высоту подъема, а угол, на который был отклонен шар.

Из рисунка 2.2 следует, что

$$h_0 = 2l \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}, \quad h_1 = 2l \sin^2 \frac{\alpha_1}{2}, \quad h_2 = 2l \sin^2 \frac{\alpha_2}{2}, \quad (2.9)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2$  – наибольшие углы отклонения правого и левого шаров после первого удара;

угол  $\alpha_0$  – определяет начальное положение правого шара.



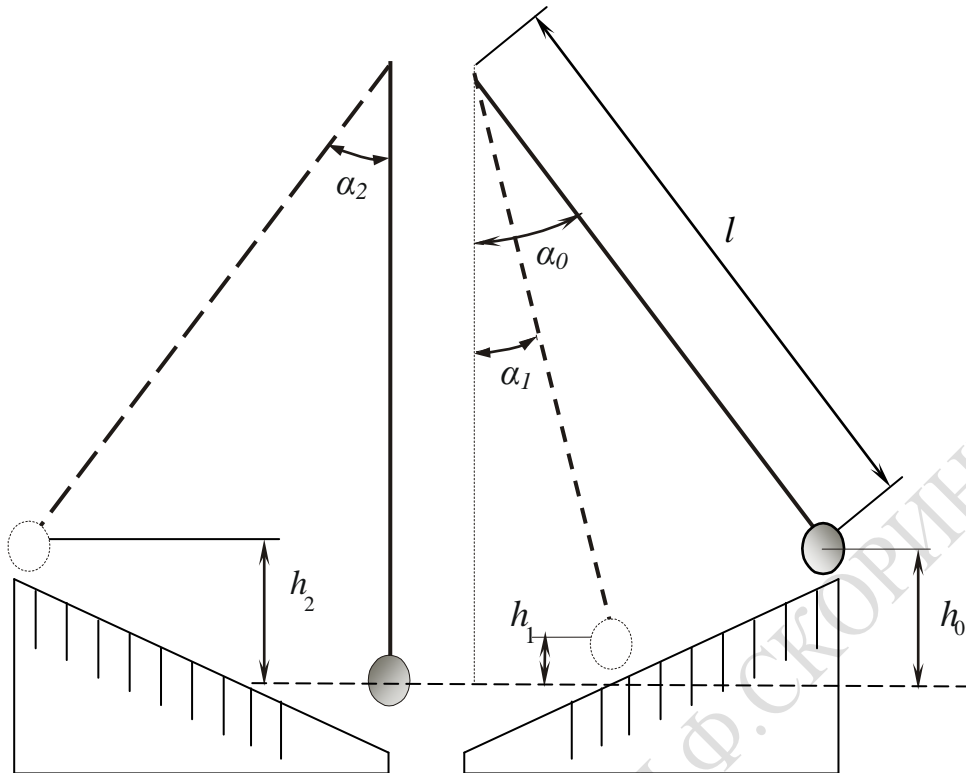


Рисунок 2.2 – Принципиальная схема установки

Подставив (2.9) в (2.8), получаем окончательные выражения для скоростей шаров:

$$V_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}; \quad U_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}; \quad U_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_2}{2}. \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) выражение (2.4) и коэффициенты восстановления (2.5), (2.6) принимают вид:

$$m_1 \sin \frac{\alpha_0}{2} = \pm m_1 \sin \frac{\alpha_1}{2} + m_2 \sin \frac{\alpha_2}{2}, \quad (2.11)$$

$$K_c = \frac{\sin \frac{\alpha_2}{2} \mp \sin \frac{\alpha_1}{2}}{\sin \frac{\alpha_0}{2}}, \quad (2.12)$$

$$K_s = \frac{m_1 \sin^2 \frac{\alpha_1}{2} + m_2 \sin^2 \frac{\alpha_2}{2}}{m_1 \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}. \quad (2.13)$$

## Выполнение упражнения 1

1. Определите на технических весах массы шаров.
2. Закрепите шары на нитях подвеса. При этом шар большей массы поместите по указанию преподавателя. В положении равновесия шары должны чуть касаться друг друга.
3. Проверьте совпадение нулевых отметок шкал с указателями положения шаров.
4. Подведите правый шар к электромагниту и включите его питание.
5. Сделайте пробный пуск правого шара (путем отключения электромагнита), устраните неточности движения шаров.
6. Зафиксировав начальный угол отклонения  $\alpha_0$  правого шара, произведите им удар по покоящемуся шару и сделайте отсчет первого отклонения обоих шаров  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . При этом же значении угла  $\alpha_0$  повторите опыт не менее 10 раз. Полученные значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  занесите в таблицу и обработайте.
7. По полученным данным проверьте выполнения равенства (2.11), выражающего закон сохранения импульса.
8. По формулам (2.12), (2.13) вычислите коэффициенты восстановления скорости  $K_c$  и энергии  $K_\epsilon$ . Сделайте выводы.
9. По указанию преподавателя повторите эксперимент при другом значении  $\alpha_0$  или для шаров других масс.

## Упражнение 2. Определение времени упругого удара и средней силы соударения шаров

Одна из форм записи второго закона Ньютона имеет вид

$$\vec{F} \cdot \tau = \Delta \vec{p}, \quad (2.14)$$

где  $\tau$  – время, в течение которого на тело действовала сила  $\vec{F}$ , изменившая импульс тела на величину  $\Delta \vec{p}$ .

Применительно к удару в уравнении (2.14)  $F$  – средняя сила удара,  $\tau$  – время удара, то есть время соприкосновения ударяющихся тел,

$$\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{V},$$

где  $m$  – масса одного из соударяющихся тел (второе тело до удара неподвижно);

$\Delta\vec{V}$  – изменение скорости этого тела, возникающее в результате удара.

При упругом центральном ударе шаров одинаковой массы бьющий шар после удара остается в покое, изменение его скорости  $\Delta\vec{V}$  равно скорости в момент удара, которая, согласно (2.10), равна

$$V = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}. \quad (2.15)$$

С учетом (2.15), (2.14) средняя сила упругого удара:

$$F = \frac{2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_0}{2}}{\tau} \cdot m. \quad (2.16)$$

## Выполнение упражнения 2

1. Поместите на нити подвеса шары одинаковой массы и отрегулируйте их положение.
2. Измерьте время  $\tau$  соударения шаров не менее 10 раз. Результаты занесите в таблицу и обработайте.
3. Определив длину подвеса, массу одного шара и значение угла  $\alpha_0$ , по формуле (2.16) рассчитайте среднюю силу удара и оцените погрешность результата.

## Тема 3. Динамика твердого тела

1. Момент силы.
2. Момент инерции.
3. Основное уравнение динамики вращательного движения.

### Основные понятия по теме

Вращательное действие силы характеризуется моментом силы относительно точки и относительно оси.

Для того, чтобы определить момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$ , проведем согласно рисунку 3.1а из точки  $O$  радиус-вектор  $\vec{r}$  в точку приложения силы. Моментом силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  называется векторная физическая величина, равная векторному произведению радиуса-вектора  $\vec{r}$  на силу  $\vec{F}$ :

$$\vec{M} = [\vec{r}\vec{F}]. \quad (3.1)$$

Модуль момента силы  $M = rF \sin \alpha = Fd$ , где  $d = r \sin \alpha$  – плечо силы.

Для того, чтобы определить момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $OZ$ , выберем согласно рисунку 3.1б на оси  $OZ$  произвольную точку, найдем момент силы относительно этой точки, а затем спроецируем на ось  $OZ$  момент силы относительно точки. Таким образом, момент силы относительно оси – величина скалярная.

Разложим силу на три составляющие (рисунок 3.1б):

$\vec{F}_{\parallel}$  – осевая, параллельная оси вращения,

$\vec{F}_R$  – радиальная, перпендикулярная оси вращения,

$\vec{F}_{\tau}$  – касательная, перпендикулярная  $\vec{r}$  и оси вращения.

Составляющую  $\vec{F}_{\tau}$  можно определить как проекцию силы  $\vec{F}$  на направление вектора  $\vec{\tau}$ , направленного по касательной к окружности радиусом  $R$ , проведенной через точку приложения силы перпендикулярно оси вращения.

Составляющие  $\vec{F}_R$  и  $\vec{F}_{\parallel}$  вращения тела относительно оси  $OZ$  не вызывают. Вращающее действие силы  $\vec{F}$  обусловлено составляющей  $\vec{F}_{\tau}$ . Можно показать, что момент силы  $\vec{F}$  относительно оси  $OZ$ :

$$M_Z = F_{\tau}R.$$

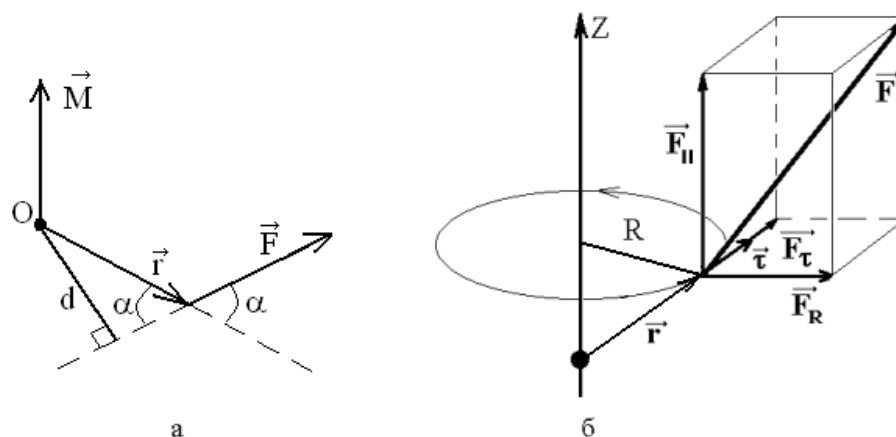


Рисунок 3.1 – Момент силы относительно точки (а) и относительно оси (б)

Инертные свойства тела при вращательном движении характеризует *момент инерции*. Он зависит от распределения массы тела относительно оси вращения. Момент инерции материальной точки массой  $m$ , находящейся на расстоянии  $r$  от оси:

$$I = mr^2. \quad (3.2)$$

Момент инерции системы материальных точек с массами  $m_i$ , удаленных от оси на расстояние  $r_i$ , определяется как:  $I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$ .

Момент инерции однородного сплошного тела

$$I = \int_{(m)} dm \cdot r^2 = \int_{(V)} \rho \cdot r^2 dV,$$

где  $\rho$  – плотность тела;

$V$  – объем тела.

Моменты инерции однородных тел массой  $m$ , имеющих правильную геометрическую форму и равномерное распределение массы по объему представлены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Моменты инерции однородных тел

Тело	Положение оси вращения	Момент инерции
1	2	3
Полый тонкостенный цилиндр радиуса $r$	Ось симметрии	$I = mr^2$

Окончание таблицы 3.1

1	2	3
Сплошной цилиндр или диск радиуса $r$	Ось симметрии	$I = \frac{1}{2}mr^2$
Прямой тонкий стержень длиной $L$	Ось перпендикулярна стержню и проходит через его середину	$I = \frac{1}{12}mL^2$
Шар радиуса $r$	Ось проходит через центр шара	$I = \frac{2}{5}mr^2$

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс, то момент инерции относительно любой другой параллельной оси определяется **теоремой Штейнера**: момент инерции тела  $I$  относительно произвольной оси равен сумме момента его инерции относительно параллельной оси, проходящей через центр масс  $C$  тела и произведения массы  $m$  тела на квадрат расстояния  $a$  между осями (рисунок 3.2).

$$I = I_c + ma^2. \quad (3.3)$$

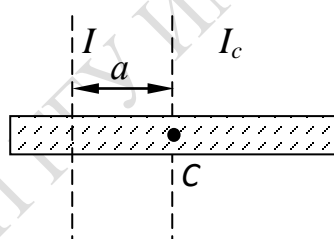


Рисунок 3.2 – К теореме Штейнера

Основное уравнение динамики вращательного движения, описывающее вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, имеет вид:

$$\vec{M} = I\vec{\beta}, \quad (3.4)$$

где  $\vec{M}$  – суммарный момент внешних сил, действующих на тело;

$I$  – момент инерции тела относительно оси вращения;

$\vec{\beta}$  – угловое ускорение тела.

Записав векторное уравнение (3.4) в проекциях на ось вращения, нетрудно получить выражение для углового ускорения

$$\beta = \frac{M}{I}. \quad (3.5)$$

Из (3.5) следует:

а) при постоянном моменте инерции  $I$  угловое ускорение тела  $\beta$  прямо пропорционально действующему на него моменту внешних сил  $M$  :

$$\beta \sim M \text{ при } I = \text{const}, \quad (3.6)$$

б) угловое ускорение  $\beta$ , сообщаемое телу постоянным моментом сил  $M$ , обратно пропорционально моменту инерции тела  $I$  :

$$\beta \sim \frac{1}{I} \text{ при } M = \text{const}. \quad (3.7)$$

## Вопросы для самоконтроля

1. Выведите основное уравнение динамики вращательного движения.
2. Дайте понятие о моменте инерции. Вычислите момент инерции простейших однородных тел: стержня, диска, прямоугольной пластинки.
3. Дайте понятие момента силы.

## Лабораторная работа 3.1

### Проверка основного уравнения динамики вращательного движения.

### Понятие о моменте инерции

**Цель работы:** исследовать зависимость момента инерции системы от распределения масс относительно оси вращения и осуществить экспериментальную проверку основного уравнения динамики вращательного движения.

**Приборы и принадлежности:** установка FPM-06, набор грузов.

### Описание установки

Для выполнения работы используется типовая установка FPM-06, входящая в состав комплекта приборов для лабораторного практикума по курсу «Физические основы механики». Общий вид установки изображен на рисунке 3.3.

Основой установки служит маятник Обербека, который представляет собой два взаимно перпендикулярных стержня 1, закрепленных в барабане 2 способном вращаться вокруг горизонтальной оси. На стержни 1 насаживаются грузы 3, расстояние от которых до оси вращения можно изменять.

На верхней втулке 4, укрепленной на вертикальной колонне 5, закреплен подшипниковый узел блока 6 и блок 7. Через блок 7 переброшена нить 8, один конец которой прикреплен к двухступенчатому шкиву 9, а на второй подвешиваются грузы 10, приводящие систему во вращательное движение. На неподвижной втулке 11 расположен электромагнит 12, который после подключения к нему напряжения питания, удерживает маятник Обербека в состоянии покоя. Подвижной кронштейн 13 можно перемещать вдоль колонны 5 и фиксировать в любом положении, изменяя таким образом длину пути грузов 10, которая определяется по нанесенной на колонне миллиметровой шкале 14. Для определения времени движения грузов 10 служат фотодатчики 15 и 16. Время движения грузов высвечивается на табло секундомера 17.

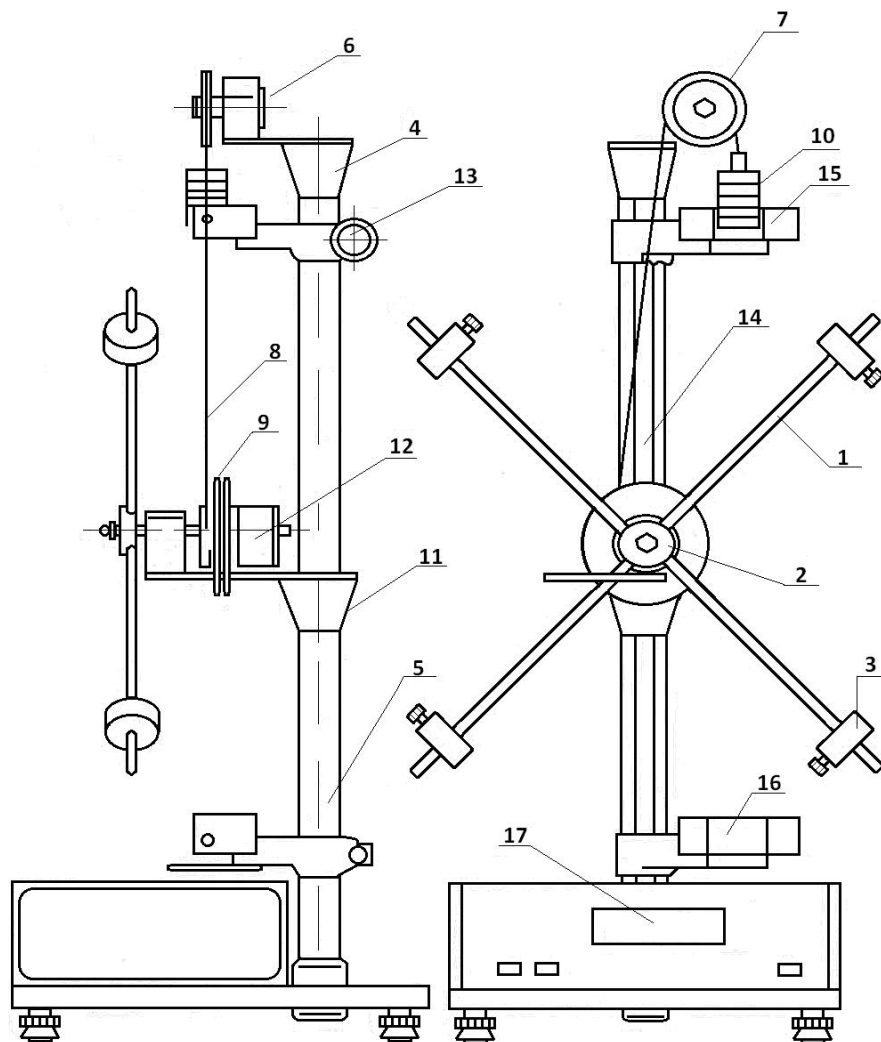


Рисунок 3.3 – Установка FPM-06 (маятник Обербека)



Получим выражение 3.5 применительно к маятнику Обербека. Пренебрегая массой блока 7 (рисунок 3.3), массой нити 8, ее толщиной и силой трения о блок 7, запишем уравнения движения системы:

$$(m_0 + m)a = (m_0 + m)g - T, \quad (3.8)$$

$$I\beta = Tr - M_{mp}, \quad (3.9)$$

где  $m$  – масса грузов 10;  
 $m_0$  – масса платформы, на которой они расположены;  
 $T$  – проекция силы натяжения нити на направление движения грузов 10;  
 $(m_0 + m)g$  – проекция силы тяжести грузов 10 и платформы;  
 $a$  – ускорение грузов 10;  
 $r$  – радиус шкива 9;  
 $M_{mp}$  – проекция момента силы трения в барабане 2 и блоке 9 на направление оси вращения.

Момент инерции системы состоит из двух частей:  $I = I_0 + I^*$ , где  $I_0$  – момент инерции шкива 9 и стержней 1, который не изменяется во время опыта и  $I^*$  – момента инерции грузов 3 на стержнях 1, изменяющийся при изменении их числа и положения относительно оси вращения.

Определив из уравнения (3.8) значение  $T$  и подставив его в (3.9), находим

$$I\beta = (m_0 + m)rg \left(1 - \frac{a}{g}\right) - M_{mp}. \quad (3.10)$$

Учитывая, что  $\frac{a}{g} \ll 1$  и пренебрегая моментом сил трения  $M_{mp}$ , из (3.10) имеем

$$\beta = \frac{(m_0 + m)gr}{I}. \quad (3.11)$$

Если грузы 10 опускаются за время  $t$  с высоты  $h$ , то ускорение их движения

$$a = \frac{2h}{t^2}.$$

Таким же будет и ускорение любой точки на поверхности шкива 9, вращающегося с угловым ускорением  $\beta$ . Следовательно,

$$\beta = \frac{a_\tau}{r} = \frac{2h}{r \cdot t^2}. \quad (3.12)$$

Подставив (3.12) в (3.11) и решив полученное уравнение, относительно  $\frac{1}{t^2}$ , получим соотношение

$$\frac{1}{t^2} = K \frac{(m_0 + m)}{I}, \quad (3.13)$$

постоянство величины  $K = \frac{gr^2}{2h}$  обеспечивается неизменностью величин  $r$  и  $h$  на протяжении опыта.

Согласно (3.13), справедливость следствия (3.6) может быть установлена по характеру зависимости величин  $\frac{1}{t^2}$  от  $m$ , определяемой экспериментально при условии  $I = I_0 + I^* = \text{const}$ .

Потребовав постоянства массы  $m$  грузов 10 на протяжении опыта, что эквивалентно условию  $M = \text{const}$ , сведем проверку следствия (3.7) к определению характера зависимости величины  $\frac{1}{t^2}$  от  $I = I_0 + I^*$ .

Практически более удобно исследовать характер обратной зависимости, то есть зависимости величины  $t^2$  от  $I$ , которая, согласно (3.13), является линейной

$$t^2 = \frac{1}{K(m+m_0)} (I_0 + I^*) = C_0 + CI^*. \quad (3.14)$$

Момент инерции  $I^*$  можно изменить либо меняя число грузов 3 на стержнях 1 (рисунок 3.3), либо изменяя их положение относительно оси вращения. Так как в работе используется вторая возможность, то удобно принять момент инерции  $I^*$  грузов 3, расположенных на стержнях 1 на расстоянии  $R = l$  от центра вращения, за 1 условную единицу. Поскольку

$$I^* \sim R^2, \quad (3.15)$$

то момент инерции  $I^*$  при увеличении расстояния  $R$  в два ( $R = 2l$ ), три ( $R = 3l$ ) и так далее раз, соответственно равен 4, 9 и так далее

условным единицам. Справедливость утверждения (3.15) проверяется в первом упражнении. Получим формулу, удобную для его экспериментальной проверки.

При  $I^* = 0$  (грузов 3 на стержнях нет) из (3.14), при учете сделанных приближений следует, что момент инерции  $I_0$  шкива 9 и стержней 1 относительно оси вращения равен

$$I_0 = \frac{(m_0 + m)gr^2}{2h} t_0^2, \quad (3.16)$$

где  $t_0$  – время опускания груза с высоты  $h$ .

При  $I^* \neq 0$  аналогично находим

$$I = \frac{(m_0 + m)gr^2}{2h} t^2. \quad (3.17)$$

Из (3.16) и (3.17) видно, что при одинаковом значении  $h$ ,  $m$  и  $r$

$$I^* = I - I_0 = \frac{(m_0 + m)gr^2}{2h} (t^2 - t_0^2),$$

то есть о справедливости утверждения (3.15) можно судить, построив график зависимости величины  $t^2 - t_0^2$  от  $R$ .

### Ход работы

Упражнение 1. Исследование зависимости момента инерции системы от распределения масс относительно оси вращения

1. Проверьте вертикальность колонны 5 и убедитесь в исправности электропитания и наличии заземления.

2. Снимите грузы 3 со стержней 1 и поместите на платформу 10 заданное преподавателем число грузов. Измерьте время  $t_0$  опускания грузов 10 с заданной высоты  $h$  не менее пяти раз. Результаты измерения занесите в таблицу и обработайте, определите наилучшее значение  $\bar{t}_0$ .

3. Поместите на стержни 1 грузы 3 на заданном преподавателем расстоянии  $R$  от оси вращения, измерьте время  $t$  опускания грузов аналогично пункту 3.

4. Изменяя расстояние  $R$  в 2, 3, 4 и так далее раз, повторите действия пункта 4.

5. По данным таблицы рассчитайте величины  $(\bar{t}^2 - \bar{t}_0^2)$  для каждого значения  $R$ .

6. Постройте график зависимости  $(\bar{t}^2 - \bar{t}_0^2) = f(R)$  по экспериментальным точкам.

7. Сделайте вывод.

### **Упражнение 2. Исследование зависимости углового ускорения от момента силы при постоянном моменте инерции**

1. Поместите на стержни 1 на заданном преподавателем расстоянии  $R$  грузы 3.

2. Поместив на платформу 10 один груз, измерьте время  $t_1$  его опускания с заданной высоты  $h$  не менее пяти раз. Результаты измерения занесите в таблицу и обработайте, определив  $\bar{t}_1$ .

3. Изменяя массу  $m$  груза 10, повторите действия пункта 2.

4. По данным таблицы рассчитайте величины  $\left(\frac{1}{\bar{t}_1^2}\right)$ .

5. Постройте график зависимости величины  $\left(\frac{1}{\bar{t}_1^2}\right)$  от  $m_i + m_0$  по экспериментальным точкам и определите ее аналитическое выражение методом наименьших квадратов.

6. Сделайте выводы.

### **Упражнение 3. Исследование зависимости углового ускорения от момента инерции при постоянном моменте силы**

1. Положите на платформу 10 указанное преподавателем число грузов.

2. Установив грузы 3 на стержнях 1 на минимально возможном расстоянии от оси вращения, измерьте время опускания грузов 10 с заданной высоты  $h$  не менее пяти раз. Результаты занесите в таблицу и обработайте.

3. Последовательно изменяя момент инерции  $I^*$  в 4, 9, 16 и так далее раз, повторите действия пункта 2.

4. По данным таблицы рассчитайте величины  $\bar{t}_i^2$  и постройте график зависимости величины  $\bar{t}_i^2$  от  $I^*$  по экспериментальным точкам.
5. Сделайте выводы.

## Лабораторная работа 3.2

### Изучение маятника Максвелла

**Цель работы:** определение основных характеристик маятника Максвелла.

**Приборы и принадлежности:** установка FPM-03, набор колец, штангенциркуль.

#### Описание установки

Общий вид маятника Максвелла показан на рисунке 3.4.

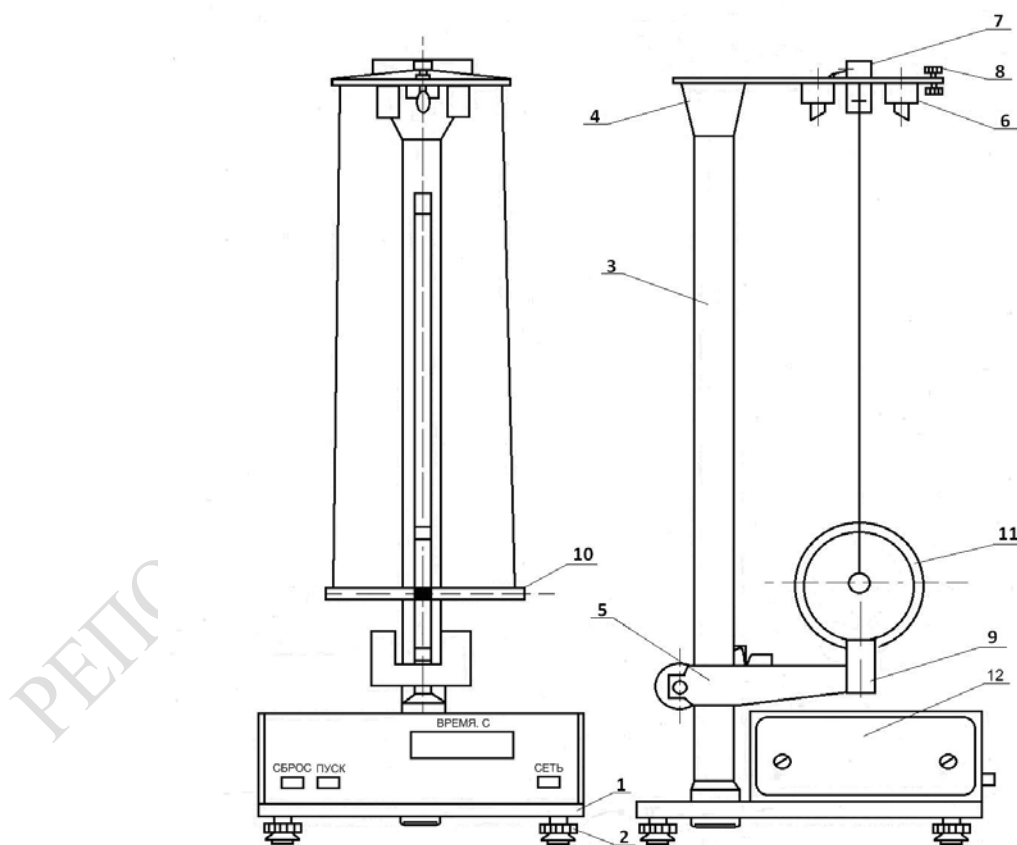


Рисунок 3.4 – Установка FPM-03

Основание 1 оснащено регулируемыми ножками 2. В основании закреплена колонна 3, к которой прикреплен неподвижный верхний

кронштейн 4 и подвижный нижний кронштейн 5. На верхнем кронштейне находится электромагнит 6, фотоэлектрический датчик 7 и вороток 8 для регулирования длины бифилярного подвеса маятника.

Маятник состоит из ролика, закреплённого на оси 10 и подвешенного на бифиляре. На ролик накладываются сменные кольца 11, изменяя момент инерции системы. Длина маятника определяется по миллиметровой шкале на колонне прибора. Время опускания маятника определяется секундомером 12 при прохождении фотоэлектрического датчика 9.

**Функциональное назначение клавишей на панели установки СЕТЬ** – выключатель сети. Нажатие этой клавиши включает напряжение питания;

**СБРОС** – установка нуля измерения;

**ПУСК** – управление электромагнитом.

Движение твёрдого тела можно рассматривать как движение системы большого числа материальных точек, сохраняющих неизменное положение друг относительно друга. Одним из примеров такой системы является маятник Максвелла. Он представляет собой диск радиуса  $R$ , насаженный на ось диаметра  $2r$ , с обоих концов которой намотана упругая нить. Система находится в поле силы тяжести. Схематически маятник Максвелла изображён на рисунке 3.5.

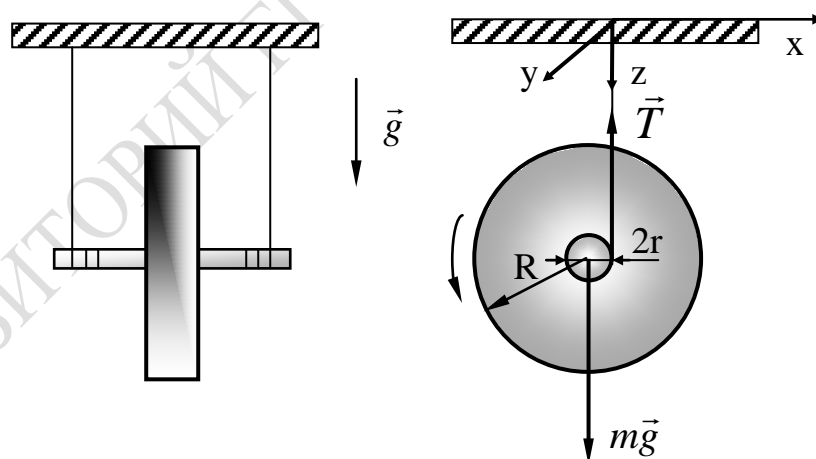


Рисунок 3.5 – Маятник Максвелла

Запишем уравнение второго закона Ньютона и основное уравнение динамики вращательного движения для описания движения маятника Максвелла:

$$\begin{cases} m\vec{g} + 2\vec{T} = m\vec{a} \\ [\vec{r}2\vec{T}] = I\vec{\beta} \end{cases}, \quad (3.18)$$

здесь  $m$  – масса маятника;

$I$  – момент инерции маятника относительно оси вращения, совпадающей с осью диска;

$\vec{T}$  – сила натяжения одной нити подвеса;

$\vec{a}$  – ускорение маятника;

$\vec{\beta}$  – угловое ускорение маятника.

В проекциях на оси координат система уравнений (3.18) примет вид:

$$\begin{cases} mg - 2T = ma \\ r2T = I\beta \end{cases}. \quad (3.19)$$

Решив систему уравнений (3.19), относительно  $T$  и  $I$  находим

$$T = \frac{m}{2}(g - a), \quad (3.20)$$

$$I = \frac{mr}{\beta}(g - a). \quad (3.21)$$

Учитывая, что

$$\beta = \frac{a}{r}, \quad (3.22)$$

$$a = \frac{2h}{t^2}, \quad (3.23)$$

где  $h$  – длина маятника;

$t$  – время его падения.

С учётом (3.22) и (3.23) для силы натяжения нити и момента инерции маятника окончательно получим

$$T = \frac{m}{2} \left( g - \frac{2h}{t^2} \right), \quad (3.24)$$

$$I = \frac{md^2}{4} \left( \frac{g}{a} - 1 \right) = \frac{md^2}{4} \left( \frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (3.25)$$

где  $d$  – внешний диаметр оси маятника.

## **Ход работы**

### **Упражнение 1. Определение ускорения движения маятника Максвелла и силы натяжения в нитях подвеса**

1. Подготовьте прибор к работе. Для этого выполните следующие действия:

а) нижний кронштейн прибора передвиньте и зафиксируйте в крайнем нижнем положении;

б) на ролик маятника наложите кольцо, указанное преподавателем, прижимая его до упора;

в) на ось маятника намотайте нить подвеса и зафиксируйте его. Проверьте, отвечает ли нижняя грань кольца нулю шкалы на колонке. Если нет, отвинтите верхний кронштейн и отрегулируйте высоту;

г) деблокируйте гайку воротка для регулирования длины бифилярной подвески;

Сделайте длину нити такой, чтобы край стального кольца после опускания маятника находился на 2 мм ниже оптической оси нижнего фотоэлектрического датчика 9. Одновременно произведите корректировку установки маятника, обращая внимание на то, чтобы его ось была параллельна основанию прибора. Блокируйте вороток;

д) отожмите клавишу ПУСК;

е) намотайте на ось маятника нить подвеса, обращая внимание на то, чтобы она наматывалась равномерно, виток к витку;

ж) зафиксируйте маятник с помощью электромагнита;

2. Поверните маятник в направлении движения на угол  $\approx 5^\circ$ .

3. Нажмите последовательно: СБРОС, ПУСК. Снимите показания прибора, определив также длину маятника по колонке и время его падения. Повторите опыт 10 раз.

4. Используя формулу (3.23), вычислите значение  $a$ . Определите погрешность.

5. Определите массу маятника, по формуле (3.24) рассчитайте силу натяжения нитей.

6. Сделайте выводы.

### **Упражнение 2. Определение момента инерции маятника Максвелла**



1. Подготовьте прибор к работе, согласно рекомендациям упражнения 1.

2. Проведите 10 измерений времени падения маятника. Результаты занесите в таблицу и обработайте.

3. Определите высоту падения маятника.

4. Определите массу маятника по формуле.

$$m = m_o + m_p + m_k,$$

где  $m_o$  – масса оси маятника;

$m_p$  – масса ролика;

$m_k$  – масса кольца, (значение масс с точностью 0,5 % указаны на соответствующих деталях).

5. Определите внешний диаметр  $d$  оси маятника.

6. Определите экспериментальное значение момента инерции  $I_э$  данного маятника, пользуясь формулой (3.25). Оцените погрешность полученного результата.

7. Измерьте диаметры оси маятника  $d$ , ролика  $D_p$ , внутренний и внешний диаметр съёмного кольца  $D_{внеш}$  и  $D_{внутр}$ .

8. Вычислите теоретическое значение  $I_m$  момента инерции маятника Максвелла по формуле

$$I_m = I_o + I_p + I_k, \quad (3.26)$$

где  $I_o = \frac{1}{8} m_o d^2$  – момент инерции оси маятника;

$I_p = \frac{1}{8} m_p D_p^2$  – момент инерции ролика;

$I_k = \frac{1}{8} m_k (D_{внеш}^2 + D_{внутр}^2)$  – момент инерции кольца.

Определите погрешность.

9. Сравните значения  $I_э$  и  $I_m$ . Сделайте выводы.

### Лабораторная работа 3.3

#### Определение момента инерции тела и проверка теоремы Штейнера методом крутильных колебаний

**Цель работы:** изучение метода крутильных колебаний и применение его для определения момента инерции тела и проверки теоремы Гюйгенса–Штейнера.

**Приборы и принадлежности:** установка (трифилярный подвес), секундомер, штангенциркуль, линейка, образцы для измерений.

### Описание установки

Установка для определения момента инерции тела, которая применяется в данной работе, называется трифилярным подвесом.

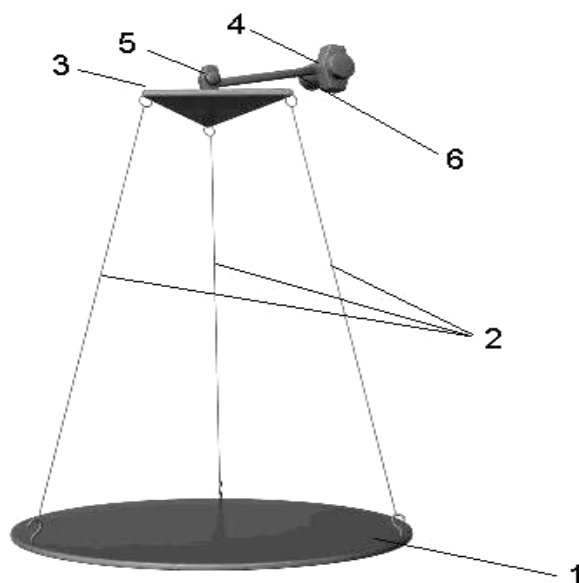


Рисунок 3.6 – Установка для определения момента инерции тела

Согласно рисунку 3.6 она состоит из диска 1 (платформы), горизонтально подвешенной на трех симметрично расположенных нитях 2.

Вверху нити прикреплены к основанию 3, имеющему три симметрично расположенных выступа. Основание с помощью болта 5 и пластины 6 соединено с кронштейном 4.

Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. При этом центр тяжести платформы перемещается вдоль оси вращения.

Пусть масса платформы  $m_0$ , вращаясь в некотором направлении, поднялась на высоту  $h$  от положения равновесия. Изменение ее потенциальной энергии при этом составит

$$W_1 = m_0 gh. \quad (3.27)$$

Возвратившись в положение равновесия, платформа приобретет угловую скорость  $\omega_0$ , и кинетическая энергия ее будет

$$W_2 = \frac{1}{2} I \omega_0^2, \quad (3.28)$$

где  $I$  – момент инерции платформы относительно оси вращения.  
 Пренебрегая работой сил трения, закон сохранения механической энергии запишется в виде

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = m_0gh. \quad (3.29)$$

При малой амплитуде, колебания платформы будут гармоническими, то есть зависимость углового смещения  $\beta$  от времени  $t$  имеет вид

$$\beta = \alpha \sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right), \quad (3.30)$$

где  $\alpha$  – амплитуда;  
 $T$  – период колебаний.

В свою очередь угловая скорость

$$\omega = \frac{d\beta}{dt} \text{ или } \omega = \frac{2\pi\alpha}{T} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right).$$

Максимальное изменение угловой скорости  $\omega_0$ , соответствующее моменту времени, когда платформа проходит через положение равновесия

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha}{T}. \quad (3.31)$$

Из (3.29) и (3.31) получим

$$m_0gh = \frac{1}{2}I\left(\frac{2\pi\alpha}{T}\right)^2. \quad (3.32)$$

Найдем  $h$ . Обозначим согласно рисунку 3.7:

$l$  – длина нитей подвеса;

$R$  – расстояние от центра платформы до точек крепления нитей на ней;

$r$  – радиус окружности, на которой лежат точки крепления нитей

К ОСНОВАНИЮ.

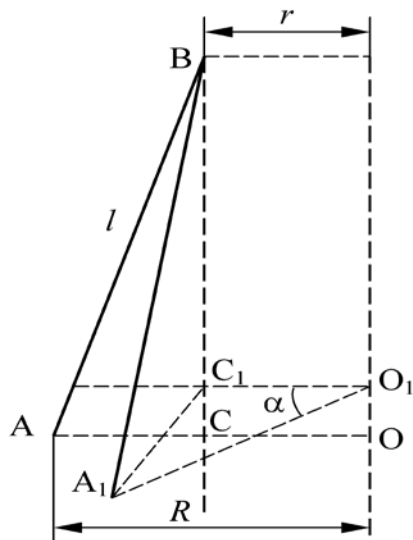


Рисунок 3.7 – К расчету  $h$

Из рисунка 3.7 видим, что

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}.$$

В свою очередь  $(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2$ ,

а  $(BC_1)^2 = (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha)$ ,

тогда 
$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2}{BC + BC_1}.$$

При малых углах смещения

$$\left( \sin \frac{\alpha}{2} \right)^2 \approx \frac{\alpha^2}{4}, \quad (BC + BC_1) = 2l,$$

учитывая это, получим

$$h = \frac{Rr\alpha^2}{2l}, \tag{3.33}$$

тогда из (3.32) и (3.33) находим

$$I = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2 . \quad (3.34)$$

## Ход работы

### Упражнение 1. Определение момента инерции тела

1. Убедитесь в том, что платформа расположена горизонтально.
2. Определите  $R, r, l$  (массу платформы  $m_0$  узнайте у преподавателя,  $R$  и  $r$  удобно определить из известной геометрической формулы, измерив предварительно с помощью линейки расстояние между точками подвеса двух нитей вверху и внизу).
3. Путем несильного нажатия на край платформы 1 (рисунок 3.6) сообщите платформе вращательный импульс и при помощи секундомера измерьте время 10–20 полных ее колебаний. Опыт повторите 5 раз.
4. Найдите период  $T_0$  этих колебаний и по формуле (3.34) определите  $I_0$  – момент инерции платформы. Результаты занесите в таблицу 1.
5. Платформу нагрузите исследуемым телом (большой цилиндр), предварительно определив его массу  $m$ . Определите период колебаний  $T_1$  системы тело-платформа (масса системы –  $m + m_0$ ) и момент инерции системы  $I_1$ . Величина момента инерции тела  $I$  найдется как разница  $I = I_1 - I_0$ . Опыт повторите 5 раз. Результаты измерений занесите в таблицу 2.
6. Найдите ошибку определения  $I$ .
7. Сравните полученное значение  $I$  и  $I_0$  с теоретическим, вычисленным по формуле момента инерции для данного тела.

### Упражнение 2. Проверка теоремы Гюйгенса – Штейнера (Штейнера – Журавского)

1. Возьмите два одинаковых тела (маленькие цилиндры) и в соответствии с упражнением 1 определите их момент инерции  $2I_2$ . Для этого положите тела одно на другое в центре платформы так, чтобы центры масс тел лежали на одной вертикали с центром масс платформы. Момент инерции одного тела относительно проходящей через центр масс оси будет равен  $I_2$ . Опыт повторите 5 раз. Результаты занесите в таблицу 3.

2. Расположите тела на некотором расстоянии друг от друга симметрично относительно центра платформы.

3. Определите расстояние  $a$  от центра масс каждого тела до оси вращения. Методом крутильных колебаний определите момент инерции системы тел  $I_0 + 2I_3$ . Найдите  $I_3$  – момент инерции одного тела относительно оси проходящей через центр масс платформы. Опыт повторите 5 раз. Результаты занесите в таблицу 4.

4. Найдите  $I_3$  по теореме Штейнера

$$I_3 = I_2 + ma^2, \quad (3.35)$$

где  $m$  – масса тела.

Для  $I_2$  и  $a$  возьмите значения, полученные опытным путем.

5. Сравните значения  $I_3$ , полученные по формуле (3.35) и экспериментально.

6. Найдите ошибки определения  $I_2$  и  $I_3$ .

## Тема 4. Движение тел при наличии трения

1. Статическое трение.
2. Кинематическое трение.
3. Значение сил трения в природе и технике.

### Основные понятия по теме

Во всех реальных механических процессах и системах имеют место силы трения, действия которых в большинстве случаев связано с превращением механической энергии в тепло. Силы трения делят на силы внешнего трения и силы внутреннего трения.

Под *внешним трением* понимают силу сопротивления, тангенциальную относительно перемещения двух твердых тел при их соприкосновении. В свою очередь, внешнее трение принято разделять на статическое и кинетическое. *Сила статического трения (трения покоя)* это сила, которая проявляется между соприкасающимися поверхностями тел, неподвижных относительно друг друга. *Кинематическое трение* – это трение, возникающее между соприкасающимися телами, движущимися друг относительно друга. В зависимости от характера движения различают два вида кинетического трения: трение скольжения и трение качения.

Для трения скольжения выполняется закон Кулона – Амонтона: величина силы трения скольжения  $F_{mp}$  пропорциональна силе  $N$  нормального давления

$$F_{mp} = \mu N, \quad (4.1)$$

где  $\mu$  – коэффициент пропорциональности, именуемый коэффициентом трения скольжения. Он зависит от тщательности обработки трущихся поверхностей, их чистоты, температуры пар трения и других факторов.

Если тело поместить на горизонтальную поверхность, а затем ее наклонять, то при некотором угле наклона  $\beta$  плоскости к горизонту, тело начнет скользить, то есть трение покоя сменится трением скольжения. Из этого угла несложно определить коэффициент трения покоя

$$\mu = \operatorname{tg} \beta. \quad (4.2)$$

Выясним причину возникновения трения качения.

Рассмотрим цилиндр, катящийся по горизонтальной плоскости с постоянной скоростью  $\vec{V}_0$  (рисунок 4.1). Из-за деформации поверхности перед катящимся цилиндром возникает своеобразная «ступенька». Пусть  $\vec{Q}$  – сила реакции со стороны «ступеньки». Нормальная составляющая  $\vec{Q}_n$  силы реакции равна силе  $\vec{N}$  нормального давления цилиндра на плоскость:  $Q_n = N$ . Тангенциальная составляющая  $\vec{Q}_\tau$  представляет собой силу трения, препятствующую качению цилиндра.

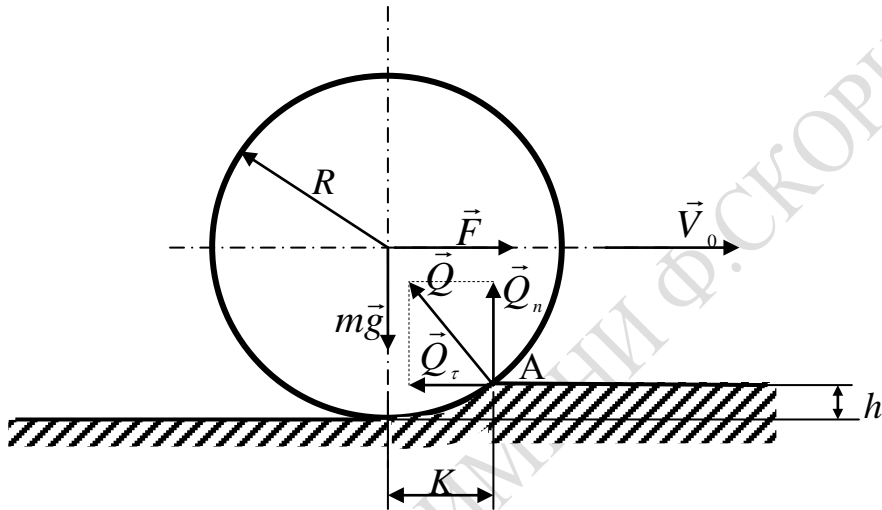


Рисунок 4.1 – Цилиндр, катящийся по горизонтальной плоскости

Для того, чтобы цилиндр двигался по плоскости равномерно, необходимо: а) наличие внешней силы  $\vec{F}$ , компенсирующей действие силы трения; б) равенство нулю суммарного момента сил, действующих на цилиндр.

Запишем уравнение моментов относительно мгновенной оси вращения цилиндра, проходящей через точку А:

$$mgK - FR = 0, \quad (4.3)$$

где  $K$  – плечо силы тяжести.

При записи (4.3) учтено, что высота «ступеньки»  $h$  много меньше радиуса  $R$  цилиндра ( $h \ll R$ ).

Учитывая, что  $|\vec{F}| = |\vec{F}_{тр.к}|$ , из (4.3) для силы трения качения получаем следующее выражение

$$F_{тр.к} = K \frac{mg}{R}. \quad (4.4)$$



Величину  $K$  называют коэффициентом трения качения. В отличие от коэффициента статического трения  $\mu$  коэффициент  $K$ , являясь плечом силы тяжести, имеет размерность длины.

Трение качения возникает, например, при перекатывании цилиндра или шара по поверхности твердого тела.

## Вопросы для самоконтроля

1. Что такое силы трения? Каковы их особенности?
2. Как зависят силы трения от скорости движения?
3. Как зависят силы трения покоя и силы трения скольжения от угла наклона плоскости?
4. Выведите формулы (4.2) и (4.4).

## Лабораторная работа 4.1

### Изучение сил внешнего трения

**Цель работы:** ознакомиться с методом определения коэффициента внешнего трения при помощи наклонного маятника. Измерить коэффициенты статического трения и трения качения для ряда материалов.

**Приборы и принадлежности:** наклонная плоскость, установка ФРМ–07, набор грузов.

#### Описание установки

Общий вид установки ФРМ-07 (наклонный маятник) представлен на рисунке 4.2.

На основании 2 прикреплены секундомер 1 и колонна с червячной передачей 3. Червячная передача, при вращении воротка 4 позволяет изменять угол наклона несущей опоры 5. Для отсчета угла наклона используется шкала 6. На несущей опоре 5 прикреплен маятник (шар на нити), а в ее основании шкала 7 (для отсчета угла отклонения маятника) и фотодатчик 8, позволяющий фиксировать число и время колебаний маятника. В шкалу 7 вмонтировано устройство для смены образцов. Шары маятника заменяются путем свинчивания их с указательного стержня 9.

В данной работе коэффициент трения качения  $K$  определяется методом наклонного маятника, представляющего из себя шарик, подвешенный на нити и катящийся по наклонной плоскости (рисунок 4.3). Затухание такого маятника обусловлено главным образом трением

качения. Расчетную формулу для определения  $K$  можно получить, приравняв работу сил трения и энергию, рассеянную за  $n$  полных колебаний маятника.

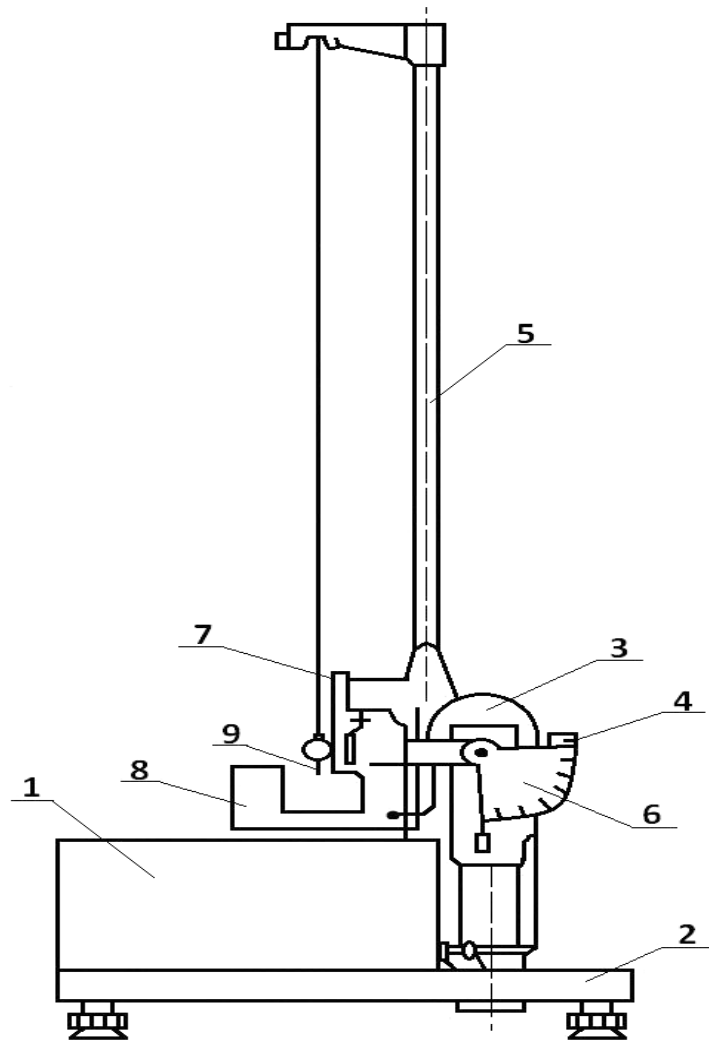


Рисунок 4.2 – Установка FPM-07

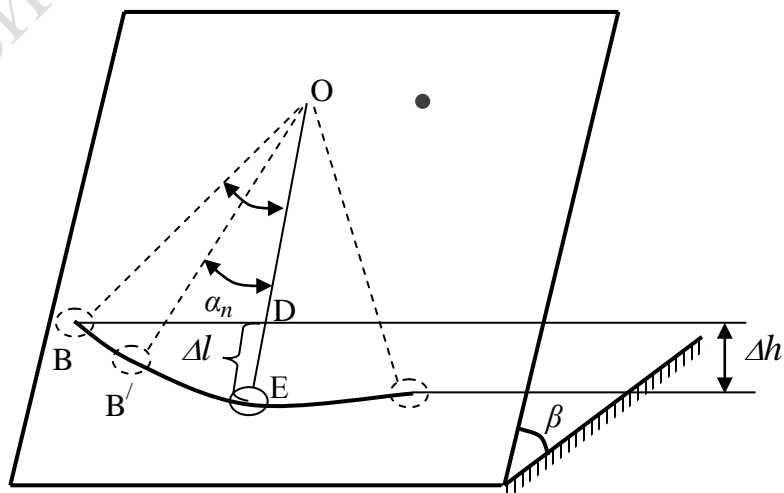


Рисунок 4.3 – Наклонная плоскость

За  $n$  полных колебаний при переходе из положения  $B$  в положение  $B'$  согласно рисунку 4.3 маятник теряет энергию  $\Delta E = mg\Delta h$ , равную работе сил сопротивления на пройденном пути  $S$ :

$$\Delta E = \Delta A + \Delta A_1, \quad (4.5)$$

где  $\Delta A = F_{mp} S$  – работа силы трения;

$\Delta A_1$  – работа по преодолению сопротивления среды и трения в подвесе маятника;

$\Delta h$  – потеря высоты центром тяжести шара.

Пренебрегая  $\Delta A_1$ , ввиду ее малости имеем

$$mg\Delta h = F_{mp} S. \quad (4.6)$$

Учитывая (4.4), после геометрических преобразований получим

$$mg\Delta l \sin \beta = Kmg \cos \beta \frac{S}{R}, \quad (4.7)$$

откуда для  $K$  получаем

$$K = \frac{\Delta l R}{S} \operatorname{tg} \beta, \quad (4.8)$$

где  $R$  – радиус шара;

$\beta$  – угол наклона плоскости;

$$\Delta l = OE - OD.$$

Если  $\alpha_0$  – угол отклонения маятника в начальный момент,  $\alpha_n$  – угол отклонения после  $n$  полных колебаний,  $L$  – длина маятника, то путь, который проходит центр тяжести маятника за  $n$  колебаний

$$S = 4Ln\alpha_{cp},$$

где

$$\alpha_{cp} = \frac{(\alpha_0 + \alpha_n)}{2}.$$

Считая углы  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  малыми ( $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$ ), окончательно для коэффициента трения качения  $K$  получаем

$$K = \frac{Rtg\beta(\cos \alpha_n - \cos \alpha_0)}{2n(\alpha_0 + \alpha_n)} \approx Rtg\beta \left( \frac{\alpha_0 - \alpha_n}{4n} \right), \quad (4.9)$$

здесь  $\alpha_0$  и  $\alpha_n$  – значение углов в радианах.

## Ход работы

### Упражнение 1. Определение коэффициента статического трения

Установка для определения коэффициента статического трения состоит из наклонной плоскости, сопряженной с транспортером, служащим для отсчета угла наклона плоскости к горизонту.

1. Установите наклонную плоскость в горизонтальном положении.
2. Поместите на плоскость указанный образец и, наклоняя ее, зафиксируйте угол наклона  $\beta$ , при котором началось движение образца. Измерения повторите не менее 5–10 раз. Результаты занесите в таблицу и обработайте, вычислив  $\bar{\beta} \pm \Delta\beta$ .
3. По формуле (4.2) рассчитайте коэффициент статического трения.
4. Повторите упражнение для других пар трения.
5. Сделайте выводы.

### Упражнение 2. Определение коэффициента трения качения

1. Установите испытуемый плоский образец в устройство на шкале 7 (установка FPM–07).
2. При помощи регулируемых ножек основания, установите маятник в вертикальном положении. При этом указательный стержень 9 должен находиться против нулевой отметки шкалы 7.
3. Включите прибор в сеть.
4. При заданном угле наклона колонны ( $25–60^\circ$ ) отклоните шар от положения равновесия на угол  $\alpha_0$  и, нажав клавишу СБРОС, без толчка отпустите маятник. Спустя 7–10 полных колебаний нажмите клавишу СТОП и визуально зафиксируйте угол отклонения маятника  $\alpha_n$ . Результаты измерений  $\alpha_0$ ,  $n$ ,  $\alpha_n$  занесите в таблицу.

5. При тех же значениях  $\beta$ ,  $n$ ,  $\alpha_0$  повторите измерения  $\alpha_n$  не менее 10–15 раз. Результаты занесите в таблицу и обработайте.
6. Измерьте штангенциркулем радиус шарика  $R$ .
7. По формуле (4.9) рассчитайте коэффициент трения качения.
8. Повторите упражнение, изменив пару трения. Для этого необходимо поменять либо плоский образец в шкале 7, либо шарик маятника.
9. Сделайте выводы.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

## Литература

1. Элементарный учебник физики: в 3 т. / под ред. Г. С. Ландсберга. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – Т. 1: Механика. Теплота. Молекулярная физика. – 616 с.
2. Сивухин, Д. В. Общий курс физики: в 5 т. / Д. В. Сивухин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011. – Т. 1: Механика. – 560 с.
3. Матвеев, А. Н. Механика и теория относительности : учеб. для студентов вузов / А. Н. Матвеев. – М. : ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век», 2003. – 432 с.
4. Стрелков, С. П. Механика: учебник для студентов вузов / С. П. Стрелков. – 4-е изд., стер. – Санкт-Петербург : Лань, 2005. – 560 с.
5. Савельев, И. В. Курс общей физики : учеб. пособие для студентов вузов: в 4 т. Т. 1. Механика. Молекулярная физика и термодинамика / И. В. Савельев. – М. : КНОРУС, 2009. – 528 с.
6. Иродов, И. Е. Основные законы механики / И. Е. Иродов. – М. : Высшая школа, 1997. – 248 с.
7. Яворский, Б. М. Справочник по физике / Б. М. Яворский, А. А. Детлаф, А. К. Лебедев. – М. : Мир и образование, 2006. – 1056 с.
8. Никитин, С. Ю. Механика: учебно-методическое пособие / С. Ю. Никитин, С. С. Чесноков; под ред. В. А. Маркова. – М. : Изд. отдел факультета ВМиК МГУ им. М. В. Ломоносова, 2006. – 300 с.
9. Шолох, В. Ф. Физика. Механика. Практикум: учеб. пособие / В. Ф. Шолох. – Минск : ИВЦ Минфина, 2013. – 231 с.

Производственно-практическое издание

**Шолох Владимир Федорович,  
Самофалов Андрей Леонидович,  
Тихова Елена Леонидовна**

## **МЕХАНИКА**

Практическое пособие

Редактор *В. И. Шкредова*  
Корректор *В. В. Калугина*

Подписано в печать 14.09.2016. Формат 60x84 1/16.

Бумага офсетная. Ризография. Усл. печ. л. 2,8.

Уч.-изд. л. 3,1. Тираж 25 экз. Заказ 526.

Издатель и полиграфическое исполнение:  
учреждение образования

«Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины».

Свидетельство о регистрации издателя, изготовителя,

Распространителя печатных изданий № 1/87 от 18.11.2013.

Специальное разрешение (лицензия) № 02330 / 450 от 18.12.2013.

Ул. Советская, 104, 246019, г. Гомель.





**В. Ф. ШОЛОХ, А. Л. САМОФАЛОВ,  
Е. Л. ТИХОВА**

# **МЕХАНИКА**

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

Гомель  
2016