Доклады Академии наук БССР

1987 Том XXXI № 11

УДК 535.34

В. Н. КАПШАЙ, А. Н. ГОДЛЕВСКАЯ, С. В. ШАЛУПАЕВ

КВАНТОВАНИЕ ЭНЕРГИИ И МОМЕНТА ИМПУЛЬСА СФЕРИЧЕСКИХ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В АКУСТИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком АН БССР Б. В. Бокутем)

Теоретические исследования пространственной дисперсии в акустике до последнего времени ограничивались лишь рассмотрением плоских монохроматических волн (см., например, [1, 2]). В действительности же любое колеблющееся тело создает сферическую волну. Так, источниками сферических волн являются акустические монополь (например, пульсирующий шар) и диполь [3], куперовская пара квазичастиц (ротон) [4]. И если для объемно деформируемых тел плоскую волну можно создать (пусть и в ограниченной области), то в случае несжимаемых жидкостей, рассматриваемых в гидродинамике и гидроакустике, возможность плоского возмущения вообще исключается [5]. Вместе с тем применительно к акустически естественно гиротропной среде теории сферических волн до сих пор уделено недостаточно внимания. Поэтому целью настоящего сообщения явилось решение уравнений акустики именно такой среды и последующее квантование энергии и момента импульса свободного звукового поля.

Уравнение движения в теории упругости

$$\rho\partial^2 u_i/\partial t^2 = \nabla_j\sigma_{ij} \tag{1}$$

может быть преобразовано к виду

$$[\nabla^2 + (1 + \lambda_{12}/\lambda_{44})\nabla\cdot\nabla + \rho\lambda_{44}r_{54,3}\nabla^2\mathrm{rot} - (1/\lambda_{44})\,\partial^2/\partial t^2]\,\mathbf{u} = 0 \tag{2}$$

путем учета взаимосвязи тензоров деформаций γ_{ik} и напряжений σ_{kl} [6]

$$\gamma_{ik} = s_{ijkl}\sigma_{kl} + r_{ijkl,\,n}\nabla_n\sigma_{kl}.$$

Здесь λ_{12}, $\lambda_{44} = (\rho s_{44})^{-1}$, $r_{54,\,3}$ — упругие постоянные среды. Выражения для тензоров s_{ijkl} и $r_{ijkl,\,n}$ изотропной нецентросимметричной упругой среды через символы Кронекера и тензор Леви-Чивита можно найти в [7, 6].

Ограничиваясь линейным по параметру $r_{54,\,3}$ приближением и полагая искомые решения гармонически зависящими от времени, можно свести уравнение (2) к следующему:

$$[\nabla^2 + (k_+k_-/k_0^2 - 1)\,\nabla\cdot\nabla - (k_+ - k_-)\,\nabla^\times + k_+k_-]\,\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0. \tag{3}$$

При этом величины

$$k_\pm = \pm(1/2)\rho r_{54,\,3}\omega^2 + [(1/4)(\rho r_{54,\,3}\omega^2)^2 + \omega^2/\lambda_{44}]^{1/2};$$
$$k_0 = \omega(2\lambda_{44} + \lambda_{12})^{-1/2}, \tag{4}$$

являющиеся решениями соответствующих дисперсионных уравнений, представляют собой волновые числа поперечных ($k_\pm$) и продольных (k_0) волн, удовлетворяющих уравнению (1) [6, 8].

Подстановка условия $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}^{(+)}=k\mathbf{u}^{(+)}$ $(k>0)$ в (3) показывает, что правоциркулярно поляризованной волне соответствует $k=k_-$, а левоциркулярно поляризованной ($\mathrm{rot}\,\mathbf{u}^{(-)}=-k\mathbf{u}^{(-)}$; $k>0$) — $k=k_+$. При этом частными решениями уравнения (3) являются, как нетрудно показать, функции

$$\mathbf{u}^{(\pm)}_{kJM}(\mathbf{r},\ t)=u^{(\pm)}_{JM}[k_\mp(\omega)]\,e^{-i\omega t}\{\mp i\alpha_J\mathbf{F}^{J+1}_{JM}(\mathbf{r})+ +\mathbf{F}^{J}_{JM}(\mathbf{r})\pm i\beta_J\mathbf{F}^{J-1}_{JM}(\mathbf{r})\}. \tag{5}$$

Продольно поляризованные волны ($\mathrm{rot}\,\mathbf{u}^{(0)}=0$; $k=k_0$) имеют вид

$$\mathbf{u}^{(0)}_{kJM}(\mathbf{r},\ t)=u^{(0)}_{JM}[k_0(\omega)]\,e^{-i\omega t}\{\beta_J\mathbf{F}^{J+1}_{JM}(\mathbf{r})+\alpha_J\mathbf{F}^{J-1}_{JM}(\mathbf{r})\}. \tag{6}$$

В (5) и (6) $\mathbf{F}^{L}_{JM}(\mathbf{r})$ — функции вида [9] $\mathbf{F}^{L}_{JM}(\mathbf{r})=j_L(kr)\,\mathbf{Y}^{L}_{JM}(\theta,\ \varphi)$, $\mathbf{Y}^{L}_{JM}$ — шаровые векторы, $j_L(kr)$ — сферические функции Бесселя, $\alpha_J=\sqrt{J/(2J+1)}$, $\beta_J=\sqrt{1-\alpha_J^2}$, $J=1,\ 2,\ \ldots$; $M=-J,\ \ldots,\ J$. В силу полноты системы шаровых векторов и функций Бесселя полнота системы решений (5), (6) очевидна.

Выражая из соотношений (4) ω через k, нетрудно убедиться, что для правоциркулярно поляризованных волн волновое число k не должно превышать $k_m=(\rho\lambda_{44}r_{54,3})^{-1}$. Вследствие этого общее решение уравнения (2) можно представить в виде суперпозиции функций (5), (6):

$$\mathbf{u}(\mathbf{r},\ t)=\sum_{JM}\left\{\int_0^\infty k^2dk\,[\mathbf{u}^{(-)}_{kJM}(\mathbf{r},\ t)+\mathbf{u}^{(0)}_{kJM}(\mathbf{r},\ t)+ +\theta(k_m-k)\,\mathbf{u}^{(+)}_{kJM}(\mathbf{r},\ t)]\right\}, \tag{7}$$

где $\theta(k_m-k)$ — ступенчатая функция Хевисайда.

Определим теперь энергию найденного звукового поля. В работе [10] для плотности энергии упругого поля была получена формула $w=(\rho\dot{u}_i\dot{u}_i+\sigma_{ik}\gamma_{ik})/2$. Однако для наших целей значительно удобнее применить выражение

$$w=\rho(2\dot{\mathbf{u}}\dot{\mathbf{u}}^*-\ddot{\mathbf{u}}^*\mathbf{u}-\mathbf{u}\ddot{\mathbf{u}}^*)/8, \tag{8}$$

в справедливости которого нетрудно убедиться.

Подстановка решения (7) в соотношение (8) и последующее интегрирование по $\mathbf{r}$-пространству с использованием условия ортонормированности шаровых векторов приводят к следующей формуле для полной энергии поля деформаций:

$$W=\frac{\rho}{2}\sum_{JM}\int_0^\infty k^2dk\,\{2\omega_+^2(k)\,u^{*(-)}_{JM}(k)\,\mathbf{u}^{(-)}_{JM}(k)+ +\omega_0^2(k)\,u^{*(0)}_{JM}(k)\,u^{(0)}_{JM}(k)+2\omega_-^2(k)\,\theta(k_m-k)\,u^{*(+)}_{JM}(k)\,u^{(+)}_{JM}(k)\}. \tag{9}$$

Преобразуя аналогичным образом выражение для компонент полного момента импульса [10], найдем для его третьей проекции

$$-iM_3=\int_0^\infty k^2dk\sum_{JM}\rho M\,\{2\omega_+(k)\,u^{*(-)}_{JM}(k)\,u^{(-)}_{JM}(k)+ +\omega_0(k)\,u^{*(0)}_{JM}(k)\,u^{(0)}_{JM}(k)+2\omega_-(k)\,u^{*(+)}_{JM}(k)\,u^{(+)}_{JM}(k)\,\theta(k_m-k)\}. \tag{10}$$

Как видно из соотношений (9), (10), энергия и момент звукового поля аддитивны: полная энергия поля деформаций (проекция M_3) равна сумме энергий (проекций M_3) отдельных мод. Поэтому, вводя канонические координаты Q и импульсы P соотношениями

$$Q^{(\mp)}_{JM}(k) = \sqrt{\rho/2}\,[u^{(\mp)}_{JM}(k) + u^{*(\mp)}_{JM}(k)];$$

$$P^{(\mp)}_{JM}(k) = \sqrt{\rho/2}\,[-i\omega_{\pm}(k)]\,[u^{(\mp)}_{JM}(k) - u^{*(\mp)}_{JM}(k)]$$

и аналогично $Q^{(0)}_{JM}(k)$, $P^{(0)}_{JM}(k)$ (с заменой $\rho/2 \to \rho/4$), мы сможем записать энергию в виде суммы энергий «гармонических осцилляторов»:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{JM} \int_0^\infty k^2 dk \,\{[P^{(-)2}_{JM}(k) + \omega^2_+(k)\,Q^{(-)2}_{JM}(k)] + [P^{(0)2}_{JM}(k) + \omega^2_0(k)\,Q^{(0)2}_{JM}(k)] + \theta(k_m - k)\,[P^{(+)2}_{JM}(k) + \omega^2_-(k)\,Q^{(+)2}_{JM}(k)]\}. \tag{11}$$

Подобным образом получим для третьей проекции полного момента импульса

$$-iM_3 = \sum_{JM} \int_0^\infty Mk^2 dk\,\{\omega^{-1}_+(k)\,[P^{(-)2}_{JM}(k) + \omega^2_+(k)\,Q^{(-)2}_{JM}(k)] + \omega^{-1}_0(k)\,[P^{(0)2}_{JM}(k) + \omega^2_0(k)\,Q^{(0)2}_{JM}(k)] + \theta(k_m - k)\,\omega^{-1}_-(k)\,[P^{(+)2}_{JM}(k) + \omega^2_-(k)\,Q^{(+)2}_{JM}(k)]\,\theta(k_m - k)\}. \tag{12}$$

Объявляя теперь в соответствии со стандартной процедурой квантования [11] Q и P эрмитовыми операторами обобщенных координаты и импульса, удовлетворяющими перестановочным соотношениям

$$[Q_{JM}(k),\, P_{JM}(k)] = i\hbar\,(1/k^2)\,\delta(k - k')\,\delta_{JJ'}\delta_{MM'}, \tag{13}$$

определим операторы рождения $\overset{+}{a}_{JM}(k)$ и уничтожения $a_{JM}(k)$ звуковых квантов выражениями

$$\overset{+}{a}_{JM}(k) = i\,[P_{JM}(k) - i\omega Q_{JM}(k)]\,(2\hbar\omega)^{-1/2};$$

$$a_{JM}(k) = -i\,[P_{JM}(k) + i\omega Q_{JM}(k)]\,(2\hbar\omega)^{-1/2}.$$

Коммутационные соотношения для $\overset{+}{a}_{JM}(k)$ и $a_{JM}(k)$ аналогичны (13).

Тогда гамильтониан звукового поля в гиротропной среде и проекция полного момента M_3 запишутся в виде

$$H = \sum_{JM} \int_0^\infty k^2 dk\,\{\overset{+}{a}{}^{(-)} a^{(-)} + \overset{+}{a}{}^{(0)} a^{(0)} + \theta(k_m - k)\,[\overset{+}{a}{}^{(+)} a^{(+)} + 1/2] + 1\};$$

$$-iM_3 = 2 \sum_{JM} \int_0^\infty k^2 dk M\,[\omega^{-1}_+(k)\,\overset{+}{a}{}^{(-)} a^{(-)} + \omega^{-1}_0(k)\,\overset{+}{a}{}^{(0)} a^{(0)} + \theta(k_m - k)\,\omega^{-1}_-(k)\,\overset{+}{a}{}^{(+)} a^{(+)}].$$

Полученные в данной работе решения (5), (6) уравнений акустики гиротропных сред и выражения для операторов Гамильтона и проекции полного момента импульса могут быть использованы для изучения взаимодействия квантов звука с частицами и квазичастицами, для исследования акустооптических явлений и физических процессов, сопровождающихся поглощением звука.

Summary

Spherical solutions were found for the acoustic equations of isotropic noncentrosymmetric medium, and the expression was obtained for the energy density of elastic waves. The energy and angular momentum are shown to be additive, and the quantization laws of the physical quantities mentioned were established.

Литература

1. Андронов А. А. // Изв. вузов. Радиофизика. 1960. Т. 3, № 4. С. 645—649. 2. Белый В. Н., Пенязь В. А., Сердюков А. Н. // Опт. и спектр. 1982. Т. 53, № 6. С. 1107—1110. 3. Морз Ф. Колебания и звук. М.; Л., 1949. 496 с. 4. Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П. Статистическая физика. М., 1978. Ч. 2. 448 с. 5. Исакович М. А. Общая акустика. М., 1973. 496 с. 6. Сердюков А. Н. // Кристаллография. 1977. Т. 22, № 3. С. 459—462. 7. Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. М., 1965. С. 7—44. 8. Годлевская А. Н., Сердюков А. Н., Шалупаев С. В. // Акуст. журн. 1986. Т. 32, № 3. С. 381—384. 9. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. М., 1975. 440 с. 10. Пенязь В. А., Сердюков А. Н. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1976. № 6. С. 80—84. 11. Рейсленд Дж. Физика фононов / Под ред. Г. С. Жданова. М., 1975. 365 с.

Гомельский государственный университет

Поступило 08.12.86