МАТЕМАТИКА

УДК 517.2

МНОГОРЕЖИМНАЯ СЕТЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ВРЕМЕНЕМ ПРЕБЫВАНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ТИПОВ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК

О.В. Якубович, Ю.Е. Дудовская

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины, Гомель

MULTIREGIME QUEUEING NETWORK WITH RANDOM STAYING TIME OF DIFFERENT TYPES OF NEGATIVE CUSTOMERS

O.V. Yakubovich, Y.E. Dudovskaya

F. Scorina Gomel State University, Gomel

В работе исследуется модель открытой сети с различными типами положительных, отрицательных заявок и многорежимными стратегиями обслуживания. Время пребывания в каждом узле отрицательных заявок ограничено случайной величиной, имеющей показательное распределение. Каждый узел сети может работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени его работоспособности. Устанавливаются условия мультипликативности и аналитический вид стационарного распределения вероятностей состояний исследуемой сети.

Ключевые слова: *сеть массового обслуживания, различные типы положительных, отрицательных заявок, многорежимное обслуживание, стационарное распределение.*

This paper considers an open queueing network with different types of positive, negative customers and multiregime service strategies. Staying time of negative customers in each node is the random value having exponential distribution. Every node can operate in several regimes answering different degrees of their working capacity. The conditions of multiplicativity and an analytical view of stationary distribution of the network states probabilities are found.

Keywords: *queueing network, different types of positive, negative customers, multiregime service, stationary distribution.*

Введение

Сети массового обслуживания являются адекватными математическими моделями разнообразных случайных процессов в информационно-вычислительных сетях, сетях передачи данных, связи и многих других объектах, имеющих сетевую структуру. В аналитических исследованиях стационарного функционирования сетей массового обслуживания центральным всегда является вопрос нахождения стационарного распределения, которое является отправной точкой большинства исследований в теории массового обслуживания. В последнее время появляется все больше новых интересных моделей, позволяющих учитывать требования современности и возможность применения к сложным реальным объектам, имеющим сетевую структуру.

Впервые понятие отрицательной заявки было введено в работах [1], [2]. Отрицательная заявка не требует обслуживания, при поступлении в непустой узел отрицательная заявка уменьшает длину очереди на единицу. В работе [3] рассматривается модель с ограниченным временем пребывания отрицательных заявок нескольких типов.

Сети с многорежимными стратегиями обслуживания [4] позволяют моделировать ситуации, когда узлы сети могут работать в нескольких режимах, отвечающих разной степени их работоспособности. Режимы, в которых могут работать узлы сети, пронумерованы, каждый режим отличается своим набором показателей. Например, при переходе узла в режим с большим номером производительность узла уменьшается, ухудшается процесс обслуживания. При переходе узла в режим с меньшим номером происходит восстановление показателей процесса обслуживания, улучшается качество обслуживания.

В настоящей работе рассматривается модель открытой сети, в которую поступают пуассоновские потоки различных типов положительных и отрицательных заявок. Очереди в узлах сети формируются из положительных и отрицательных заявок. Обслуживания требуют только положительные заявки. Время пребывания в очереди узла для отрицательных заявок ограничено случайной величиной, имеющей экспоненциальное распределение с параметром, различным для каждого типа и обратно пропорциональным количеству требований данного типа в очереди узла. Отрицательная заявка, время пребывания в узле которой закончилось, уменьшает количество положительных заявок соответствующего типа на единицу, если такие есть в узле. Отрицательные заявки в рассматриваемой модели, например, могут описывать поведение компьютерных вирусов, воздействие которых на информацию (положительные заявки) происходит через случайное время.

1 Изолированный узел

Рассмотрим систему массового обслуживания, в которую поступает $2M$ независимых пуассоновских потока требований с параметрами $\lambda_1^+, \lambda_2^+, \ldots, \lambda_M^+, \lambda_1^-, \lambda_2^-, \ldots, \lambda_M^-$, при этом λ_u^+ есть интенсивность поступления положительных заявок типа u, λ_u^- есть интенсивность поступления отрицательных заявок типа u. Положительная заявка, поступившая в систему, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в системе на единицу и требует обслуживания. В системе находится M экспоненциальных приборов, u-ый прибор обслуживает положительные заявки типа u. Времена обслуживания заявок в системе независимы, не зависят от процессов поступления и для положительных заявок типа u имеют показательное распределение с параметром μ_u $(u=\overline{1,M})$. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Отрицательная заявка типа u, поступившая в систему, увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в системе на единицу. Каждая отрицательная заявка типа u, находящаяся в системе, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_u(m_u)=\dfrac{\tau_u}{m_u}$ для $m_u \ge 1$, где m_u – число отрицательных заявок типа u в системе, τ_u – некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в системе отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди на одну положительную заявку типа u, если в системе есть положительные заявки соответствующего типа, не производит никаких воздействий на систему, если в системе нет положительных заявок соответствующего типа. Процессы поступления, обслуживания и пребывания в системе независимы.

Предполагается, что система может находиться в одном из l режимов работы $\left(l=\overline{0,r}\right)$. Состояние рассматриваемой системы массового обслуживания в момент времени t характеризуется случайным вектором

$$x(t)=(\overline{n}(t), \overline{m}(t), l(t)) =$$
$$=(n_1(t),\ldots,n_M(t), m_1(t),\ldots,m_M(t), l(t)),$$

где $n_u(t)$ – количество положительных заявок типа u в системе в момент времени t, $m_u(t)$ – количество отрицательных заявок типа u в системе в момент времени t, $l(t)$ – режим, в котором работает система в момент времени t. Тогда $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и фазовым пространством состояний

$$X=\{x=(\overline{n},\overline{m},l)=(n_1,\ldots,n_M, m_1,\ldots,m_M, l),$$
$$n_u, m_u \ge 0,\ u=\overline{1,M},\ l=\overline{0,r}\}.$$

Состояние системы $x=(\overline{0},\overline{0},0)$ обозначим через 0.

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы системы, находящейся в состоянии $x=(\overline{n},\overline{m},l)$, в режиме l $\left(l=\overline{0,r}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu(\overline{n},\overline{m},l)$ $(\nu(\overline{n},\overline{m},l)>0)$ система переходит в $(l+1)$-ый режим $\left(l=\overline{0,r-1}\right)$, а с интенсивностью $\varphi(\overline{n},\overline{m},l)$ $(\varphi(\overline{n},\overline{m},l)>0)$ – в $(l-1)$-ый режим $\left(l=\overline{1,r}\right)$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в системе.

Предположим, что $\{p(x), x\in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$. Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют следующий вид:

$$p(x)\sum_{u=1}^{M}\Big[\lambda_u^+ + \lambda_u^- + \mu_u I_{\{n_u\ne 0\}} + \tau_u I_{\{m_u\ne 0\}} +$$
$$+\nu(x)I_{\{l\ne r\}} + \varphi(x) I_{\{l\ne 0\}}\Big] =$$
$$=\sum_{u=1}^{M}\Big(\lambda_u^+ p(\overline{n}-e_u, \overline{m}, l) I_{\{n_u\ne 0\}} +$$
$$+\lambda_u^- p(\overline{n}, \overline{m}-e_u, l) I_{\{m_u\ne 0\}} +$$
$$+\mu_u p(\overline{n}+e_u, \overline{m}, l) +$$
$$+\tau_u p(\overline{n}+e_u, \overline{m}+e_u, l) + \tau_u p(\overline{n}, \overline{m}+e_u, l) I_{\{n_u=0\}}\Big) +$$
$$+\nu(\overline{n},\overline{m},l-1) p(\overline{n},\overline{m},l-1) I_{\{l\ne 0\}} +$$
$$+\varphi(\overline{n},\overline{m},l+1) p(\overline{n},\overline{m},l+1) I_{\{l\ne r\}},$$
$$x=(\overline{n},\overline{m},l)\in X.$$

Здесь e_u – единичный вектор размерности M с единицей в u-ой позиции, $I_{\{x\}}$ – характеристическая функция, принимающая значение 1, если x истинно, 0 – в противном случае.

***Лемма* 1.1.** Для обратимости системы необходимо и достаточно выполнения условий

$$\nu(n_1,\ldots,n_M,l-1)\varphi(n_1,\ldots,n_u-1,\ldots,n_M,l) =$$
$$=\nu(n_1,\ldots,n_u-1,\ldots,n_M,l-1)\varphi(n_1,\ldots,n_M,l), \quad (1.1)$$
$$n_u\ne 0,\ u=\overline{1,M},\ l=\overline{1,r}.$$

***Теорема* 1.1.** Пусть для любого $u=\overline{1,M}$ выполняются условия обратимости (1.1) и неравенства

$$\frac{\lambda_u^+}{\mu_u+\lambda_u^-}<1,\quad \frac{\lambda_u^-}{\tau_u}<1,\quad \sup_{x\in X}[\nu(x)+\varphi(x)]=c<\infty,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний системы имеет следующий вид:

$$p(n_1,\ldots,n_M,m_1,\ldots,m_M,l)=$$
$$=\prod_{u=1}^{M}\left(\frac{\lambda_u^+}{\mu_u+\lambda_u^-}\right)^{n_u}\left(\frac{\lambda_u^-}{\tau_u}\right)^{m_u}\prod_{k=1}^{l}\frac{\nu(0,k-1)}{\varphi(0,k)}p(0),$$

где

$$p(0)=\left(1-\frac{\lambda_u^+}{\mu_u+\lambda_u^-}\right)\left(1-\frac{\lambda_u^-}{\tau_u}\right)\left(\sum_{l=0}^{r}\prod_{k=1}^{l}\frac{\nu(0,k-1)}{\varphi(0,k)}\right)^{-1}.$$

Здесь произведение, в котором верхний индекс меньше нижнего, полагаем равным единице.

Доказательство проводится стандартным образом: подстановкой стационарных вероятностей в уравнения равновесия. Условие эргодичности находится из теоремы Фостера.

2 Открытая сеть

Рассмотрим открытую сеть, состоящую из N узлов со структурой, описанной выше. В сеть поступают два независимых простейших потока: поток положительных заявок интенсивности λ^+ и поток отрицательных заявок интенсивности λ^-. Положительные и отрицательные заявки могут быть M типов. Каждая заявка потока положительных заявок независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p^+_{0(i,u)}$ $(i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M})$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p^+_{0(i,u)}=1.$ Положительная заявка, поступившая в узел, увеличивает длину очереди положительных заявок соответствующего типа в узле на единицу и требует обслуживания. Каждая заявка потока отрицательных заявок независимо от других заявок направляется в i-ый узел и становится заявкой типа u с вероятностью $p^-_{0(i,u)}$ $(i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M})$. Очевидно, что $\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}p^-_{0(i,u)}=1.$ Отрицательная заявка, поступившая в узел, увеличивает длину очереди отрицательных заявок соответствующего типа в узле на единицу и не требует обслуживания. Каждая отрицательная заявка типа u, находящаяся в i-ом узле, остается в очереди случайное время, имеющее показательное распределение с параметром $\tau_{(i,u)}(m_{(i,u)})=\frac{\tau_{(i,u)}}{m_{(i,u)}}$ для $m_{(i,u)}\geq 1$, где $m_{(i,u)}$ – количество отрицательных заявок типа u в i-ом узле, $\tau_{(i,u)}$ – некоторая положительная постоянная. После окончания времени пребывания в узле отрицательная заявка уменьшает длину соответствующей очереди положительных заявок типа u в i-ом узле на единицу, если в узле есть положительные заявки соответствующего типа, и не производит никаких воздействий на узел, если в узле нет положительных заявок соответствующего типа.

В каждом узле находится M экспоненциальных приборов, u-ый прибор обслуживает положительные заявки типа u. Заявки обслуживаются в порядке поступления. Времена обслуживания различных заявок независимы, не зависят от процесса поступления и для положительных заявок типа u в i-ом узле имеют показательное распределение с параметром $\mu_{(i,u)}$ $(i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M})$.

Предполагается, что i-ый узел может находиться в одном из l_i режимов работы $\left(l_i=\overline{0,r_i}, i=\overline{1,N}\right)$. Состояние сети в момент времени t характеризуется вектором

$$x(t)=\left(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_N(t)\right),$$

где

$$x_i(t)=\left(n_{(i,1)}(t),\ldots,n_{(i,M)}(t),m_{(i,1)}(t),\ldots,m_{(i,M)}(t),l_i(t)\right)$$

описывает состояние i-го узла в момент времени t. Здесь $n_{(i,u)}(t)$ – число положительных заявок типа u, $m_{(i,u)}(t)$ – число отрицательных заявок типа u, $l_i(t)$ – режим, в котором работает i-ый узел в момент времени t. Процесс $x_i(t)$ имеет пространство состояний

$$X_i=\{x_i=(n_{(i,1)},\ldots,n_{(i,M)},m_{(i,1)},\ldots,m_{(i,M)},l_i),$$
$$n_{(i,u)},m_{(i,u)}\geq 0,\ u=\overline{1,M}, l_i=\overline{0,r_i}\}.$$

Назовем нулевой режим основным режимом работы. Время работы узла, находящегося в состоянии $x_i=\left(\overline{n}_i,\overline{m}_i,l_i\right)$, в режиме l_i $\left(l_i=\overline{0,r_i}, i=\overline{1,N}\right)$ имеет показательное распределение, при этом с интенсивностью $\nu_i\left(\overline{n}_i,\overline{m}_i,l_i\right)$ $\left(\nu_i\left(\overline{n}_i,\overline{m}_i,l_i\right)>0\right)$ i-ый узел переходит в $\left(l_i+1\right)$-ый режим $\left(l_i=\overline{0,r_i-1}\right)$, а с интенсивностью $\varphi_i\left(\overline{n}_i,\overline{m}_i,l_i\right)$ $\left(\varphi_i\left(\overline{n}_i,\overline{m}_i,l_i\right)>0\right)$ – в $\left(l_i-1\right)$-ый режим $\left(l_i=\overline{1,r_i}\right)$. Переключение прибора с одного режима в другой сохраняет общее число заявок в узле.

Каждая положительная заявка типа u после завершения обслуживания в i-ом узле независимо от других заявок мгновенно направляется в j-ый узел и становится положительной заявкой типа v с вероятностью $p^+_{(i,u)(j,v)}$ или отрицательной заявкой типа v с вероятностью $p^-_{(i,u)(j,v)}$, а с вероятностью $p_{(i,u)0}$ покидает сеть.

$$\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}(p^+_{(i,u)(j,v)}+p^-_{(i,u)(j,v)})+p_{(i,u)0}=1$$
$$(i=\overline{1,N}, u=\overline{1,M}).$$

Будем предполагать, что матрица маршрутизации неприводима. Процессы поступления и обслуживания в сети независимы.

Нелинейные уравнения трафика для $i=\overline{1,N}$, $u=\overline{1,M}$ имеют вид

$$\varepsilon^+_{(i,u)}=\lambda^+p^+_{0(i,u)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\frac{\varepsilon^+_{(j,v)}\mu_{(j,v)}}{\mu_{(j,v)}+\varepsilon^-_{(j,v)}}p^+_{(j,v)(i,u)},$$

$$\varepsilon^-_{(i,u)}=\lambda^-p^-_{0(i,u)}+\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}\frac{\varepsilon^+_{(j,v)}\mu_{(j,v)}}{\mu_{(j,v)}+\varepsilon^-_{(j,v)}}p^-_{(j,v)(i,u)}.$$

Доказательство существования решения нелинейных уравнений трафика проводится с помощью теоремы Брауэра о неподвижной точке [5].

Процесс $x(t)$ – однородный марковский процесс с непрерывным временем и пространством состояний $X=X_1\times X_2\times\ldots\times X_N$, где X_i – пространство состояний i-го узла.

***Лемма* 2.1.** Для обратимости изолированного узла необходимо и достаточно выполнения условий

$$\nu_i(n_{(i,1)},\ldots,n_{(i,M)},l_i-1)\varphi_i(n_{(i,1)},\ldots,n_{(i,u)}-1,\ldots,n_{(i,M)},l_i)=$$
$$=\nu_i(n_{(i,1)},\ldots,n_{(i,u)}-1,\ldots,n_{(i,M)},l_i-1)\varphi_i(n_{(i,1)},\ldots,n_{(i,M)},l_i),$$
$$n_{(i,u)}\neq 0,\ u=\overline{1,M},\ l_i=\overline{1,r_i},\ i=\overline{1,N}. \quad (2.1)$$

Пусть $\{p(x),\,x\in X\}$ – стационарное распределение вероятностей состояний процесса $x(t)$.

Уравнения равновесия для стационарных вероятностей имеют вид

$$p(x)\Bigg[\lambda^++\lambda^-+\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\Big(\mu_{(i,u)}I_{\{n_{(i,u)}\neq0\}}+\tau_{(i,u)}I_{\{m_{(i,u)}\neq0\}}\Big)+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}\Big(\nu_i(x_i)I_{\{l_i\neq r_i\}}+\varphi_i(x_i)I_{\{l_i\neq0\}}\Big)\Bigg]=$$
$$=\sum_{i=1}^{N}\sum_{u=1}^{M}\Big[p(x-e_{(i,u)})\lambda^+p^+_{0(i,u)}I_{\{n_{(i,u)}\neq0\}}+$$
$$+p(x-e_{(i,M+u)})\lambda^-p^-_{0(i,u)}I_{\{m_{(i,u)}\neq0\}}+$$
$$+p(x+e_{(i,u)})\mu_{(i,u)}p_{(i,u)0}+p(x+e_{(i,u)}+e_{(i,M+u)})\tau_{(i,u)}+$$
$$+p(n+e_{(i,M+u)})\tau_{(i,u)}I_{\{n_{(i,u)}=0\}}+$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\sum_{v=1}^{M}[p(x+e_{(i,u)}-e_{(j,v)})\mu_{(i,u)}p^+_{(i,u)(j,v)}I_{\{n_{(j,v)}\neq0\}}+$$
$$+p(x+e_{(i,u)}-e_{(j,M+v)})\mu_{(i,u)}p^-_{(i,u)(j,v)}I_{\{m_{(j,v)}\neq0\}}]\Big]+$$
$$+\sum_{i=1}^{N}[p(x-e_{(i,2M+1)})\nu_i(x-e_{(i,2M+1)})I_{\{l_i\neq0\}}+$$
$$+p(x+e_{(i,2M+1)})\varphi_i(x+e_{(i,2M+1)})I_{\{l_i\neq r_i\}}],\quad x\in X.$$

Здесь $e_{(i,k)}$ – единичный вектор размерности $([2M+1]\cdot N)$ с единицей в ($(2M+1)(i-1)+k$)-ой позиции.

***Теорема* 2.1.** Пусть для любых $i=\overline{1,N}$, $u=\overline{1,M}$ выполняются условия обратимости (2.1) и неравенства

$$\frac{\varepsilon^+_{(i,u)}}{\mu_{(i,u)}+\varepsilon^-_{(i,u)}}<1,\quad \frac{\varepsilon^-_{(i,u)}}{\tau_{(i,u)}}<1,$$
$$\sup_{x_i\in X_i}[\nu_i(x_i)+\varphi_i(x_i)]=c_i<\infty,$$

тогда марковский процесс $x(t)$ эргодичен, а финальное стационарное распределение вероятностей состояний сети имеет следующий вид:

$$p(x)=p_1(x_1)\,p_2(x_2)\ldots p_N(x_N),\quad x\in X,$$

где

$$p_i(x_i)=\prod_{u=1}^{M}\left(\frac{\varepsilon^+_{(i,u)}}{\mu_{(i,u)}+\varepsilon^-_{(i,u)}}\right)^{n_{(i,u)}}\times$$
$$\times\left(\frac{\varepsilon^-_{(i,u)}}{\tau_{(i,u)}}\right)^{m_{(i,u)}}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\nu_i(0,k-1)}{\varphi_i(0,k)}p_i(0),$$
$$p_i(0)=\left(1-\frac{\varepsilon^+_{(i,u)}}{\mu_{(i,u)}+\varepsilon^-_{(i,u)}}\right)\left(1-\frac{\varepsilon^-_{(i,u)}}{\tau_{(i,u)}}\right)\times$$
$$\times\left(\sum_{l_i=0}^{r_i}\prod_{k=1}^{l_i}\frac{\nu_i(0,k-1)}{\varphi_i(0,k)}\right)^{-1},$$

$(\varepsilon^+_{(i,u)},\varepsilon^-_{(i,u)},\,i=\overline{1,N},\,u=\overline{1,M})$ – решение нелинейных уравнений трафика.

Доказательство теоремы проводится стандартным образом, подстановкой стационарного распределения в уравнения равновесия.

При отсутствии режимов обслуживания результаты работы совпадают с результатами [3]. В случае, когда в узле нет ограничения на время пребывания отрицательных заявок, результаты работы совпадают с [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gelenbe, E.* Stability of product-form G-networks / E. Gelenbe, R. Schassberger // Probab. Eng. and Inf. Sci. – 1992. – Vol. 6. – P. 271–276.

2. *Gelenbe, E.* Product-form networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P.656–663.

3. *Якубович, О.В.* Стационарное распределение сети массового обслуживания с различными типами отрицательных и положительных заявок и ограничением на время ожидания / О.В. Якубович // Известия Гомельского государственного университета им. Ф.Скорины. – 2007. – № 6 (45). – С. 198–202.

4. *Летунович, Ю.Е.* Открытые неоднородные сети с многорежимными стратегиями обслуживания и ограничением на время пребывания / Ю.Е. Летунович // Массовое обслуживание: потоки, системы, сети: материалы междунар. науч. конф. «Современные математические методы анализа и оптимизации информационно-телекоммуникационных сетей», Минск, 26–29 января 2009 г. / БГУ; редкол. : А.Н. Дудин (отв. ред.) [и др.]. – Минск, 2009. – Вып. 20. – С. 132–137.

5. *Данфорд, Н.* Линейные операторы. Общая теория / Н. Данфорд, Дж. Т. Шварц. – М. : ИЛ, 1962. – 522 с.

Поступила в редакцию 26.06.12.