СЕКЦИОННЫЕ ЗАСЕДАНИЯ

1. «Оптика и акустика кристаллов»
(нелинейная оптика, гиротропия в оптике и акустике кристаллов)

Председатель: Семченко Игорь Валентинович, д. ф.-м. н.

С.С. Гиргель

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Беларусь

ПУЧКИ КУММЕРА С ПЕРЕНОСИМОЙ КОНЕЧНОЙ МОЩНОСТЬЮ

Введение

Многие решения волнового уравнения описывают волновые поля, которые переносят бесконечную мощность через поперечное сечение перпендикулярно оси z пучка. Следовательно, характеризуемые ими волновые поля во всем пространстве являются физически нереализуемыми. Примеры: плоские, цилиндрические и сферические волны. Обычно для параксиальных пучков используется аподизация соответствующей функции в форме гауссиана, чтобы функция, описывающая такой пучок, была квадратично интегрируема (КИ.). Простейшими примерами являются пучки Гаусса, Эрмита-Гаусса, Лагерра-Гаусса и Бесселя-Гаусса.

В настоящей работе будет показано, что возможен новый тип параксиальных световых пучков, у которых гауссова аподизация отсутствует. Такие пучки описываются функциями Куммера, которые сами КИ при определенных ограничениях на их параметры.

1. Пучки Куммера

Для монохроматических волн вида $f(\boldsymbol{r},t) = f\,exp(kz - i\omega t)$ скалярное параболическое уравнение, решением которого является амплитуда f параксиального светового 2D пучка, имеет вид [1-5]:

$$(\partial^2_{x,x} + 2ik\partial_z)\,f = 0. \qquad (1)$$

Целесообразно далее перейти к безразмерным переменным

$$X = x / x_0, \quad Z = z / z_0. \tag{2}$$

Здесь $x_0 > 0$, $z_0 = k x_0^2 / 2$ – некоторые характерные размеры пучка в направлениях, параллельных осям OX и OZ соответственно. Вместо стандартного комплексного параметра пучка $q = z - q_0$, где z – расстояние от начала координат до точки, лежащей на оси пучка, в которой определяются характеристики волнового поля, введем комплексный безразмерный параметр пучка $Q = q / z_0$ и запишем, учитывая формулы (2):

$$Q = Z - Q_0, \text{ где } \quad Q_0 = Q_0^{'} - Q_0^{''}. \tag{3}$$

Теперь параболическое уравнение (1) можно записать в безразмерном виде:

$$(\partial_{X,X}^2 + 4i\partial_Q) f = 0. \tag{4}$$

Для получения искомых решений выполним нелинейную замену переменного X в (4):

$$X_1 = \sqrt{i / Q} \cdot X. \tag{5}$$

Получаем дифференциальное уравнение

$$\partial_{X_1, X_1}^2 f + \frac{4i}{Q} X_1 \partial_{X_1} f + 4\, Q\, \partial_Q\, f = 0. \tag{6}$$

Разделяя переменные, получаем решениями уравнения (4) без гауссовой аподизации функции f^o и f^e:

$$f \equiv f^o + f^e = \left[A \cdot X_1 \cdot M\left(\frac{1}{2} - \frac{\nu}{2}, \frac{3}{2}, X_1^2 \right) + B \cdot M\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}, X_1^2 \right) \right] Q^{\nu/2}. \tag{7}$$

Постоянная разделения переменных ν является, в общем случае, свободным комплексным параметром: $\nu = \nu' + i\nu''$. Комплексный аргумент X_1 функций Куммера M зависит от поперечной координаты X и комплексного параметра пучка Q: $X_1 = \sqrt{i/Q} \cdot X$. Функция Куммера M является конфлюэнтной гипергеометрической функцией ${}_1F_1$ [6], A и B – некоторые произвольные постоянные. Индексы *o* и *e* отмечают соответственно четность (*even*) и нечетность (*odd*) функций f^e и f^o относительно изменения знака аргумента X_1.

2D пучки, описываемые функциями f^o и f^e, будем называть пучками Куммера. Функции (7) зависят от двух произвольных комплексных параметров Q и ν. Подчеркнем, что, в соответствии с (7), для произвольного набора комплексных параметров (Q_0, ν) всегда существуют два независимых решения f^e и f^o – четное и нечетное относительно изменения знака переменной *X*.

Заметим, что трехмерные скалярные решения для пучков Куммера можно построить как произведения 2D решений типа (7):

$$f(X,Y,Z) = f(X,Q_X,\nu_X)\cdot f(Y,Q_Y,,\nu_Y)\,. \qquad (8)$$

При этом возможна любая комбинация четностей. Поэтому, в общем случае, амплитуда 3D скалярного пучка Куммера зависит от трех координат и четырех свободных комплексных параметров. Это расширяет возможности при конструировании пучков с требуемыми свойствами.

2. Условия физической реализуемости пучков Куммера

Наибольший практический интерес представляют физически реализуемые пучки конечной мощности [1, 2]. Амплитуда такого пучка должна быть ограниченной при всех *X*. Более того, при $X \to \pm\infty$ амплитуда *f* должна стремиться к нулю и быть квадратично интегрируемой.

Проведем анализ условий КИ для 2D пучков Куммера. Для этого исследуем асимптотическое поведение функций f при $|f| \to \infty$. Асимптотическое поведение конфлюэнтной гипергеометрической функции $F_1(a,b,\Phi)$ при $|\Phi| \to \infty$ описывается формулой [7, 10]

$$F_1(a,b,\Phi) = \frac{\exp(-i\pi a)\cdot \Gamma(b)}{\Gamma(b-a)}\Phi^{-a} + \frac{\exp(\Phi)\cdot\Gamma(b)}{\Gamma(a)}\Phi^{a-b}, \qquad (9)$$

где Γ – гамма-функция и $a \neq 0,-1,-3,...$. Учитывая (9) применительно к (7), получаем условия КИ для пучков, соответствующие различным частным ситуациям, рассмотренным ниже.

Можно убедиться, что условия физической реализуемости, т.е. КИ для четных и нечетных мод Куммера одинаковы, поэтому далее индексы o и e при f опускаем. Необходимое условие КИ пучков Куммера – $Q_0^{''} > 0$. А) Если $\nu' < -1/2$, то пучок является КИ. Б) Если $\nu' \in [-1/2, 0)$, то $|f| \to 0$ при $|x| \to \infty$, но пучок – не КИ. В) Если $\nu' = 0$, то $|f| \to const$ при $|x| \to \infty$ и пучок – не КИ. Г) Если $\nu' > 0$, то $|f| \to \infty$ при $|x| \to \infty$ и пучок – не КИ.

При этом мнимая часть ν'' комплексного параметра $\nu = \nu' + i\nu''$ не влияет на КИ. Все найденные выше условия КИ для функций, используемых при описании пучков Куммера, подтверждаются также при графическом моделировании их свойств.

Для 3D пучков Куммера условия КИ в плоскостях XZ и YZ аналогичны. Отметим, что по своим свойствам пучки Куммера схожи с пучками Куммера-Гаусса [3-5]. Так, пучки Куммера в процессе распространения изменяют свой поперечный профиль.

Заключение

В данной работе представлены новые решения скалярного параболического уравнения для параксиальных 2D световых пучков. Такие пучки описываются функциями Куммера комплексного аргумента с двумя свободными параметрами без гауссовой аподизации.

Установлено, что каждому набору двух свободных комплексных параметров (Q_0, ν) всегда соответствуют два типа световых пучков – описываемых четными (f^e) и нечетными (f^o) функциями аргумента X. Фазовая и амплитудная поверхности даже при распространении в свободном пространстве непрерывно трансформируются. Поэтому пучки Куммера являются пучками с изменяющейся геометрией.

Найдены ограничения на параметры, при соблюдении которых полученные решения соответствуют параксиальным пучкам с конечной энергией, то есть физически реализуемым. Установлено также, что условия физической реализуемости для чётных и нечётных пучков Куммера одинаковы.

Показано, что выражения, полученные для описания 2D пучков Куммера, легко обобщаются в формулы, соответствующие 3D пучкам.

Литература

1. Ананьев, Ю.А. Оптические резонаторы и лазерные пучки / Ю.А. Ананьев. – М.: Наука, 1990. – 264 с.

2. Гончаренко, А.М. Гауссовы пучки света / А.М. Гончаренко. – Мн.: Наука и техника, 1977. – 142 с.

3. Гиргель, С.С. Физические свойства скалярных 2D пучков Куммера-Гаусса. / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2011. – № 4(9). – С. 19–23.

4. Гиргель, С.С. Скалярные астигматимеские 3D световые пучки Куммера-Гаусса. / С.С. Гиргель // Проблемы, физики, математики и техники. – 2013. – № 14(14). – С. 19–23.
5. Bandres, M.A. Cartesian beams / M.A. Bandres and J. C. Gutierres-Vega // Optics Letters. – 2007. – Vol. 32. – № 23. – P. 3459–3461.
6. Флюгге, З. Задачи по квантовой механике. Т.2 / З. Флюгге. – М.: Мир, 1974. – 418 с.

Ж.В. Колядко, В.В. Давыдовская, В.В. Шепелевич

УО «Мозырский государственный педагогический университет имени И.П. Шамякина», Беларусь

СИНГУЛЯРНЫЕ ОПТИЧЕСКИЕ ПУЧКИ С РАЗЛИЧНЫМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ ЗАРЯДАМИ В ФОТОРЕФРАКТИВНЫХ КРИСТАЛЛАХ КЛАССОВ 23 И 4mm

Оптический вихрь – это световое поле, в поперечном сечении которого имеется нуль интенсивности, а фаза при обходе такой нулевой точки приобретает набег, кратный 2π [1]. Оптические пучки, несущие фазовую сингулярность, также называют сингулярными [2] (лазерные пучки с винтовыми фазовыми особенностями) или вихревыми пучками [1, 2] («optical vortices»). При этом если смотреть в направлении, перпендикулярном оси распространения пучка, оптический вихрь выглядит как темная область в центре яркого концентрического кольца света [3].

В дефокусирующей среде оптические вихри могут образовать солитон [4]. Впервые оптические вихревые солитоны экспериментально наблюдались в дефокусирующей керровской нелинейной среде с использованием квазивинтовой фазовой маски [4]. В настоящее время изучены условия формирования оптического вихревого солитона в кристаллах SBN [5] и $LiNbO_3$ [6]. Сравнительно мало работ связано с изучением солитоноподобного распространения сингулярных оптических пучков в кубических фоторефрактивных кристаллах (см., например, [7]). В связи с этим целью настоящей работы является сравнение условий формирования квазисолитонного режима распространения сингулярного оптического пучка в фоторефрактивных кристаллах класса 23 (BSO) и класса 4mm (SBN).