МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

Редколлегия журнала "Известия вузов МВ и ССО СССР",

серия "Физика"

УДК 535.34

А.Н.Годлевская, А.Н.Сердюков, С.В.Шалупаев

ФУНКЦИЯ ГРИНА И ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ИЗОТРОПНОЙ АКУСТИЧЕСКИ АКТИВНОЙ СРЕДЕ

Томск - 1985

Несмотря на то, что акустика естественно гиротропных кристаллов развивается сравнительно давно [I-9] (см. также [I0] и цитированную там литературу), к настоящему времени относительное завершение получила лишь теория распространения плоских звуковых волн в таких кристаллах. При этом вопросы теории излучения звука в акустически активных средах, по существу, не затрагивались, что обусловлено, по-видимому, известными математическими усложнениями, возникающими при учете пространственной дисперсии в акустике кристаллов. Настоящее сообщение посвящено решению задачи об излучении звуковых волн в нецентросимметричной изотропной акустически активной среде.

При описании акустических свойств невязкой естественно гиротропной среды будем использовать соотношение [7]

$$\gamma_{ij} = s_{ijkl}\sigma_{kl} + \eta_{ijkl,n}\nabla_n\sigma_{kl}, \qquad (I)$$

обобщающее закон Гука и учитывающее зависимость тензора упругих деформаций γ_{ij} в данной точке среды как от значений тензора упругих напряжений σ_{kl} в этой точке, так и от его пространственных производных. Входящие в (I) вещественные тензоры упругих постоянных для изотропной нецентросимметричной среды имеют вид

$$s_{ijkl} = s_{12}\delta_{ij}\delta_{kl} + s_{44}\left(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}\right), \qquad (2)$$

$$\eta_{ijkl,n} = \frac{1}{4}\eta_{54,3}\left(e_{ikn}\delta_{jl} + e_{jln}\delta_{ik} + e_{jkn}\delta_{il} + e_{iln}\delta_{jk}\right), \qquad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, e_{ijk} – псевдотензор Леви-Чивита, $s_{12} = s_{1122}$, $s_{44} = s_{2323}$, $\eta_{54,3} = 4\eta_{1323,3}$. Такая среда, как известно [I,6] , является естественно гиротропной, т.е. обладает циркулярным двупреломлением поперечных звуковых волн. Волновые числа право- и левоциркулярно поляризованных плоских монохроматических волн, соответственно, равны

$$k_{\pm} = \sqrt{\frac{\omega^2}{\lambda_{44}} + \frac{1}{4}\left(\omega^2\rho\eta_{54,3}\right)^2} \pm \frac{1}{2}\omega^2\rho\eta_{54,3}\,. \qquad (4)$$

Здесь ω – частота звуковой волны, ρ – плотность упругой среды, $\lambda_{44} = 1/(\rho s_{44})^{-1}$ [II] .

Из уравнения теории упругости, учитывающего наличие источников звука в виде сил, распределенных в среде с пространственной плотностью $\underline{f}$,

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \nabla_j \sigma_{ij} + f_i \tag{5}$$

и соотношений (I) - (3) получим следующее уравнение для вектора упругой деформации $\underline{u}(\underline{r}, t)$:

$$\nabla^2 \underline{u} + \left(1 + \lambda_{12}/\lambda_{44}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} + \rho \lambda_{44} r_{54,3} \operatorname{rot} \nabla^2 \underline{u} -$$

$$-\lambda_{44}^{-1} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = -\left(\rho \lambda_{44}\right)^{-1} \underline{f}. \tag{6}$$

Ограничиваясь во всех последующих расчетах линейным по параметру пространственной дисперсии $r_{54,3}$ приближением, преобразуем уравнение (6) к следующему виду:

$$\nabla^2 \underline{u} + \left(1 + \lambda_{12}/\lambda_{44}\right) \operatorname{grad} \operatorname{div} \underline{u} + \rho r_{54,3} \operatorname{rot} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} -$$

$$-\lambda_{44}^{-1} \frac{\partial^2 \underline{u}}{\partial t^2} = \left(\rho \lambda_{44}\right)^{-1} \underline{f} + r_{54,3} \operatorname{rot} \underline{f}. \tag{7}$$

Для решения уравнения (7) воспользуемся методом функции Грина. Соответствующее (7) уравнение для функции Грина $G(\underline{r} - \underline{r}', t - t')$ будет иметь вид

$$\left(\nabla^2 - \lambda_{44}^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) G_{ij}(\underline{r}-\underline{r}', t-t') + \left(1 + \lambda_{12}/\lambda_{44}\right) \nabla_i \nabla_k G_{kj}(\underline{r}-\underline{r}', t-t') +$$

$$+ \rho r_{54,3} e_{ilk} \nabla_l \frac{\partial^2}{\partial t^2} G_{kj}(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\delta_{ij} \delta(\underline{r}-\underline{r}') \delta(t-t'). \tag{8}$$

Разложим, далее, функцию Грина в интеграл Фурье

$$G_{ij}(\underline{R}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int G_{ij}(\underline{k}, \omega) e^{i(\underline{k}\underline{R} - \omega t)} d^3\underline{k}\, d\omega. \tag{9}$$

Подставляя (9) в (8) и используя Фурье-разложение δ - функции, найдем Фурье-компоненту функции Грина:

$$G(\underline{k}, \omega) = \left\{ k^2 + k_+ k_- + \left(\frac{k_+ k_-}{k_0^2} - 1\right) \underline{k} \cdot \underline{k} + i(k_+ - k_-) \underline{k}^{\times} \right\}^{-1}. \tag{10}$$

Здесь и ниже используется безындексная форма записи тензоров второго ранга [II]. В частности, $\underline{k} \cdot \underline{k}$ представляет диаду, так

что $(\underline{k}\cdot\underline{k})_{ij} = k_i k_j$; $\underline{k}^{\times}$ есть антисимметричный тензор, дуальный вектору $\underline{k}$: $(\underline{k}^{\times})_{ij} = e_{ilj} k_l$. В выражении (I0) k_+ и k_- определяются формулой (4), k_0 является волновым числом продольных упругих волн, $k_0 = \dfrac{\omega}{\sqrt{2\lambda_{44}+\lambda_{12}}}$.

Обращая матрицу в фигурных скобках в (I0), найдем

$$G(\underline{k},\omega) = -v_+ v_- \left\{ \frac{\omega^2 - k^2 v_+ v_- - i\omega(v_+ + v_-)\,\underline{k}^{\times}}{(\omega^2 - v_+^2 k^2)(\omega^2 - v_-^2 k^2)} - \right.$$

$$\left. - \frac{\omega^2[(v_+ - v_-)^2 + v_+ v_- - v_0^2] - k^2 v_+ v_- (v_+ v_- - v_0^2)}{(\omega^2 - v_+^2 k^2)(\omega^2 - v_-^2 k^2)(\omega^2 - v_0^2 k^2)}\,\underline{k}\cdot\underline{k} \right\} \qquad (II)$$

Здесь $v_0 = \sqrt{2\lambda_{44} + \lambda_{12}}$,

$$v_{\pm} = \sqrt{\lambda_{44} + \frac{1}{4}(\omega\rho\lambda_{44}\tau_{54,3})^2} \mp \frac{1}{2}\omega\rho\lambda_{44}\tau_{54,3} \qquad (I2)$$

есть фазовые скорости продольной ($v_0 = \omega / k_0$) и поперечных циркулярно поляризованных ($v_{\pm} = \omega / k_{\pm}$) акустических волн.

В дальнейшем, пренебрегая частотной дисперсией звуковых волн, будем считать фазовые скорости (I2) независящими от частоты. Очевидно, это равносильно предположению, что параметр гиротропии $\tau_{54,3}$ изменяется обратно пропорционально частоте ω , в то время как упругие постоянные λ_{44} и λ_{12} от частоты не зависят.

В общем случае при различающихся между собой v_+ , v_- и v_0 Фурье-компонента функции Грина (II) имеет шесть полюсов на вещественной оси. При интегрировании по ω следует задать обход всех полюсов сверху. Это определит выбор в качестве $G(\underline{R}, t)$ запаздывающей функции Грина [I2]

$$G^{ret}(\underline{R},\tau) = \begin{cases} G^{0}(\underline{R},\tau), & \tau \geq 0, \\ 0, & \tau < 0, \end{cases} \qquad (I3)$$

где

$$G^{0}(\underline{R},\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^3\underline{k}\, e^{i\underline{k}\underline{R}} \oint d\omega\, G(\underline{k},\omega)\, e^{-i\omega\tau} . \qquad (I4)$$

Интегрирование по ω в (I4) осуществляется в комплексной плос-

кости по замкнутому контуру, охватывающему все шесть полюсов, причем область внутри контура при обходе полюсов остается справа.

Используя интегральную теорему Коши, находим

$$\oint d\omega\, G(\underline{k},\omega)e^{-i\omega\tau} = \frac{i\pi v_+ v_-}{k(v_+ + v_-)}\Big[\Big(e^{-iv_+k\tau} - e^{iv_-k\tau}\Big)\Big(1 - i\underline{n}^{\times} - \underline{n}\cdot\underline{n}\Big) +$$

$$+\Big(e^{-iv_-k\tau} - e^{iv_+k\tau}\Big)\Big(1 + i\underline{n}^{\times} - \underline{n}\cdot\underline{n}\Big) + \frac{v_+ + v_-}{v_0}\Big(e^{-iv_0k\tau} - e^{iv_0k\tau}\Big)\underline{n}\cdot\underline{n}\,,$$

где $\underline{n} = \underline{k}/k$. Последующее интегрирование в (I4) по $\underline{k}$ приводит к окончательному выражению для запаздывающей функции Грина (I3) векторного волнового уравнения (7)

$$G^{ret}(\underline{R},\tau) = \frac{v_+ v_-}{2\pi(v_+ + v_-)}\Big[\underline{e}_+\cdot\underline{e}_+^{*}\,\delta(R - v_+\tau) +$$

$$+\,\underline{e}_-\underline{e}_-^{*}\,\delta(R - v_-\tau) + \frac{v_+ + v_-}{2v_0}\,\underline{c}\cdot\underline{c}\,\delta(R - v_0\tau)\Big]. \qquad (I5)$$

Здесь $R = |R|$, $\underline{c} = \underline{R}/R$, $\underline{e}_\pm$ - единичные векторы циркулярной поляризации, ортогональные вектору $\underline{c}$. Для операторов проектирования (диад $\underline{e}_\pm\cdot\underline{e}_\pm^{*}$) в (I5) учтено соотношение

$$\underline{e}_\pm\underline{e}_\pm^{*} = \frac{1}{2}\big(1 \mp i\underline{c}^{\times} - \underline{c}\cdot\underline{c}\big).$$

Наличие акустической активности при переходе от (6) к (7) приводит к появлению в неоднородном волновом уравнении второго порядка (7) дополнительных источников, пропорциональных параметру естественной гиротропии $\tau_{54,3} = (v_+ - v_-)/\omega$.В дальнейшем мы будем пренебрегать такими источниками, поскольку их учет возможен при последовательном рассмотрении частотной дисперсии. Такое приближение оправдано также тем, что оно не изменяет фазовых соотношений получаемых решений.

Исходя из найденного выражения (I5) для функций Грина, получим запаздывающее решение уравнения (7)

$$\underline{u}(\underline{r},t) = \frac{1}{\rho v_+ v_-}\int G^{ret}(r - r', t - t')\,\underline{f}(r',t')\,d^3r'dt' \qquad (I6)$$

при произвольном распределении источников звука (плотности силы $\underline{f}(\underline{r}, t)$) в среде. Подставляя (I5) в (I6), находим

$$\underline{u}(\underline{r},t) = \underline{u}_+(\underline{r},t) + \underline{u}_-(\underline{r},t) + \underline{u}_0(\underline{r},t), \tag{I7}$$

$$\underline{u}_\pm(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\rho(v_+ + v_-)v_\pm}\int \underline{e}_\pm \frac{\underline{e}^*_\pm \underline{f}(\underline{r}', t - |r - r'|/v_\pm)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3\underline{r}', \tag{I8}$$

$$\underline{u}_0(\underline{r},t) = \frac{1}{8\pi\rho v_0^2}\int \underline{c} \frac{\underline{c}\,\underline{f}(\underline{r}', t - |r - r'|/v_0)}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3\underline{r}'. \tag{I9}$$

Выражения (I7) - (I9) представляют собой запаздывающие решения для вынужденных деформаций акустически активной изотропной среды: поперечных циркулярно поляризованных u_+ и u_- и радальной u_0. Из (I8) видно, что противоположно поляризованные циркулярные акустические возмущения, составляющие поперечную часть вектора упругой деформации, распространяются с различными скоростями v_+ и v_- (I2), что согласуется с явлением циркулярного двупреломления поперечных плоских акустических волн в естественно гиротропной среде. В то же время, согласно (I9), скорость радиальной составляющей акустического возмущения совпадает с фазовой скоростью v_0 (I2) продольной звуковой волны.

В качестве примера использования найденных решений (I7) - - (I9) рассмотрим акустическое поле, создаваемое в гиротропной среде дипольным излучателем. Полагая источник звука точечным, определим плотность сосредоточенной в точке $r = 0$ вынуждающей периодической с периодом $T = 2\pi/\Omega$ силы

$$\underline{f}(\underline{r},t) = \underline{F}\,\delta(\underline{r})\, e^{-i\Omega t}. \tag{20}$$

Подставляя (20) в (I8), (I9) и осуществляя соответствующее интегрирование, получим

$$\underline{u}_\pm(\underline{r},t) = \frac{1}{4\pi\rho(v_+ + v_-)v_\pm}\, \underline{e}_\pm\, \frac{\underline{e}^*_\pm \underline{F}}{r}\, e^{i\left(\frac{\Omega}{v_\pm} r - \Omega t\right)},$$

$$\underline{u}_0(\underline{r},t) = \frac{1}{8\pi\rho v_0^2}\, \underline{c}\, \frac{\underline{c}\,\underline{F}}{r}\, e^{i\left(\frac{\Omega}{v_0} r - \Omega t\right)}. \tag{2I}$$

Оценим расстояния от излучающего источника, на которых становится существенным различие между фазовыми скоростями v_+ и v_- в (I8), (2I). Пусть Δt - характерный промежуток времени, за который распределение плотности силы $\underline{f}(\underline{r}, t)$ заметно не изменяется. Тогда на расстояниях R от источника, для которых $\Delta t = R/v_+ - R/v_-$, т.е. на расстояниях порядка

$$R = \Omega \Delta t / 2\vartheta, \tag{22}$$

где $\vartheta = (k_+ - k_-)/2$ - удельное вращение плоскости поляризации I,6, допустимо пренебрежение различием между v_+ и v_-. Очевидно, Δt должно быть значительно меньше периода T колебаний источника, так что, согласно (22), $R << \Omega T/2\vartheta = \pi/\vartheta$. Таким образом, уже для расстояний R порядка обратного удельного вращения плоскости поляризации поперечных звуковых волн в теории излучения звука в акустически активной среде необходимо учитывать различие фазовых скоростей право- и левоциркулярно поляризованных волн.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

I. Андронов А.А. Изв.вузов. Радиофизика, 1960, 3, № 4, 645.
2. Kluge G. Phys. Status Solidi, 1966, v. 17, N1, s. 109.
3. Portigal D.L., Burstein E. Phys. Rev., 1968, v. 170, N3, p. 673.
4. Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П. Основы кристаллофизики.-М.: Наука, 1975.
5. Бокуть Б.В., Сердюков А.Н. ДАН БССР, 20, № 10, 877.
6. Сердюков А.Н. Кристаллография, 1977, 22, № 3, 459.
7. Пенязь В.А., Сердюков А.Н. Изв. АН БССР. Сер. физ.-матем. наук, 1976, № 6, 80.
8. Вужва А.Д., Лямов В.Е. Кристаллография, 1977, 22, № I, 131.
9. Васильева Н.А., Рубин П.Л., Сиротин Ю.И. ФТТ, 1977, 19, № 6, 1753.
10. Лямов В.Е. Поляризационные эффекты и анизотропия взаимодействия акустических волн в кристаллах. - М.: из-во МГУ, 1983.
11. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах.-М.:Наука, 1965.
12. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В. Введение в теорию квантованных полей. - М.: Наука, 1976.

Печатается в соответствии с решением бюро редколлегии журнала "Известия вузов МВ и ССО СССР", серия "Физика" от 9 сентября 1985г.

печать 16.9.85г
Тир. 1 Цена 90 коп Зак. 32792
Производственно-издательский комбинат ВИНИТИ
Люберцы, Октябрьский пр., 403