С. А. ЛУКАШЕВИЧ, А. Н. КУПО, Е. Б. ШЕРШНЕВ
Беларусь, Гомель, УО «ГГУ имени Ф. Скорины»

МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СКОРОСТИ ДИССИПАЦИИ ЭНЕРГИИ ЗАТУХАЮЩЕГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Для расчета определения скорости диссипации энергии затухающего гармонического осциллятора рассмотрим случай слабого затухания. Общую энергию колеблющегося осциллятора запишем в виде $E = \frac{KA^2}{2}$, где при затухающих колебаниях амплитуда $A = A_0 e^{-\delta t}$.

Определим скорость изменения энергии:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{1}{2} K A_0^2 e^{-2\delta t} (\omega\, sin2\omega t + \delta \cos^2 \omega t). \quad (1)$$

Среднее значение скорости энергии за период есть некоторая величина:

$$< \frac{dE}{dt} > = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \frac{dE}{dt} dt. \quad (2)$$

При слабом затухании множитель $e^{-2\delta t}$ меняется медленно и его можно вынести за знак интеграла. Находим

$$< \frac{dE}{dt} > = -\frac{1}{4} K \delta A_0^2 e^{-2\delta t}. \quad (3)$$

При изучении вынужденных колебаний под действием гармонической силы $F = F_0\, cos\omega t$ уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = f\, cos\omega t, \quad (4)$$

где $f = \frac{F_0}{m}$. Установившееся колебания происходят по закону:

$$x = B\cos(\omega t + \varphi), \quad (5)$$

где

$$B = \frac{f}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2) + 4\omega^2\delta^2}}, \quad (6)$$

$$\varphi = arctg \frac{2\omega\delta}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (7)$$

Если на осциллятор действует внешняя сила иного вида, то подход к решению задачи зависит от характера действующей силы.

Когда мы рассматриваем уравнение затухания колебаний, которое обычно приводится к каноническому виду:

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (8)$$

где $\delta > 0$ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота, то в таком уравнении правая часть, не зависящая от искомой функции и ее производных, равна нулю, и оно называется однородным уравнением. Уравнение типа (4) с отличной от нуля правой частью называется неоднородным уравнением. Любое конкретное, полностью определенное решение уравнения называется частным решением.

При поиске решения уравнения (4) следует использовать следующую математическую теорему: общее решение неоднородного уравнения равно сумме общего решения соответствующего однородного уравнения и любого частного решения неоднородного уравнения.

В задачах на изучение линейных колебаний общее решение однородного уравнения записывается сразу. Так, решение уравнения (8):

$$x = Ae^{-\delta t}\sin(\omega t + \varphi_0) \quad (9)$$

существует при $\delta < \omega_0$, частота колебаний $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$.

Трудность может представлять лишь нахождение частного решения неоднородного уравнения. Однако в уравнении (4) частные решения неоднородного уравнения находятся легко, так как в правой части стоит либо линейная функция от времени, либо гармоническая, либо экспоненциальная. В этих случаях частное решение находится в виде функции того же вида: если

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = at + b\,, \quad (10)$$

то $x = At + B$ есть частное решение при $A = \frac{a}{\omega_0^2}$, $B = \frac{b - 2a\frac{\delta}{\omega_0^2}}{\omega_0^2}$, если

$$\ddot{x} + 2\delta\dot{x} + \omega_0^2 x = ae^{bt}, \quad (11)$$

где

$$x = Ae^{bt} \quad (12)$$

есть частное решение, причем $A = \frac{a}{b^2 + 2b\delta + \omega_0^2}$.

В случае гармонической правой части уравнение (4) имеет частное решение (5).

Если на осциллятор воздействует периодическая негармоническая сила, то наиболее часто используется ее представление в виде ряда Фурье – ряды по гармоническим функциям. Использование ряда Фурье является одним из фундаментальных методов теоретического анализа и практических расчетов. Основу подхода составляет математическое утверждение, что любую периодическую кусочно-непрерывную функцию $f(x)$ можно представить в виде бесконечной суммы:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t, \quad (13)$$

где $\omega = \frac{2\pi}{T}$, T – период функции, а коэффициенты a_0, a_n, b_n вычисляются по формулам:

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt, \tag{14}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt, \tag{15}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt. \tag{16}$$

В точках разрыва функция ряда Фурье дает среднее арифметическое из ее значений справа и слева.

Широкое использование ряда Фурье связано с тем обстоятельством, что сразу находится частное решение линейных неоднородных уравнений, если правую часть представить в виде ряда и использовать формулы типа (5)–(7) для последовательных слагаемых. Особенно легко выполнить расчеты, если коэффициенты ряда Фурье быстро убывают с ростом их номера. Тогда можно учесть лишь несколько первых членов ряда и получить решение с хорошей точностью. Впрочем, при использовании современных вычислительных средств нередки случаи, когда для достаточно точного расчета какой-либо конкретной задачи суммируют несколько сотен и тысяч членов ряда Фурье. Важно, что решение можно получить с любой наперед заданной степенью точности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Т. 1. Механика / Д. В. Сивухин. – М. : Наука, 1974. – 520 с.

2. Шнейдер, В. Е. Краткий курс высшей математики. Т. 2 / В. Е. Шнейдер, А. И. Слуцкий, А. С. Шумов. – М. : Высш. шк., 1978. – С. 178–191.

С. А. МАРЗАН
Беларусь, Брест, УО «БрГУ имени А. С. Пушкина»

ВЕСОВАЯ ЗАДАЧА ТИПА КОШИ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В теории дробного интегро-дифференцирования особое значение имеют вопросы существования решений краевых задач для линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с дробными производными в различных функциональных пространствах.

Настоящая работа посвящена вопросам существования и единственности решения весовой задачи типа Коши для нелинейного дифференциального уравнения с дробной производной Римана – Лиувилля [1]

$$\left(D_{a+}^{\alpha}y\right)(x) = f\left[x, y(x)\right] \ \left(\alpha \in C, 0 < \mathrm{Re}(\alpha) < 1\right) \tag{1}$$