

О ВЫВОДЕ ГАМИЛЬТОНИАНА ЛИНЕЙНОЙ МОЛЕКУЛЫ

А. Я. Цауне

Изучаются принципиальные вопросы вывода гамильтониана. Выясняется смысл условий Вильсона—Говарда (УВГ), вводится неголономное условие, доопределяющее поведение подвижной системы в линейной молекуле и получаются выражения моментов импульса, удовлетворяющие обычным условиям коммутации и УВГ. Указывается путь построения гамильтониана как в схеме Вильсона и Говарда, так и при непосредственном переходе к молекулярным координатам и приводится окончательное выражение гамильтониана.

Из трех условий Экарта [1], определяющих ориентацию подвижной системы осей молекулы, в линейных молекулах одно обращается тождественно в нуль. Это приводит к введению $3N-5$ колебательных координат, и возникает вопрос исключения одной вращательной степени свободы, что обычно достигается путем наложения конечных (голономных) ограничений на углы Эйлера, полагая, например, угол чистого вращения $\alpha=0$. Некоторые специфические следствия такого подхода для трехатомных линейных молекул были впервые рассмотрены в [2] и далее в общем виде подробно исследованы в [3]. Общий результат можно сформулировать так: при наложении любого голономного ограничения на углы Эйлера необходимо возникают следующие трудности.

1. Не выполняются обычные коммутационные соотношения

$$L_\alpha L_\beta - L_\beta L_\alpha = -i\hbar \sum_\gamma \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} L_\gamma \quad (\alpha, \beta, \gamma = x, y, z) \quad (1)$$

между компонентами модифицированного [2, 3] оператора полного момента импульса относительно подвижных осей (здесь $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — абсолютно антисимметричный единичный псевдотензор).

2. Не выполняются условия Вильсона—Говарда (УВГ), которым должны удовлетворять квантовомеханические операторы момента импульса в соответствующей схеме вывода гамильтониана. Следует отметить, что только в этой схеме, в отличие от других, УВГ учитываются явно, хотя имеют общетеоретический характер, что будет показано ниже.

Попытка избавиться от трудности, связанной с исключением одного угла Эйлера, привела к довольно искусственному понятию изоморфного гамильтониана, введение которого вряд ли можно рассматривать как логически последовательную ступень вывода.

Оказывается однако, что введение неголономного ограничения на ориентацию подвижных осей в линейной молекуле снимает все указанные трудности и приводит к последовательному выводу гамильтониана в различных его схемах.

Условие Вильсона—Говарда как условие самосопряженности операторов

Следуя [4], записываем эти условия в виде

$$s^{1/2} \sum_i \sum_m s^{mi} p_i s_{km} s^{-1} = s^{-1/2} p_k, \quad s = \det(s_{im}) = s' = \sin \theta, \quad (2)$$

где s^{mi} , s_{km} — вещественные функции независимых переменных. Вводимые в [4] импульсы \mathcal{M}'_m связаны с каноническими импульсами p_i следующим образом

$$\mathfrak{M}'_m = \sum_i s^{mi} p_i, \quad p_i = \sum_m s_{im} \mathfrak{M}'_m, \quad \sum_n s_{kn} s^{nj} = \delta_{kj}. \quad (3)$$

Теперь легко видеть, что УВГ (2) можно преобразовать к виду

$$\mathfrak{M}'_j = s^{-1} \sum_k p_k s^{jk} s. \quad (4)$$

Ниже показано, что справа стоит выражение, определяющее оператор, сопряженный к \mathfrak{M}' , т. е. УВГ есть условия самосопряженности

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}'^*. \quad (5)$$

Действительно, пусть имеется дифференциальный оператор n -го порядка одной независимой переменной

$$\tau = \sum_{j=0}^n a_j(t) \left(\frac{d}{dt}\right)^j, \quad (6)$$

где $a_j(t)$ — некоторые, достаточное число раз дифференцируемые комплекснозначные функции от t . Тогда [5], сопряженный дифференциальный оператор, имеет вид

$$\tau^* = \sum_{j=0}^n (-1)^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j \overline{a_j(t)},$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Это выражение справедливо при условии нормировки без весового множителя, т. е. при

$$\int \overline{\psi(t)} \psi(t) dt = 1.$$

Сопряженный оператор определяется через исходный при помощи скалярного произведения в гильбертовом пространстве следующим основным соотношением [5]

$$(\psi, \tau f) = (\tau^* \psi, f), \quad f \in D(\tau), \quad \psi \in D(\tau^*), \quad (7)$$

где $D(\tau)$ и $D(\tau^*)$ — области определения соответствующих операторов (в физических приложениях эти области обычно неявно подразумеваются совпадающими). И если перейти к нормировке с вещественным весовым множителем

$$\int \overline{\psi(t)} \psi(t) s'(t) dt = 1$$

и воспользоваться координатным представлением соотношения (7), то оператор, сопряженный (6), будет иметь вид

$$\tau'^* = s'^{-1}(t) \sum_{j=0}^n (-1)^j \left(\frac{d}{dt}\right)^j \overline{a_j(t)} s'(t). \quad (8)$$

Переходя к квантовомеханическим операторам импульса путем замены $(d/dt) \rightarrow -i\hbar(d/dt) = p$ в предыдущем выводе, получаем вместо (6) и (8) соответственно

$$T = \sum_{j=0}^n a_j(t) p^j, \quad T^* = s'^{-1}(t) \sum_{j=0}^n p^j \overline{a_j(t)} s'(t).$$

В частном случае, когда T содержит лишь один член в первой степени, имеем

$$T_1 = a_1(t) p, \quad T_1^* = s'^{-1}(t) p \overline{a_1(t)} s'(t).$$

Импульсы \mathfrak{M} (3) представляют собой суммы слагаемых типа T_1 . Поэтому переход к сопряженному выражению можно проводить с каждым слагаемым в отдельности. Условие нормировки молекулярных волновых функций имеет вид [4]

$$\int \bar{\psi} \psi \sin \theta d\theta d\varphi d\chi dQ_1 dQ_2 \dots = 1,$$

где φ, θ, χ — углы Эйлера, а Q_1, Q_2, \dots — остальные переменные. Принимая во внимание второе равенство в (2) и сопоставляя правую часть (4) с T_1^* , видим, что УВГ представляют собой условие самосопряженности (5) операторов \mathfrak{M}'_m . И если для нелинейных молекул самосопряженность имеет место, то то же должно быть и для линейных. Действительно

$$\mathfrak{M}'_\alpha = L_\alpha - L_\alpha^I - L_\alpha^{II}, \quad \alpha = x, y, z,$$

где L_α — компоненты полного момента импульса относительно подвижных осей, L_α^I и L_α^{II} — компоненты колебательного и электронного орбитального моментов, и все они выражаются при помощи разных независимых переменных. Поэтому самосопряженность должна иметь место для каждого слагаемого в отдельности и независимо от принадлежности к нелинейной или линейной молекуле операторы L_α , представляющие наблюдаемые динамические переменные, должны быть самосопряженными [6], т. е. $L_\alpha = L_\alpha^*$.

Для нелинейной молекулы это легко проверить, действуя на произвольную функцию $f = f(\varphi, \theta, \chi)$ операторами

$$\begin{aligned} L_x &= -i\hbar \left[-\frac{\cos \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \sin \chi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cos \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right], \\ L_y &= -i\hbar \left[\frac{\sin \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \cos \chi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right], \quad L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \chi}, \end{aligned} \quad (9)$$

и им сопряженными

$$\begin{aligned} L_x^* &= -i\hbar \left[-\frac{\cos \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sin \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \chi} \cos \chi \right], \\ L_y^* &= -i\hbar \left[\frac{\sin \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\cos \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \chi} \sin \chi \right], \quad L_z^* = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \chi}. \end{aligned}$$

Отметим, что для нелинейных молекул связь эрмитовости L_α (которые там обозначались как K'_j) с частью УВГ впервые отмечалась в [7].

Неголомные условия и моменты импульсов

Для линейных молекул в работе [8] предлагалось накладывать ограничения на углы Эйлера при помощи условия

$$\omega_z = \cos \theta \cdot \dot{\varphi} + \dot{\chi} = 0, \quad (10)$$

где ω_z — проекция угловой скорости на подвижную ось Oz , а точка обозначает дифференцирование по времени. Нетрудно убедиться, что это условие неголомно. В квантовомеханическом формализме ему соответствует

$$\bar{\omega}_z = \cos \theta \cdot d\varphi + d\chi = 0, \quad (11)$$

где $\bar{\omega}_z$ — дифференциальная форма степени I [9], неголомная компонента в смысле, указанном в [10].

Для получения моментов импульса при ограничении (11) выпишем сначала соответствующие дифференциальные формы для всех подвижных осей без ограничений

$$\bar{\omega}_x = -\sin \theta \cos \chi \cdot d\varphi + \sin \chi d\theta, \quad \bar{\omega}_y = \sin \theta \sin \chi d\varphi + \cos \chi d\theta, \quad \bar{\omega}_z = \cos \theta d\varphi + d\chi \quad (12)$$

и обратные соотношения

$$\begin{aligned} d\varphi &= -\frac{\cos \chi}{\sin \theta} \bar{\omega}_x + \frac{\sin \chi}{\sin \theta} \bar{\omega}_y, \quad d\theta = \sin \chi \bar{\omega}_x + \cos \chi \bar{\omega}_y, \\ d\chi &= \operatorname{ctg} \theta \cos \chi \bar{\omega}_x - \operatorname{ctg} \theta \sin \chi \bar{\omega}_y + \bar{\omega}_z. \end{aligned} \quad (13)$$

Так как моменты импульса представимы в виде

$$L_\alpha = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}_\alpha} = -i\hbar \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\omega}_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \varphi} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\omega}_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\omega}_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \chi} \right], \quad \alpha = x, y, z, \quad (14)$$

где производная по неголономной компоненте используется в смысле, указанном в [10], то учитывая (13), получаем выражения (9).

Переходим к моментам импульса с учетом ограничения (11), из которого

$$d\varphi = -\frac{1}{\cos \theta} d\chi.$$

Подставляя это в два первых уравнения (12), приходим к выражениям

$$\bar{\omega}_x = \sin \chi \cdot d\theta + \operatorname{tg} \theta \cdot \cos \chi \cdot d\chi, \quad \bar{\omega}_y = \cos \chi \cdot d\theta - \operatorname{tg} \theta \cdot \sin \chi \cdot d\chi.$$

Эти дифференциальные формы не содержат угла φ и поэтому момент импульса определяется видоизмененной формулой (14)

$$L_\alpha = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \bar{\omega}_\alpha} = -i\hbar \left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial \bar{\omega}_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial \chi}{\partial \bar{\omega}_\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial \chi} \right], \quad \alpha = x, y.$$

Учитывая (13), в которых теперь нужно положить $\bar{\omega}_z = 0$, получаем

$$L_x = -i\hbar \left[\sin \chi \frac{\partial}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \cos \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right], \quad L_y = -i\hbar \left[\cos \chi \frac{\partial}{\partial \theta} - \operatorname{ctg} \theta \cdot \sin \chi \frac{\partial}{\partial \chi} \right]. \quad (15)$$

Определить L_z таким способом нельзя из-за $\omega_z = 0$. Поэтому, используя (15), после несложных преобразований получаем коммутационное соотношение

$$L_x L_y - L_y L_x = -\hbar^2 \frac{\partial}{\partial \chi}.$$

Требую выполнимости (1), приходим к последней компоненте полного момента импульса

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \chi}, \quad (16)$$

которая совместно с (15) и определяет моменты импульса линейных молекул относительно подвижных осей.

Строя по способу, указанному в предыдущем пункте, сопряженные выражения

$$L_x^* = -i\hbar \left[\frac{\sin \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \chi} \cos \chi \right],$$

$$L_y^* = -i\hbar \left[\frac{\cos \chi}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta - \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \chi} \sin \chi \right], \quad L_z^* = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \chi},$$

легко доказать самосопряженность моментов импульса (15), (16).

Гамильтониан, получаемый по схеме Вильсона и Говарда

При выводе гамильтониана линейной молекулы по этой схеме [4] нужно воспользоваться условием (10) еще в классической энергии, и действуя как при выводе в случае нелинейной молекулы, приходим к гамильтониану, который (после проведения коммутаций, аналогичных предложенным в [11]) приобретает вид

$$H = \frac{1}{2} M^{-1} \sum_{\alpha} P_{\alpha'} P_{\alpha'} + \frac{1}{2} \sum_{bc} m^{bc} \sum_{\alpha} P_{b\alpha} P_{c\alpha} + \frac{1}{2} (I')^{-1} \sum_{\alpha} (L_\alpha - L_\alpha^I - L_\alpha^{II}) (L_\alpha - L_\alpha^I - L_\alpha^{II}) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{\alpha} \sum_{j_x k_\alpha} G^{j_\alpha k_\alpha} P_{j_\alpha} P_{k_\alpha} + V.$$

Здесь использованы те же обозначения, что и в [8], а моменты импульса имеют вид (15). Явные выражения моментов инерции приводятся в Приложении.

Непосредственное преобразование оператора кинетической энергии к молекулярным координатам

Можно выделить следующие разновидности этого подхода. Первая была предложена в [12] и развивалась в [13, 14], основные положения второй изложены в работах [15, 16], в несколько иной плоскости рассматриваются вопросы преобразования в [7, 17].

Опишем предлагаемый нами способ вывода гамильтониана линейной молекулы в рамках второй разновидности. А для последовательности изложения повторим ход рассуждений в [15, 16] для нелинейной молекулы. При этом будем пользоваться методами тензорного анализа и в обозначениях следовать [10].

Итак, пусть в пространстве конфигураций молекулярных координат нелинейной молекулы квадрат интервала определяется квадратичной формой

$$g_{\mu\nu} d\xi^\mu d\xi^\nu \quad (17)$$

(по одинаковым индексам — суммирование). Обращая метрический тензор $g_{\mu\nu}$, получаем $g^{\mu\nu}$. Оператор Лапласа, действующий на абсолютный скаляр (волновую функцию) ψ , выражается при помощи ковариантных производных следующим образом:

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \psi. \quad (18)$$

Имеют место равенства [10]

$$\nabla_\mu \psi = \partial_\mu \psi, \quad \nabla_\mu g^{\nu\eta} = 0, \quad \nabla_\mu g_{\nu\eta} = 0, \quad \nabla_\mu g = 0, \quad g = \det \|g_{\mu\nu}\|.$$

Тогда (18) может быть приведено к виду

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \psi = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu \psi = \nabla_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi = g^{-1/2} g^{1/2} \nabla_\mu g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi = g^{-1/2} \nabla_\mu g^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi = g^{-1/2} \nabla_\mu \hat{v}^\mu, \quad (19)$$

где \hat{v}^μ — контравариантная плотность валентности 1, для которой [10]

$$\nabla_\mu \hat{v}^\mu = \partial_\mu \hat{v}^\mu. \quad (20)$$

Это дает возможность записать

$$g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \psi = g^{-1/2} \partial_\mu g^{1/2} g^{\mu\nu} \partial_\nu \psi. \quad (21)$$

Полученное выражение отличается от формулы Подольского [15, 16] только несимметричным видом оператора, что сказывается лишь на условии нормировки волновой функции. Появление операторов момента импульса обеспечивается свойствами субматриц матрицы $g^{\mu\nu}$. Возможен, однако, несколько иной путь их появления. А именно, вводим в пространство конфигураций рассматриваемой системы (которое является пространством без кручения [10]) неголономные компоненты [10]

$$(d\xi)^h = A^h_\mu d\xi^\mu.$$

Для нелинейной молекулы ими будут лишь $\hat{\omega}_x, \hat{\omega}_y, \hat{\omega}_z$ (12). Квадрат интервала приобретает вид

$$g_{ji} (d\xi^j) (d\xi^i). \quad (22)$$

Далее определяется g^{ji} и без всяких изменений в описанной выше схеме вывода получается аналог формулы (19)

$$g^{ji} \nabla_j \nabla_i \psi = g^{-1/2} \nabla_j \hat{v}^j, \quad g = \det \|g_{ji}\|.$$

Но в силу использования неголономных компонент теперь вместо (20) имеем [10]

$$\nabla_j \hat{v}^j = \partial_j \hat{v}^j + 2\Omega_{ji}^{\cdot\cdot i} \hat{v}^j, \quad \Omega_{ji}^{\cdot\cdot h} = -\Omega_{ij}^{\cdot\cdot h}, \quad (23)$$

где $\Omega_{ji}^{\cdot\cdot h}$ — объект неголономности. Его нетрудно определить по правилам [10], используя (12), (13), и оказывается, что для нелинейной молекулы он приобретает весьма специализированный вид $\Omega_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot\alpha} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ ($\alpha, \beta, \gamma = x, y, z$), что приводит

к обращению в нуль второго слагаемого в правой части (23). Тогда окончательный вид искомого выражения

$$g^{ji} \nabla_j \nabla_i \psi = g^{-1/2} \partial_j g^{1/2} g^{ji} \partial_i \psi, \quad g = \det \|g_{ji}\| \quad (24)$$

формально полностью совпадает с (21), но производные по неголономным компонентам $\bar{\omega}_\alpha$ ($\alpha = x, y, z$) в (24) сразу дают проекции полного момента на подвижную систему осей.

Теперь легко перейти к выводу оператора кинетической энергии линейной молекулы с применением условия (11). При этом $\bar{\omega}_z$ исключается из квадратичной формы (22), в которой остаются лишь $\bar{\omega}_x$ и $\bar{\omega}_y$, и добавляется один дифференциал колебательной координаты. Зависящий от трех индексов антисимметричный объект неголономности Ω_{ij}^h обращается в нуль. Это позволяет воспользоваться общей формулой (24) с соответствующими по сравнению с нелинейной молекулой заменами в матричных элементах g_{ji} и g^{ji} , что и решает задачу непосредственного вывода гамильтониана линейной молекулы с неголономным условием (11).

Интересно отметить, что вместо (24) можно записать

$$g^{ji} \nabla_j \nabla_i \psi = g^{ji} [\partial_j \partial_i \psi - \Gamma_{ji}^h \partial_h \psi],$$

где Γ_{ji}^h — коэффициенты аффинной связности, которые в неголономных компонентах выражаются не только через символы Кристоффеля, но и через объекты неголономности [10]. Эта формула может явиться основой прямого вывода упрощенного вида гамильтониана, полученного для нелинейной молекулы в [11] из (21) при помощи дополнительных преобразований.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Линейные естественные координаты линейной молекулы связаны со смещениями ядер из положения равновесия в подвижной декартовой системе осей при помощи соотношений

$$q^{i\alpha} = \sum_{\tau} B_{\tau(\alpha)}^{i\alpha} \Delta \alpha_{\tau}, \quad \Delta \alpha_{\tau} = \sum_{i\alpha} \mathcal{L}_{\tau i\alpha}^{(\sigma)} q^{i\alpha}.$$

Все обозначения здесь и ниже соответствуют [8]. Отличные от нуля элементы эффективного тензора инерции линейной молекулы таковы

$$I' = I'_{xx} = I'_{yy} = I^{(\sigma)} + 2 \sum_{iz} \left(\sum_{\tau} m_{\tau} z_{\tau}^{(e)} \mathcal{L}_{\tau iz} \right) q^{iz} + \\ + (I^{(\sigma)})^{-1} \sum_{iz} \sum_{jz} \left[\left(\sum_{\tau} m_{\tau} z_{\tau}^{(e)} \mathcal{L}_{\tau iz}^{(z)} \right) \left(\sum_{\eta} m_{\eta} z_{\eta}^{(e)} \mathcal{L}_{\eta jz}^{(z)} \right) \right] q^{iz} q^{jz}.$$

Соотношения между коэффициентами

$$\sum_{\tau} B_{\tau(\alpha)}^{i\alpha} \mathcal{L}_{\tau j\alpha}^{(\alpha)} = \delta_{i\alpha j\alpha} \quad (\alpha = x, y, z), \quad \sum_{iz} \mathcal{L}_{\tau iz}^{(z)} B_{\tau(z)}^{iz} = \delta_{\tau\eta} - m_{\tau} M_{\Gamma}^{-1}, \\ \sum_{i\beta} \mathcal{L}_{\tau i\beta}^{(\beta)} B_{\tau(\beta)}^{i\beta} = \delta_{\tau\eta} - m_{\tau} M_{\Gamma}^{-1} - (I^{(\sigma)})^{-1} m_{\tau} z_{\tau}^{(e)} z_{\tau}^{(e)} \quad (\beta = x, y).$$

Отметим, что в выражениях работы [8], соответствующих некоторым из выписанных здесь формул, имеются ошибки.

Литература

- [1] С. Ескарт. Phys. Rev., 47, 552, 1935.
- [2] J. T. Hougen. J. Chem. Phys., 36, 519, 1962.
- [3] J. K. G. Watson. Molec. Phys., 19, 465, 1970.
- [4] Е. Вильсон, Дж. Дешиус, П. Кросс. Теория колебательных спектров молекул. ИИЛ, М., 1960.
- [5] Н. Данфорд, Дж. Шварц. Линейные операторы. Спектральная теория. «Мир», М., 1966.

- [6] В. А. Фок. Начала квантовой механики. «Наука», М., 1976.
[7] Г. А. Натанзон, М. Н. Адамов. Вестн. ЛГУ, № 4, 28, 1974.
[8] А. Я. Чауне. Опт. и спектр., 36, 868, 1974.
[9] А. Картан. Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. «Мир», М., 1971.
[10] Я. А. Схоутен. Тензорный анализ для физиков. «Наука», М., 1965.
[11] J. K. G. Watson. Molec. Phys., 15, 479, 1968.
[12] М. А. Ельяшевич. Тр. ГОИ, 12, 3, 1938.
[13] Yu. S. Makushkin, O. N. Ulenikov. J. Molec. Spectrosc., 68, 1, 1977.
[14] J. D. Louck. J. Molec. Spectrosc., 61, 107, 1976.
[15] A. A. Kiselev. J. Phys., B, 3, 904, 1970.
[16] A. A. Kiselev. Canad. J. Phys., 56, 615, 1978.
[17] Г. А. Натанзон, М. Н. Адамов. Вестн. ЛГУ, № 10, 24, 1974.

Поступило в Редакцию 20 января 1980 г.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ имени Ф. СКОРИНЫ