Лекция 4 СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ. ГРУБЫЕ ПОГРЕШНОСТИ И МЕТОДЫ ИХ ИСКЛЮЧЕНИЯ

4.1 Случайная величина. Закон распределения.

Пусть некоторая величина X в ряде испытаний может принимать различные числовые значения. Если значение величины X в каждом данном испытании не может быть указано заранее (непредсказуемо), то величина X называется **случайной величиной**. Другими словами *случайной* называют величину, которая в результате опыта (наблюдения, измерения) принимает одно возможное, но заранее неизвестное значение. Случайная величина может быть **дискретной** или **непрерывной**.

Если случайная величина может принимать бесконечное множество значений, причем эти значения могут быть сколь угодно близки друг к другу, то такая величина называется ***непрерывной случайной величиной.*** Если же случайная величина может принимать лишь дискретные значения, то она называется ***дискретной случайной величиной***.

Примеры непрерывной случайной величины: сопротивление резистора (экземпляра) из партии со значением R = 1 кОм ± 10%; коэффициент усиления β транзистора (экземпляра), для которого по техническим условиям β ≥ 20.

Примеры дискретных случайных величин: число отказов электронного устройства (ЭУ) за рассматриваемый календарный период времени, например два года (возможные значения 0, 1, 2, 3, 4, ...); частота попадания сопротивления резистора, взятого из партии с сопротивлением R = 1 кОм ± 10%, в диапазон (950…1000 Ом) при десяти наблюдениях (возможные значения 0, 1/10, 2/10, 3/10, ..., 9/10, 1).

Охарактеризовать случайную величину можно при помощи *закона распределения*.

Под **законом распределения случайной величины** понимается соответствие, устанавливающее связь между возможными значениями случайной величины и вероятностями принятия этих значений. Это соответствие может быть задано в виде таблицы, графика или математической формулы.

Ряд распределения. Под рядом распределения *понимают таблицу вида*, показанного на рис.4.1. Здесь случайная величина n – число отказов ЭУ за два года эксплуатации; $p(n)$ – вероятность значения n.

n	0	1	2	3	4	…
$p(n)$	0,1	0,25	0,3	0,15	0,1	…

Рисунок 4.1 – Ряд распределения

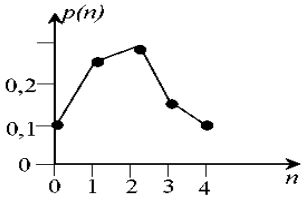

Рисунок 4.2 - Многоугольник распределения

Многоугольник распределения. Под многоугольником распределения понимают фигуру, изображённую на рис.4.2 (для случайной величины n, рассмотренной в предыдущем вопросе).

Функция распределения. Наиболее универсальный способ описания случайных величин заключается в отыскании их интегральных или дифференциальных функций распределения. Под **интегральной функцией распределения** результатов наблюдений понимается зависимость вероятности того, что результат наблюдения X в i-м опыте окажется меньшим некоторого текущего значения x_i, от самой величины x. Другими словами под функцией распределения случайной величины X для текущего значения x понимают вероятность не события $X = x$, а вероятность события $X < x$. Обозначают это как $F(x) = P(X < x)$. На рис.4.3 показаны примеры функций распределения вероятности.

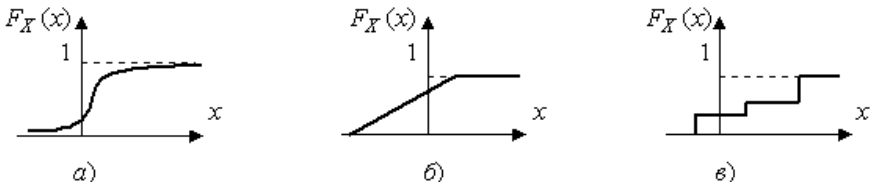

Рисунок 4.3 – Интегральные функции распределения

Свойства функции $F(x)$:

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ ИМЕНИ П.О.СУХОГО

1. $F(x)$ – неубывающая функция, т.е. $F(x_2) \geq F(x_1)$ при $x_2 > x_1$.
2. $F(x = -\infty) = 0$.
3. $F(x = +\infty) = 1$

Более наглядным является описание свойств результатов наблюдений и случайных погрешностей с помощью дифференциальной функции распределения, иначе называемой *плотностью распределения вероятностей,* свойства которой будут рассмотрены ниже

4.2 Гистограмма. Эмпирическое распределение результатов наблюдений

Чтобы получить представление о законе распределения измеряемой величины, экспериментальные данные группируют. Для этого весь интервал значений величины от $x_{\min}$ до $x_{\max}$ (рис. 4.4) разбивают на несколько равных отрезков, называемых интервалами группировки данных, шириной Δ и центрами x_k, так что k-й интервал ($k = 1, 2, \ldots, K$) имеет границы ($x_k - \Delta / 2$, $x_k + \Delta / 2$). Далее распределяют значения x_i по интервалам. Число точек N_k, оказавшихся внутри k-го интервала, даёт число попаданий измеряемой величины в этот интервал. Общее число точек, оказавшихся внутри всех интервалов разбиения, должно быть равно полному числу N результатов наблюдений в исходной выборке.

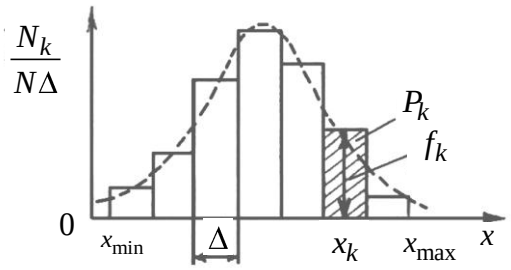

Рисунок 4.4. Гистограмма

Над каждым интервалом Δ_k строится прямоугольник высотой $f_k = N_k / (N \Delta)$. Совокупность таких прямоугольников называется **гистограммой** (рис. 4.4).

При построении гистограмм интервалы разбиения не следует брать очень большими или очень маленькими. Так, в первом случае прямоугольники на гистограмме будут иметь примерно одинаковую высоту, а во втором – могут появиться интервалы, в которые не попадет ни одного значения случайной величины. Чтобы этого не происходило, придерживаются следующих правил:

- Число интервалов группировки данных K рассчитывают по формуле $K = 1 + 3.2 \lg N$, где N – объем выборки.
- Если число K получается дробным, то его округляют до ближайшего меньшего целого. Ширину интервалов берут равной $\Delta = (x_{\max} - x_{\min})/K$.

Высоты и площади прямоугольников на гистограмме имеют следующий смысл. Поскольку относительные частоты $P_k = N_k / N$ приближенно равны вероятности попадания результата каждого отдельного наблюдения в данный интервал, то высота каждого прямоугольника на гистограмме

$$f_k = N_k / N\Delta = P_k / \Delta$$

есть вероятность, приходящаяся на единицу длины интервала разбиения или ***плотность вероятности*** попадания случайной величины в интервал Δ_k с центром в точке x_k.

Площадь каждого прямоугольника $f_k \Delta = N_k / N = P_k$ есть вероятность попадания результата в интервал Δ_k. Сумма площадей прямоугольников, основания которых находятся внутри некоторого интервала $[x_1, x_2]$, равна вероятности для каждого отдельного наугад взятого результата попасть в этот интервал.

Нетрудно убедиться, что сумма площадей всех прямоугольников равна единице:

$$\sum_{k=1}^{K} P_k = \sum_{k=1}^{K} \frac{N_k}{N} = \frac{1}{N} \sum_k N_k = \frac{N}{N} = 1. \qquad (4.1)$$

Это означает, что попадание произвольного результата наблюдения в какой-либо из интервалов разбиения в промежутке ($x_{\max}$, $x_{\min}$) есть достоверное событие.

Из рис. 4.4 видно, что результаты наблюдений распределены около некоторого значения, абсцисса которого соответствует центру самого высокого прямоугольника на гистограмме. По обе стороны данного прямоугольника расположены прямоугольники убывающих высот и площадей. Учитывая, что высоты прямоугольников f_k имеют смысл плотности вероятности попадания измеряемой величины в интервал Δ_k, можно сказать, что гистограмма дает представление о законе распределения измеряемой величины.

Зная координаты центров интервалов разбиения x_k и количества попаданий N_k значений измеря-

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф

емой величины в интервалы, можно найти среднее значение измеряемой величины $\bar{x}$ и величину S_x^2, характеризующую разброс результатов наблюдений около среднего значения:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum N_k x_k = \sum P_k x_k, \qquad (4.2)$$

$$S_x^2 = \frac{\sum N_k (x_k - \bar{x})^2}{N-1} \approx \sum P_k (x_k - \bar{x})^2, \qquad (4.3)$$

где при большом объеме выборки $N-1 \approx N$. Величину S_x^2 называют *эмпирической дисперсией*, а $S_{\bar{x}} = \sqrt{S_x^2}$ – *среднеквадратическим отклонением* результатов наблюдений от среднего (СКО *x*) этот параметр характеризует ширину распределения значений случайной величины около среднего значения.

Если число наблюдений взять очень большим ($N \to \infty$), т. е. от выборки перейти к генеральной совокупности, а ширины интервалов разбиения очень маленькими, то ломаная огибающая гистограммы перейдет в плавную кривую, называемую ***функцией плотности распределения вероятности измеряемой*** *величины*, которую будем обозначать *f*(*x*). В этом случае суммы (4.1)–(4.3) заменятся интегралами, а вероятности P_k – вероятностями $dP(x)$ попадания случайной величины в интервал ($x, x+dx$). Если случайная величина распределена в интервале (*a, b*) (заметим, что границы интервала могут быть и бесконечными: $a = -\infty,\ b = \infty$), то выражения (4.1)–(2.4) будут иметь вид

$$\int_a^b dP(x) = \int_a^b f(x)dx = 1, \qquad (4.4)$$

$$\bar{x} = \int_a^b x dP(x) = \int_a^b x f(x)dx, \qquad (4.5)$$

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\bar{x})^2 dP(x) = \int_a^b (x-\bar{x})^2 f(x)dx, \qquad (4.6)$$

где $f(x) = dP(x)/dx$ есть плотность вероятности распределения случайной величины или просто плотность вероятности; $\bar{x}$, σ^2 – генеральные среднее и дисперсия.

Равенство (4.4) называют *условием нормировки* функции плотности вероятности. Это условие требует, чтобы площадь под графиком функции вероятности всегда была равна единице.

Закон распределения непрерывной случайной величины - собирательный термин, используемый для обозначения способов математического описания непрерывной случайной величины. Закон распределения может быть задан функцией распределения *F(x)* как универсальной характеристикой описания любых случайных величин и (или) плотностью распределения *w(x),* которая существует только для непрерывных случайных величин. Функции *F(x)* и *w*(*x*) несут о непрерывной случайной величине одну и ту же информацию, но в разной форме. Для их определения необходимо проведение весьма длительных и кропотливых исследований и вычислений.

В большинстве случаев бывает достаточно охарактеризовать случайные величины с помощью ограниченного числа специальных параметров, основными из которых являются:

- центр распределения;
- начальные и центральные моменты и производные от них коэффициенты – математическое ожидание (МО), Среднее квадратическое отклонение (СКО), эксцесс, контрэксцесс и коэффициент асимметрии.

4.3 Понятие центра распределения

Координата центра распределения показывает положение случайной величины на числовой оси и может быть

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

найдена несколькими способами. Наиболее фундаментальным является центр симметрии, т.е. нахождение такой точки $X_м$ на оси x, слева и справа от которой вероятности появления различных значений случайной величины одинаковы и равны 0,5:

$$F(X_м) = \int_{-\infty}^{X_м} p(x)dx = \int_{X_м}^{+\infty} p(x)dx = 0{,}5$$

Точку $X_м$ называют *медианой* или 50%-ным квантилем. Для ее нахождения у распределения случайной величины должен существовать только нулевой начальный момент.

Можно определить центр распределения как центр тяжести распределения, т.е. такой точки $\overline{X}$, относительно которой опрокидывающий момент геометрической фигуры, огибающей которой является кривая p(x), равен нулю:

$$\overline{X} = m_x = a_1[\overline{x}] = M[\overline{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

Эта точка называется *математическим ожиданием.* При симметричной кривой *p(x)* в качестве центра может использоваться абсцисса *моды,* т.е. максимума распределения $X_м$. Однако существуют распределения, у которых нет моды, например равномерное. Распределения с одним максимумом называются *одномодальными,* с двумя – *двухмодалъными* и т.д. Те из них, у которых в средней части расположен не максимум, а минимум, называются *антимодальными.*

Для *двухмодалъных* распределений применяется оценка центра в виде *центра сгибов:*

$$X_c = \frac{(x_{c1} + x_{c2})}{2},$$

где x_{c1}, x_{c2} – сгибы, т.е. абсциссы точек, в которых распределение достигает своих максимумов.

Для ограниченных распределений (равномерного, трапецеидального и др.) применяется оценка в виде *центра размаха:*

$$X_p = \frac{(x_1 + x_2)}{2}$$

где x_1, x_2 – первый и последний члены вариационного ряда, соответствующего распределению.

Разные оценки центра имеют различную эффективность. При статистической обработке экспериментальных данных важно использовать наиболее эффективную из них, т.е. оценку, имеющую минимальную дисперсию. Это связано с тем, что погрешность в определении $X_ц$ влечет за собой неправильную оценку СКО, границ доверительного интервала, эксцесса, контрэксцесса, вида распределения и др., т.е. всех последующих оценок, кроме энтропийных.

4.4 Моменты распределений случайной величины

Все моменты представляют собой некоторые средние значения, причем если усредняются величины, отсчитываемые от начала координат, то моменты называют ***начальными***, а если от центра распределения, то ***центральными***. Начальные и центральные моменты r-го порядка определяются соответственно по формулам

$$\alpha_r[\overline{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r p(x)dx;\ \mu_r[\overline{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^r p(x)dx$$

Нулевой начальный момент равен единице. Он используется для задания условия нормирования плотности распределения:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^0 p(x)dx = 1$$

Также с помощью начального момента нулевого порядка вводится понятие медианы распределения. **Первый** начальный момент – математическое ожидание m_x случайной величины:

$$m_x = a_1[\overline{x}] = M[\overline{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} xp(x)dx$$

Для результатов измерений оно представляет собой оценку истинного значения измеряемой величины. Начальные и центральные моменты случайной погрешности совпадают между собой и с центральными моментами результатов измерений: $a_r[\Delta] = \mu_r[\Delta] = \mu_r[x]$, поскольку m_x случайной погрешности равно нулю. Следует также отметить, что первый центральный момент тождественно равен нулю. Важное значение имеет **второй** центральный момент

$$D[\overline{x}] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 p(x)dx,$$

называемый ***дисперсией*** и являющийся характеристикой рассеивания случайной величины относительно математического ожидания. Значительно чаще в качестве меры рассеивания используется ***среднее квадратическое отклонение***

$$\sigma = \sqrt{D[\overline{x}]}$$

имеющее такую же размерность, как и математическое ожидание. Для примера на рис. 5.1 показан вид нормального распределения при различных значениях СКО. Математическое ожидание и дисперсия являются наиболее часто применяемыми моментами, поскольку они определяют важные черты распределения: положение центра и степень разбросанности результатов относительно него. *Для более подробного описания распределения используются моменты более высоких порядков.*

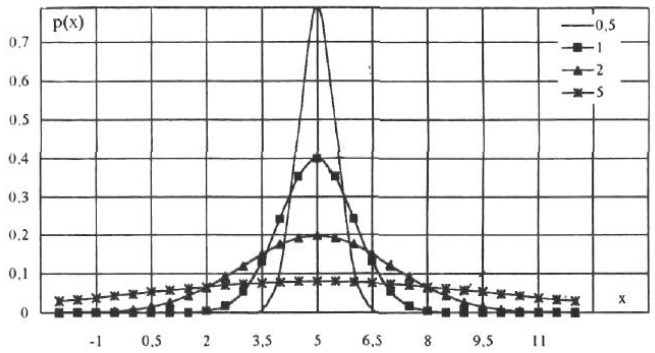

Рисунок 5.1 – Вид нормального распределения при $X_ц$ = 5 и *СКО* = 0,5; 1; 2 и 5

Третий центральный момент $\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^3 p(x)\,dx$

служит характеристикой асимметрии, или скошенности распределения. С его использованием вводится ***коэффициент асимметрии*** $\nu = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$. Для нормального распределения коэффициент асимметрии равен нулю. Вид законов распределения при различных значениях коэффициента асимметрии приведен на рис. 5.2,а.

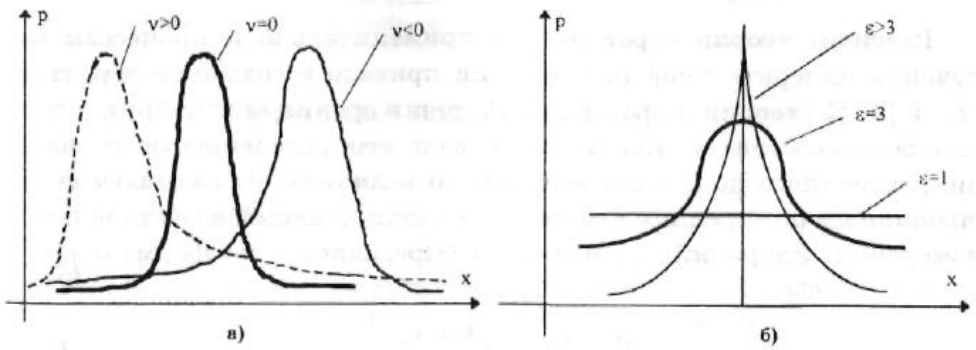

Рисунок 5.2 – Вид дифференциальной функции распределения при различных значениях коэффициента асимметрии (а) и эксцесса (б)

Четвертый центральный момент

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^4 p(x)\,dx$$

служит для характеристики плоско– или островершинности распределения. Эти свойства описываются с помощью ***эксцесса***

$$\varepsilon' = \frac{\mu_4}{\sigma^4 - 3}$$

Значения коэффициента ε' лежат в диапазоне от –2 до ∞. Для нормального распределения он равен 0. Чаще эксцесс задается формулой

$$\varepsilon = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

Его значения лежат в диапазоне от 1 до ∞. Для нормального распределения он равен трем. Вид дифференциальной функции распределения при различных значениях эксцесса показан на рис. 5.2,*б*.

Для удобства часто используют ***контрэксцесс***

$$k = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Значения контрэксцесса лежат в пределах от 0 до 1. Для нормального закона он равен 0,577.

4.4 Основные законы распределения

Использование на практике вероятностного подхода к оценке погрешностей результатов измерений, прежде всего, предполагает знание аналитической модели закона распределения рассматриваемой погрешности. Встречающиеся в метрологии распределения достаточно разнообразны. Известно, что примерно 50% распределений принадлежат к классу экспоненциальных, 30% являются уплощенными, а остальные 20% – различными видами двухмодальных распределений.

Множество законов распределения случайных величин, используемых в метрологии, целесообразно классифицировать следующим образом:

- трапецеидальные (плосковершинные) распределения;
- уплощенные (приблизительно плосковершинные) распределения;
- экспоненциальные распределения;
- семейство распределений Стьюдента;
- двухмодальные распределения.

5.3.1 Трапецеидальные распределения

К трапецеидальным распределениям относятся: *равномерное*, *собственно трапецеидальное* и *треугольное (Симпсона)*. Равномерное распределение (рис. 5.3,*а*) описывается уравнением

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < X_ц - a, \quad x > X_ц + a \\ \dfrac{1}{2}, & X_ц - a \le x \le X_ц + a \end{cases}$$

Трапецеидальное распределение (рис. 5.3,6) образуется как композиция двух равномерных распределений шириной a_1 и a_2:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < X_ц - a, x > X_ц + a \\ \dfrac{x - X_ц + a}{a^2 - u^2}, & X_ц - a \le x \le X_ц - b \\ \dfrac{1}{a+b} & X_ц + b \le x \le X_ц + b \\ \dfrac{X_ц + a - x}{a^2 - b^2}, & X_ц + b \le x \le X_ц + a \end{cases}$$

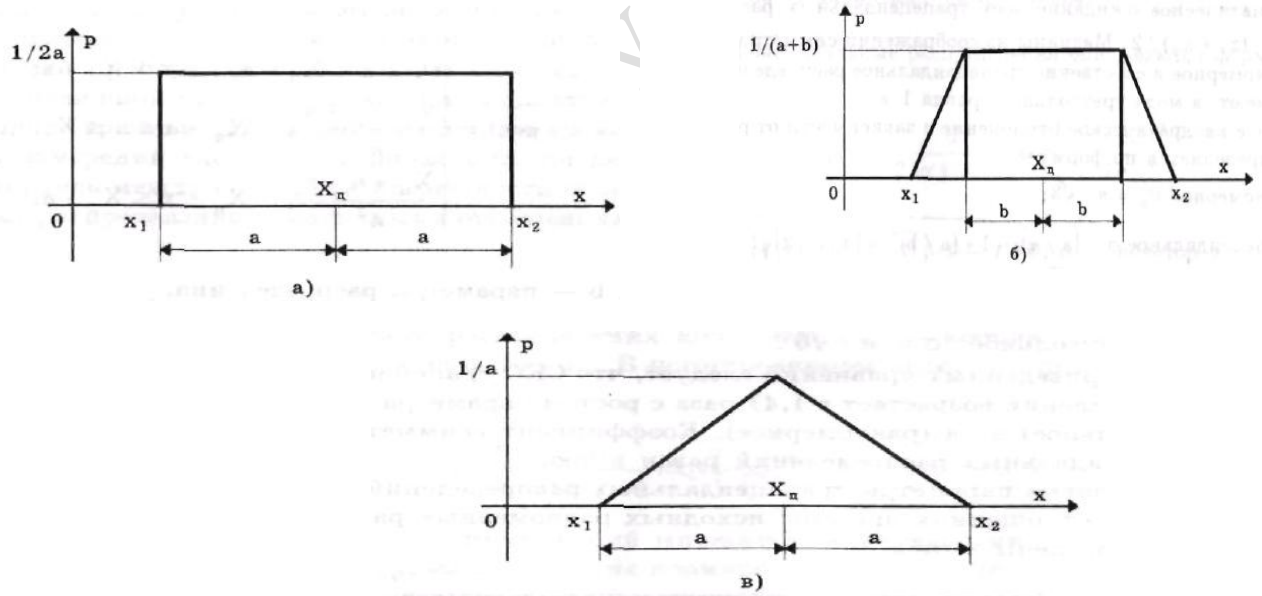

Рисунок 5.3. Распределения: а – равномерное; б – трапецеидальное; в – треугольное (Симпсона)

Треугольное (Симпсона) распределение (рис. 5.3,в) – это частный случай трапецеидального, для которого размеры исходных равномерных распределений одинаковы: $a_1 = a_2$:

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x < X_ц - a, x > X_ц + a \\ \dfrac{x - X_ц + a}{a^2}, & X_ц - a \le x \le X_ц \\ \dfrac{X_ц + a - x}{a^2}, & X_ц + x \le x \le X_ц + a \end{cases}$$

где $X_ц$, *a, b* – параметры распределения.

Математическое ожидание всех трапецеидальных распределений $X_ц = (x_1+x_2)/2$. Медианы из соображений симметрии равны математическим ожиданиям. Равномерное и собственно трапецеидальное распределения моды не имеют, а мода треугольного равна *1/a.*

Среднее квадратическое отклонение в зависимости от распределения определяется по формуле:

- равномерное $\sigma_p = \frac{a}{\sqrt{3}}$;
- трапецеидальное $\sigma = \left(\frac{a}{\sqrt{6}}\right)\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{2}}\sqrt{1+\left(\frac{a}{b}\right)^2}$
- треугольное $\sigma = \frac{a}{\sqrt{6}}$

Из приведенных уравнений следует, что СКО трапецеидальных распределений возрастает в 1,41 раза с ростом параметра *b* от нуля (треугольное) до *a* (равномерное). Коэффициент асимметрии всех трапецеидальных распределений равен нулю.

4.5 Экспоненциальные распределения

Экспоненциальные распределения описываются формулой

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\lambda\sigma\Gamma(1/\alpha)}\exp\left(-\left|\frac{x-X_ц}{\lambda\sigma}\right|^{\alpha}\right),$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{\Gamma(1/\alpha)}{\Gamma(3/\alpha)}}$; σ – СКО; α – некоторая характерная для данного распределения константа; $X_ц$ – координата центра; *Γ(x)* – гамма-функция. В нормированном виде, т.е. при $X_ц = 0$ и $\sigma\lambda = 1$,

$$p(x) = \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)}\exp(-|x|^{\alpha}) = A(\alpha)\exp(-|x|^{\alpha}),$$

где A(α) – нормирующий множитель распределения.

Интегральная функция нормированного экспоненциального распределения описывается выражением

$$F(x,\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2\Gamma(1/\alpha)}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp(-|x|^{\alpha})\,dx$$

Интеграл, входящий в эту формулу, выражается через элементарные функции только при α = 1/n, n = 1; 2; 3; ...

Нормальное распределение (распределение Гаусса).Наибольшее распространение получил нормальный закон распределения, называемый часто *распределением Гаусса:*

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(x-X_ц)^2}{2\sigma^2}\right), \qquad (1)$$

где σ – параметр рассеивания распределения, равный СКО; $X_ц$ – центр распределения, равный математическому ожиданию. Вид нормального распределения показан на рис. 5.1.

Широкое использование нормального распределения на практике объясняется центральной предельной теоремой теории вероятностей, утверждающей, что распределение случайных погрешностей будет близко к нормальному всякий раз, когда результаты наблюдений формируются под действием большого числа независимо действующих факторов, каждый из которых оказывает лишь незначительное действие по сравнению с суммарным действием всех остальных.

При введении новой переменной $t = (x–X_ц)/\sigma$ из (1) получается нормированное нормальное распределение, интегральная и дифференциальная функции которого соответственно равны:

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{t} e^{-0,5t^2}\,dt\,;\; p(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-0,5t^2}$$

Нормирование приводит к переносу начала координат в центр распределения и выражению абсциссы в долях СКО. Значения интегральной и дифференциальной функций нормированного нормального распределения сведены в таблицы, которые можно найти в литературе по теории вероятностей.

Определенный интеграл с переменным верхним пределом

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{t} e^{-0,5t^2}\,dt \qquad (2)$$

называют *функцией Лапласа.* Для нее справедливы следующие равенства: *Ф(–∞)=–0,5; Ф(0)=0; Ф(+∞)=0,5; Ф(t)=–Ф(t).* Функция Лапласа используется для определения значений интегральных функций нормальных распределений. Функция *F(t)* связана с функцией Лапласа формулой *F(t)=0,5+Ф(t).* Поскольку интеграл в (2) не выражается через элементарные функции, то значения функции Лапласа для различных значений *t* табулированы.

4.6 Семейство распределений Стьюдента

Эти законы описывают плотность распределения вероятности среднего арифметического, вычисленного по выборке из ***n*** случайных отсчетов нормально распределенной генеральной совокупности. Распределения Стьюдента нашли широкое применение при статистической обработке результатов многократных измерений. Их вид зависит от числа отсчетов ***n***, по которым находится среднее арифметическое значение, поэтому и говорят о семействе законов. В центрированном и нормированном виде они описываются формулой:

$$p(x) = \frac{\Gamma[(k+1)/2]}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma(k/2)}\left(1+\frac{x^2}{k}\right)^{-(k+1)/2} = S(x,k),$$

где *k* – число степеней свободы, зависящее от числа ***n*** усредняющих отсчетов: *k=n–1*. Вид распределения Стьюдента для различных значений *k* показан на рис. 5.5. При увеличении k распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса.

Распределения Стьюдента имеют ряд особенностей:

• при $n \le 3$ их СКО становится равным бесконечности, т.е. дисперсионная оценка ширины разброса не работает (перестает существовать);

• классический аппарат моментов для оценки формы и ширины распределения Стьюдента с малым числом степеней свободы оказывается не работоспособным, и их ширина и форма могут быть оценены лишь с использованием доверительных и энтропийных оценок. Этим распределение Стьюдента резко отличается от других распределений.

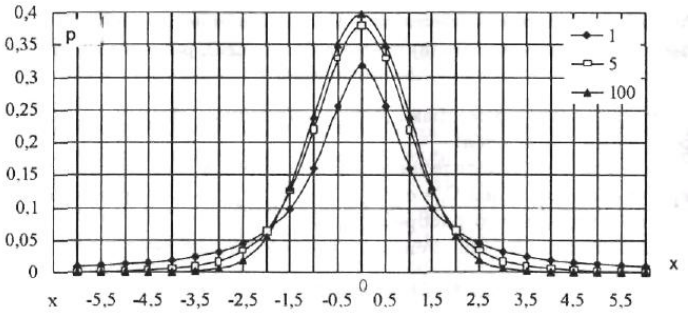

Рисунок 5.5 – Распределение Стьюдента при степенях свободы, равных 1 (распределение Коши), 5 и 100

Разновидностью распределения Стьюдента является ***распределение Коши,*** Оно важно тем, что ему подчиняется распределение отношения двух нормально распределенных центрированных случайных величин. Распределение Коши – это предельное распределение семейства законов Стьюдента с минимально возможным числом степеней свободы, равным *k=1* :

$$p(x) = \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(1/2)(1+x^2)} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

В общем виде (не нормированном и не центрированном) распределение Коши имеет вид:

$$p(x) = \frac{1}{A\pi\left[1+(x-X_ц)/A\right]^2}$$

где A, $X_ц$ – параметры распределения.

Свойства распределения Коши резко отличаются от свойств экспоненциальных распределений, а именно:

• дисперсия и СКО не существуют, так как определяющий их интеграл расходится. Они будут бесконечно увеличиваться при росте числа экспериментальных данных. Оценка ширины распределения может быть произведена только на основе теории информации;

• оценка центра в виде среднего арифметического для распределения Коши неправомочна, так как ее рассеяние $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ равно бесконечности;

• математическое ожидание не существует;

• для определения $X_ц$ необходимо использовать медиану;

• эксцесс равен бесконечности, а контрэксцесс равен нулю;

4.7 Грубые погрешности

Грубые погрешности (промахи) относятся к числу погрешностей, изменяющимся случайным образом при повторных наблюдениях. Они явно превышают по своему значению погрешности, оправ-

данные условиями проведения эксперимента. Под промахом понимается значение погрешности, отклонение которого от центра распределения существенно превышает значение, оправданное объективными условиями измерения. Поэтому с точки зрения теории вероятности появление промаха маловероятно.

Причинами грубых погрешностей могут быть неконтролируемые изменения условий измерений, неисправность, ошибки оператора и др.

Для исключения грубых погрешностей применяют аппарат проверки статистических гипотез.

В метрологии используются статистические гипотезы, под которыми понимают гипотезы о виде неизвестного распределения, или о параметрах известных распределений.

Примеры статистических гипотез:

- рассматриваемая выборка (или ее отдельный результат) принадлежит генеральной совокупности;
- генеральная совокупность распределена по нормальному закону;
- дисперсии двух нормальных совокупностей равны между собой.

В первых двух гипотезах сделано предположение о виде неизвестного распределения и принадлежности отдельных (подозрительных) результатов данному виду распределения, а в третьей - о параметрах двух известных распределений. Наряду с выдвинутой гипотезой рассматривают и противоречащую ей гипотезу. Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу. А конкурирующей (альтернативной) называют ту, которая противоречит нулевой.

При выдвижении и принятии гипотезы могут иметь место следующие четыре случая:

- гипотеза принимается, причем и в действительности она правильная;
- гипотеза верна, но ошибочно отвергается. Возникающую при этом ошибку называют ошибкой первого рода, а вероятность ее появления называют уровнем значимости и обозначают $q(\alpha)$;
- гипотеза отвергается, причем в действительности она неверна;
- гипотеза неверна, но ошибочно принимается. Возникающую при этом ошибку называют ошибкой второго рода, а вероятность ее появления обозначают β.

Величину 1 - β, т. е. вероятность, что гипотеза будет отвергнута, когда она ошибочна, называют **мощностью критерия.**

Следует заметить, что в нормативной документации по статистическому контролю качества продукции и учебниках по управлению качеством вероятность признать негодной партию годных изделий (т. е., совершить ошибку первого рода) называют "риском производителя", а вероятность принять негодную партию - "риском потребителя".

Все статистические критерии являются случайными величинами, принимающими определенные значения (таблицы критических значений). Областью принятия гипотезы (областью допустимых значений) называют совокупность значения критерия, при которых гипотезу принимают. Критической называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают. Область принятия гипотезы и критическая область разделены критическими точками, в качестве которых и выступают табличные значения критериев.

Область непринятия гипотезы, как показано на рисунке 1, может быть односторонней (правосторонней или левосторонней) и двух сторонней.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством

$K_{набл} > k_{кр}$, где $k_{кр}$ - положительное число (рисунок 1, а).

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством

$K_{набл} < k_{кр}$, где $k_{кр}$ - отрицательное число (рисунок 1, б).

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенствами

$K_{набл} > k_1$; $K_{набл} < k_2$, где $k_2 > k_1$.

Если критические точки симметричны относительно нуля, двусторонняя критическая область определяется неравенствами: $K_{набл} < -k_{кр}$, $K_{набл} > k_{кр}$, или равносильным неравенством $|K_{набл}| > k_{кр}$ (рисунок 1, в).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ ИМЕНИ П.О.СУХОГО

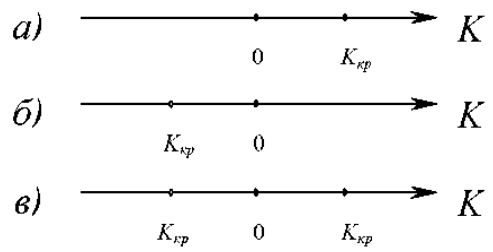

Рисунок 1 - Графическая интерпретация к распределению области принятия гипотезы

Основной принцип проверки статистических гипотез формулируется следующим образом: если наблюдаемое (опытное) значение критерия принадлежит критической области - гипотезу отвергают, если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы - гипотезу принимают.

Проверку статистической гипотезы проводят для принятого уровня значимости q (принимается равным 0,1; 0,05; 0,01 и т. д.). Так принятыйуровень значимости $q = 0,05$ означает, что выдвинутая нулеваястатистическая гипотеза может быть принята с доверительной вероятностью $P = 0,95$. Или есть вероятность отвергнуть эту гипотезу (совершить ошибку первого рода), равная $P = 0,95$.

Нулевая статистическая гипотеза подтверждает принадлежность проверяемого “подозрительного” результата измерения (наблюдения) данной группе измерений.

Формальным критерием аномальности результата наблюдений (а, следовательно, и основанием для принятия конкурирующей гипотезы: “подозрительный” результат не принадлежит данной группе измерений) при этом служит граница, отнесенная от центра распределения на величину tS , т. е.:

$$\left| x_{inod} - \overline{X}_{ц.р.} \geq tS, \right| \qquad (1)$$

где x_{inod} – результат наблюдения, проверяемый на наличие грубой погрешности; t – коэффициент, зависящий от вида и закона распределения, объема выборки, уровня значимости; S - *СКО*.

Таким образом, границы погрешности зависят от вида распределения, объема выборки и выбранной доверительной вероятности.

При обработке уже имеющихся результатов наблюдений произвольно отбрасывать отдельные результаты не следует, так как это может привести к фиктивному повышению точности результата измерений. Группа измерений (выборка) может содержать несколько грубых погрешностей и их исключение производят последовательно, по одному.

Все методы исключения грубых погрешностей (промахов) могут быть разделены на **два основных типа:**

- методы исключения при известном генеральном СКО;
- методы исключения при неизвестном генеральном СКО.

В первом случае $X_{ц.р.}$ и СКО вычисляется по результатам всей выборки, во втором случае из выборки перед вычислением удаляются подозрительные результаты.

В случае ограниченного числа наблюдений и (или) сложности оценки параметров закона распределения рекомендуется исключать грубые погрешности, используя приближенные коэффициенты вида распределения. При этом исключаются значения $x_i < x_{r-}$ и $x_i > x_{r+}$, где x_{r-} , x_{r+} – границы промахов, определяемые выражениями:

$$x_{r-} = X - S \cdot \left[1 + A \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \right]; \qquad (2),(3)$$

$$x_{r+} = X - S \cdot \left[1 + A \cdot \sqrt{\frac{1}{\gamma^2} - 1} \right],$$

где A – коэффициент, значение которого выбирается в зависимости от заданной доверительной вероятности в диапазоне от 0,85 до 1,30 (рекомендуется выбирать максимальное значение A равное 1,3); γ – контрэксцесс, значение которого зависит от формы закона распределения величины (ЗРВ).

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф. СКОРИНЫ

После исключения промахов операции по определению оценок центра распределения и СКО результатов наблюдений и измерений необходимо повторить.

Поскольку на практике чаще встречаются измерения при неизвестном СКО (ограниченное число наблюдений), в пособии рассмотрены следующие критерии проверки подозрительных (с точки зрения погрешностей) результатов наблюдений: **Ирвина, Романовского, вариационного размаха, Диксона, Смирнова, Шовене.**

Поскольку критериальные требования (коэффициенты), определяющие границу, за которой находятся "грубые" (в смысле погрешностей) результаты наблюдений у разных авторов различны, то проверку следует выполнять сразу по нескольким критериям (рекомендуется использовать не меньше трех, из рассматриваемых ниже). Окончательное заключение о принадлежности "подозрительных" результатов рассматриваемой совокупности наблюдений следует делать по большинству критериев. Кроме этого выбор критерия для определения грубых погрешностей должен выполняться после построения гистограммы результатов наблюдений. По виду гистограммы выполняется предварительная идентификация вида закона распределения (нормальный, близкий к нормальному или отличный от него).

Критерий Ирвина. Для полученных экспериментальных данных определяют коэффициент по формуле:

$$\lambda = \frac{(x_{n+1} - x_n)}{S}, \qquad (4)$$

где x_{n+1}, x_n – наибольшие значения случайной величины; S – среднее квадратическое отклонение, вычисленное по всем значениям выборки.

Затем этот коэффициент сравнивается с табличным значением λ_q, возможные значения которого приведены в таблице 1.

Таблица 1 - Критерий Ирвина λ_q.

Число измерений n	Уровень значимости	
	q=0,05	q=0,01
1	2	3
2	2,8	3,7
3	2,2	2,9
10	1,5	2,0
20	1,3	1,8
30	1,2	1,7
50	1,1	1,6
100	1,0	1,5
400	0,9	1,3
1000	0,8	1,2

Если $\lambda > \lambda_q$, то нулевая гипотеза не подтверждается, т. е. результат ошибочный, и он должен быть исключен при дальнейшей обработке результатов наблюдений.

Критерий Романовского. Конкурирующая гипотеза о наличии грубых погрешностей в подозрительных результатах подтверждается, если выполняется неравенство:

$$\left|\overline{X}_{ц.р.} - x_{iподоз}\right| \geq t_p S, \qquad (5)$$

где t_p- квантиль распределения Стьюдента при заданной доверительной вероятности с числом степеней свободы $k = n - k_n$ (k_n - число подозрительных результатов наблюдений). Фрагмент квантилей для распределения Стьюдента представлен в таблице 2.

Точечные оценки распределения $\overline{X}_{ц.р.}$ и *СКО* S результатов наблюдений вычисляется без учета k_n подозрительных результатов наблюдений.

Таблица 2 - Критерий Стьюдента t_p (квантили Стьюдента)

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ им. П.О. СУХОГО

Число степеней свободы k														
Доверительная вероятность p	3	4	5	6	8	10	12	18	22	30	40	60	120	∞
0,90	2,35	2,13	2,01	1,94	1,86	1,81	1,78	1,73	1,72	1,70	1,68	1,67	1,66	1,64
0,95	3,18	2,78	2,57	2,45	2,31	2,23	2,18	2,10	2,07	2,04	2,02	2,00	1,98	1,96
0,99	5,84	4,60	4,03	3,71	3,36	3,17	3,06	2,98	2,82	2,75	2,70	2,86	2,62	2,58

Критерий вариационного размаха. Является одним из простых методов исключения грубой погрешности измерений (промаха). Для его использования определяют размах вариационного ряда упорядоченной совокупности наблюдений ($x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \le \ldots \le x_n$):

$$R_n = x_n - x_1. \qquad (6)$$

Если какой-либо член вариационного ряда, например x_k, резко отличается от всех других, то производят проверку, используя следующее неравенство:

$$\overline{X} - z \cdot R_n \prec x_k \prec \overline{X} + z \cdot R_n \qquad (7)$$

где X - выборочное среднее арифметическое значение, вычисленное после исключения предполагаемого промаха; z - критериальное значение.

Нулевую гипотезу (об отсутствии грубой погрешности) принимают, если указанное неравенство выполняется. Если x_k не удовлетворяет условию (7), то этот результат исключают из вариационного ряда.

Коэффициент z зависит от числа членов вариационного ряда n, что представлено в таблице 3.

Таблица 3 - Критерий вариационного размаха

n	5	6	7	8-9	10-11	12-15	16-22	23-25	26-63	64-150
z	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Критерий Диксона. Критерий основан на предположении, что погрешности измерений подчиняются нормальному закону (предварительно необходимо построение гистограммы результатов наблюдений) и проверка гипотезы о принадлежности нормальному закону распределения. При использовании критерия вычисляют коэффициент Диксона (наблюдаемое значение критерия) для проверки наибольшего или наименьшего экстремального значения в зависимости от числа измерений. В таблице 4 приведены формулы для вычисления коэффициентов. Коэффициенты r_{10} , r_{11}применяют, когда имеется один выброс, а r_{21} и r_{22} - когда два выброса. Требуется первоначальное упорядочение результатов измерений (объема выборки). Критерий применяется, когда выборка может содержать более одной грубой погрешности.

Таблица 4 – Формулы коэффициентов Диксона

Число измерений n (объем выборки)	Коэффициент Диксона	Для наименьшего экстремального значения параметра	Для наибольшего экспериментального параметра
1	2	3	4
3-7	r_{10}	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

РЕПОЗИТОРИЙ ГГУ ИМЕНИ Ф СКОРИНЫ

Вычисленные для выборки по формулам значения коэффициентов Диксона r сравнивают с принятым (табличным) значением критерия Диксона r_q (таблица 5).

Нулевая гипотеза об отсутствии грубой погрешности выполняется, если выполняется неравенство $r < r_q$.

Если $r > r_q$, то результат признается грубой погрешностью и исключается из дальнейшей обработки.

Таблица 5 – Критериальные значения коэффициентов Диксона (при принятом уровне значимости q)

Статистика	Число измерений	r_q при уровне значимости q			
		0,1	0,05	0,02	0,01
1	2	3	4	5	6
r_{10}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,631	0,683
	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,409	0,477	0,551	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615
r_{22}	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497
	25	0,360	0,406	0,457	0,489

Критерии "3σ", Райта. Критерий “правило трех сигм” является одним из простейших для проверки результатов, подчиняющихся нормальному закону распределения. Сущность правила трех сигм: если случайная величина распределена нормально, то абсолютная величина ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

На практике правило трех сигм применяют так: если распределение изучаемой случайной величины неизвестно, но условие, указанное в приведенном правиле, выполняется, то есть основания предполагать, что изучаемая величина распределена нормально; в противном случае она не распределена нормально. С этой целью для выборки (включая подозрительный результат) вычисляется центр распределения и оценка СКО результата наблюдений. Результат, который удовлетворяет условию

$$\left| x_{\text{под}} - \overline{X}_{\text{ц.р.}} \right| \geq 3S ,$$

считается имеющим грубую погрешность и удаляется, а ранее вычисленные характеристики распределения уточняются.

Этому критерию аналогичен **критерий Райта**, основанный на том, что если остаточная погрешность больше четырех сигм, то этот результат измерения является грубой погрешностью и должен быть исключен при дальнейшей обработке. Оба критерия надежны при числе измерений больше 20…50. Их правомочно применять, когда известна величина генерального среднеквадратического отклонения (*S*).

Может оказаться, что при новых значениях $\overline{X}_{\text{ц.р.}}$ и S другие результаты попадут в категорию аномальных.

Критерий Смирнова. Критерий Смирнова используется при объемах выборки $n \geq 25$ или при известных значениях генеральных среднего и *СКО*. Он устанавливает менее жесткие границы грубой по-

грешности. Для реализации этого критерия вычисляются действительные значения квантилей распределения (наблюдаемое значение критерия) по формуле:

$$\beta = \frac{\max\left|x_{i\text{под}} - \overline{X}\right|}{S}. \qquad (8)$$

Найденное значение сравнивается с критериальным β_k , приведенным в таблице6

Таблица 6 – Квантили распределения β_k

Объем выборки n	Предельное значение β_k при уровне значимости q				
	0,100	0,050	0,0010	0,005	0,001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890
25	2,635	2,870	3,351	3,539	3,944
30	2,696	2,928	3,402	3,587	3,988
40	2,792	3,015	3,480	3,662	4,054
50	2,860	3,082	3,541	3,716	4,108
100	3,076	3,285	3,723	3,892	4,263
250	3,339	3,534	3,946	4,108	4,465
500	3,528	3,703	4,108	4,263	4,607

Критерий Шовене. Критерий Шовене применяется для законов, не противоречащих нормальному, и строится на определении числа ожидаемых результатов наблюдений $n_{ож}$, которые имеют столь же большие погрешности, как и подозрительный. Гипотеза о наличии грубой погрешности принимается, если выполняется условие:

$$n_{ож} \le 0{,}5.$$

Порядок проверки гипотезы следующий:

1) вычисляются среднее арифметическое $\overline{X}$ и СКО S результатов наблюдений для всей выборки;

2) из таблицы нормированного нормального распределения (Приложение 1 – интегральная функция нормированного нормального распределения) по величине

$$z = \frac{\left|x_{i\text{под}} - \overline{X}_{ц.р.}\right|}{S}$$

определяется вероятность появления подозрительного результата в генеральной совокупности чисел n:

$$P\left(\cdot S \prec \left|x_{i\text{под}} - \overline{X}_{ц.р.}\right|;\right) \qquad (9)$$

3) число ожидаемых результатов $n_{ож}$ определяется по формуле:

$$n_{ожс} = n \cdot P. \qquad (10)$$

Указанные выше критерии во многих случаях оказываются “жесткими”. Тогда рекомендуется пользоваться критерием грубой погрешности «k», зависящим от объема выборки n и принятой доверительной вероятности P.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ ИМ. П.О. СУХОГО

Таблица 7 - Зависимость критерия грубой погрешности *k* от объема выборки *n* и доверительной вероятности *P*

n	*P* = 95,00	*P* = 99,00	*P* = 99,73	*n*	*P* = 95,00	*P* = 99,00	*P* = 99,73
9	4,42	7,10	11,49	25	3,84	5,14	6,25
10	4,31	6,99	10,26	30	3,80	5,00	5,95
12	4,16	6,38	8,80	40	3,75	4,82	5,56
15	4,03	5,88	7,66	50	3,73	4,70	5,34
20	3,90	5,41	6,73				

Для распределений, отличных от нормального, таких классов, как двух модальных кругловершинных композиций нормального и дискретного распределения с эксцессом $\varepsilon = 1{,}5 - 3{,}0$; островершинных двумодальных; композиций дискретного двузначного распределения и распределения Лапласа с эксцессом $\varepsilon = 1{,}5 - 6{,}0$; композиций равномерного распределения с экспоненциальным распределением эксцесса $\varepsilon = 1{,}8\text{-}6{,}0$ и классом экспоненциальных распределений в пределах изменения эксцесса $\varepsilon = 1{,}8\text{-}6{,}0$ граница грубой погрешности определяется величиной $\pm(t_{гр} \cdot \sigma)$ или $\pm(t_{гр} \cdot S)$, где:

$$t_{гр} = 1{,}2 + 3{,}6 \cdot (-\gamma) \lg \frac{n}{10}, \qquad (11)$$

где γ - контрэксцесс;

$$t_{гр} = 1{,}55 + 0{,}8 \cdot \sqrt{\varepsilon - 1} \cdot \lg \frac{n}{10}. \qquad (12)$$

Погрешности в определении оценок *S* СКО и t_{sp} являются отрицательно коррелированными, т. е. возрастание СКО *S* сопровождается уменьшением t_{zp}. Поэтому определение границ грубой погрешности для законов, отличных от нормального, с эксцессом $\varepsilon < 6$ с помощью критерия t_{zp} является достаточно точным и может широко использоваться на практике.

Оценки $\overline{X}$, *S* и ε должны вычисляться после исключения подозрительных результатов из выборки. После расчета границ грубой погрешности результаты наблюдений, оказавшиеся внутри границ, возвращаются, а ранее найденные характеристики распределения уточняются.

Для равномерного распределения за границы грубой погрешности можно принять величину $\pm 1{,}8 \cdot S$.

РЕПОЗИТОРИЙ ГГТУ ИМЕНИ П.О.СКОЧИНСКОГО