Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (108), 2018

УДК 512.542

О пересечении A-допустимых Θ-подгрупп, не содержащих p-нильпотентный радикал

Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, Т.В. Бородич, А.В. Бузланов, М.В. Селькин

Исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер ненильпотентных максимальных A-допустимых Θ-подгрупп, не содержащих подгруппу Фиттинга. Установлено влияние соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини на строение самой группы.
Ключевые слова: конечная группа, абнормальная подгруппа, подгруппа Фиттинга

The structure of a subgroup equal to the intersection of kernels Non-nilpotent Maximal A-admissible Θ-subgroups that do not contain Fitting subgroup. The influence of the corresponding generalized Frattini subgroup on the structure of the group itself is established.
Keywords: finite group, abnormal subgroup, Fitting subgroup.

1. Введение. Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. В теории конечных групп центральное место занимают объекты, экстремально расположенные в группе. К таким объектам в первую очередь относятся максимальные подгруппы. Одно из направлений теории пересечений максимальных подгрупп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Данное направление берет начало с работы Фраттини [1], установившего нильпотентность пересечения $\Phi(G)$ всех максимальных подгрупп конечной группы G. Полученные им результаты в дальнейшем развивались в работах многих авторов (см. монографии [2] и [3]).

В настоящее время одно из направлений развитие данной теории связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не содержащих некоторую нормальную подгруппу конечной группы [4].

Данная работа посвящена развитию указанного направления в группах с операторами. Приведенные в статье определения, обозначения и некоторые следствия являются общепринятыми и их можно найти в монографиях [2] и [3].

2. Определения и обозначения. Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

Учитывая, что максимальные подгруппы оказывают существенное влияние на строение конечных групп, рассмотрим максимальные подгруппы среди подгрупп, обладающих общим заданным свойством, и изучим их пересечения и влияние на нормальное строение группы.

Напомним, что классом групп называют всякое множество групп, содержащее вместе с каждой своей группой G и все группы, изоморфные G.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется формацией, если выполняются следующие условия:

1) если $G \in \mathfrak{F}$ и $N \lhd G$, то $G/N \in \mathfrak{F}$;

2) если $G/N_1 \in \mathfrak{F}$ и $G/N_2 \in \mathfrak{F}$, то $G/N_1 \cap N_2 \in \mathfrak{F}$.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация. Тогда через $G^{\mathfrak{F}}$ обозначается $\mathfrak{F}$-корадикал группы G – пересечение всех нормальных подгрупп N группы, для которых $G/N \in \mathfrak{F}$. Если $\mathfrak{F}$ – формация, замкнутая относительно произведений нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп, то наибольшую нормальную $\mathfrak{F}$-подгруппу называют $\mathfrak{F}$-радикалом группы G и обозначают $G_{\mathfrak{F}}$.

Пусть даны группа G, множество A и отображение $f: A \mapsto End(G)$, где $End(G)$ – гомоморфное отображение группы G в себя или эндоморфизм группы G. Подгруппа M

называется A-допустимой, если M выдерживает действие всех операторов из A, то есть $M^{\alpha} \subseteq M$ для любого оператора $\alpha \in A$.

Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им эндоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Пусть $\mathfrak{X}$ произвольный непустой класс групп. Сопоставим со всякой группой $G \in \mathfrak{X}$ некоторую систему подгрупп $\tau(G)$. Согласно [5] будем говорить, что τ – подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор (подгрупповой функтор на $\mathfrak{X}$), если для всякого эпиморфизма $\phi : A \mapsto B$, где $A, B \in \mathfrak{X}$, выполнены включения $(\tau(A))^{\phi} \subseteq \tau(B)$, $(\tau(B))^{\phi^{-1}} \subseteq \tau(A)$, и, кроме того, для любой группы $G \in \mathfrak{X}$ имеет место $G \in \tau(G)$.

Если $\mathfrak{X} = \mathfrak{G}$ – класс всех групп, то подгрупповой $\mathfrak{X}$-функтор называют просто подгрупповым функтором.

В дальнейшем функтор θ будем называть абнормально полным, если для любой группы G среди множества $\theta(G)$ содержатся все абнормальные подгруппы группы G.

Через M_G обозначают ядро подгруппы M в группе G (то есть пересечение всех подгрупп из G, сопряженных с подгруппой M).

В дальнейшем для каждой группы G будем фиксировать некоторую ее группу операторов. Несложно заметить, что так как операторы действуют как соответствующие им автоморфизмы, то каждая характеристическая подгруппа является A-допустимой для произвольной группы операторов.

Подгруппа H группы G называется максимальной A-допустимой подгруппой в G, если H является A-допустимой и любая собственная A-допустимая подгруппа из G, содержащая H, совпадает с H.

Заметим, что максимальная A-допустимая подгруппа M либо целиком содержит p-нильпотентный радикал $F_p(G)$ группы G, либо $MF_p(G) = G$. Действительно. Так как произведение A-допустимых подгрупп A-допустимо и $F_p(G)$ – характеристическая подгруппа, а, следовательно, A-допустимая, то $MF_p(G) = M$ или $MF_p(G) = G$. Аналогичные рассуждения верны и для p-нильпотентного корадикала.

Пусть $\mathfrak{F}$ – формация p-нильпотентных групп. Введем следующие обозначения:

1. $\overline{\Phi}^{p}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq F_p(G),\ M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \notin \mathfrak{F},\ M \in \theta(G),\ M$ – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

2. $\Phi^{p}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \not\supseteq F_p(G),\ M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \in \theta(G),\ M$ – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

3. $\Phi^{p}_{\theta_{F_p}}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \supseteq F_p(G),\ M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M \in \theta(G),\ M$ – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

4. $\Phi^{p}_{\theta}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \in \theta(G),\ M \not\supseteq G^{\mathfrak{F}},\ M$ – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$;

5. $\Phi_{\theta}(G, A) = \cap\{M_G \mid M \in \theta(G),\ M$ – максимальная A-допустимая подгруппа$\}$.

Если A – единичная группа операторов, то будем использовать обозначения $\overline{\Phi}^{p}_{\overline{F}_p}(G)$, $\Phi^{p}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G)$, $\overline{\Phi}^{\mathfrak{N}}_{\overline{F}}(G)$.

Всегда полагаем, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

Введем следующие обозначения.

В случае, когда θ тривиальный функтор, то подгруппа $\Phi_{\theta}(G,A)$ совпадает с подгруппой $\Phi(G,A)$, некоторые свойства которой были описаны Л.Я. Поляковым в [6]. Если функтор θ абнормальный, то подгруппу $\Phi_{\theta}(G,A)$ будем обозначать $\Delta(G,A)$ (операторный аналог подгруппы Гашюца $\Delta(G)$, введенной в [7]). Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех абнормальных максимальных подгрупп группы G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе.

Напомним, что подгруппой Гашюца $\Delta(G)$ называют подгруппу, равную пересечению всех ненормальных максимальных подгрупп группы G.

Необходимо отметить, что не каждая максимальная подгруппа будет являться максимальной A-допустимой относительно некоторой группы операторов A, а так же не всякая максимальная A-допустимая подгруппа группы является максимальной подгруппой в этой же группе (см. [5]).

3. Вспомогательные результаты.

Лемма 3.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор и $\Phi_{\theta}^{p}(G,A)\neq G$, тогда справедливы следующие утверждения:*

1. $\Phi_{\theta}^{p}(G,A)\subseteq F_p(G)$, если G – разрешимая неединичная группа, то $\Phi_{\theta}^{p}(G,A)\subset F_p(G)$;
2. $F_p(G/\Phi_{\theta}^{p}(G,A))=F_p(G)/\Phi_{\theta}^{p}(G,A)$.

Доказательство. Из работы [8] следует, что $\Phi_{\theta}^{p}(G,A)$ является p-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $\Phi_{\theta}^{p}(G,A)\subseteq F_p(G)$. Пусть G – разрешимая неединичная группа. Тогда $G/\Phi_{\theta}^{p}(G,A)$ разрешима и неединична. Пусть $B/\Phi_{\theta}^{p}(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_{\theta}^{p}(G,A)$. Так как $B/\Phi_{\theta}^{p}(G,A)$ – p-группа для некоторого простого p, а формация p-нильпотентных групп является нормально наследственной локальной формацией, содержащей все нильпотентные группы, то по теореме 3 из [8] B является p-нильпотентной, а это значит, что $B\subseteq F_p(G)$. Следовательно, $\Phi_{\theta}^{p}(G,A)\subset G$.

Если $F_p(G/\Phi_{\theta}^{p}(G,A))=$□ то □ является p-нильпотентной подгруппой, поэтому □ и $F_p(G/\Phi_{\theta}^{p}(G,A))\subseteq F_p(G)/\Phi_{\theta}^{p}(G,A)$. Обратное включение следует из определения подгруппы $F_p(G)$.

4. Основной результат.

Теорема 4.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор, тогда справедливы следующие утверждения:*

1) в разрешимой неединичной группе выполняется равенство $\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}^{p}(G,A)=\Phi_{\theta}(G,A)$;

2) в разрешимой не p-нильпотентной группе подгруппа $\Phi_{\theta_{F_p}}(G,A)\in(\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p)^2$.

Доказательство. Подгруппы $\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)$ и $\Phi_{\theta_{F_p}}(G,A)$ являются характеристическими в G и

$$\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)\cap\Phi_{\theta_{F_p}}(G,A)=\Phi_{\theta}(G,A).$$

Для факторгруппы $G/\Phi_{\theta}(G,A)$ выполняется

$$F_p(G/\Phi_{\theta}(G,A))=F_p(G)/\Phi_{\theta}(G,A),$$

поэтому

$$\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G/\Phi_\theta(G,A)) = \Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A).$$

Предположим, что $\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A) \neq 1$ и пусть $K/\Phi_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi_\theta(G,A)$, содержащаяся в $\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A)$. Так как формация p-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/\Phi_\theta(G,A)$ p-нильпотентна и по теореме 4.5 из [8] K является p-нильпотентной подгруппой. Следовательно, $K \subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K \subseteq \Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A) \cap \Phi_{\theta_{F_p}}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)/\Phi_\theta(G,A) = 1$, а, значит, $\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A) = \Phi_\theta(G,A)$.

Пусть G – разрешимая не p-нильпотентная группа. Из того, что $F_p(G) \subseteq \Phi_{\theta_{F_p}}(G,A)F_p(G)$ и

$$\Phi_{\theta_{F_p}}(G,A)/F_p(G) = \Phi_\theta(G/F_p(G),A),$$

следует, что подгруппа $\Phi_{\theta_{F_p}}(G,A) \in (\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p)^2$.

Следствие 4.1.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор, тогда в разрешимой неединичной группе подгруппа $\Phi_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)$ p-нильпотентна.*

Если группа операторов A является тривиальной, то имеет место следующее:

Следствие 4.1.2. *Пусть G – разрешимая группа, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. если $G \neq 1$, то $\Phi^p_{\theta_{\overline{F}_p}}(G) = \Phi_\theta(G)$;
2. в любой не p-нильпотентной группе G подгруппа $\Phi_{\theta_{F_p}}(G) \in (\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p)^2$.

Следствие 4.1.3. *Пусть Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. В разрешимой неединичной группе подгруппа $\Phi^p_{\theta_{\overline{F}_p}}(G)$ p-нильпотентна.*

Если группа операторов A является тривиальной и подгрупповой функтор Θ выделяет все максимальные подгруппы группы G, то имеет место следующее

Следствие 4.1.4. *Пусть G – разрешимая группа. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. если $G \neq 1$, то $\Phi^p_{\overline{F}_p}(G) = \Phi^p(G)$;
2. в любой не p-нильпотентной группе G подгруппа $\Phi^p_{F_p}(G) \in (\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p)^2$.

Следствие 4.1.5. *В разрешимой неединичной группе подгруппа $\Phi^p_{\overline{F}_p}(G)$ p-нильпотентна.*

Если вместо формации p-нильпотентных групп выбрать формацию всех нильпотентных групп, то из следствия 4.1.4 вытекает результат из работы [4].

Теорема 4.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор, G – разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A) \neq G$, то $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A) = \Phi_\theta(G,A)$.*

Доказательство. Пусть G обладает не p-нильпотентными максимальными A-допустимыми Θ-подгруппами, не содержащими $\mathfrak{G}_{p'}\mathfrak{G}_p$-корадикал и не содержащими $F_p(G)$. Не сложно заметить, что

$$\Phi_\theta(G,A) \subseteq \overline{\Phi}_\theta(G,A) \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)$$

и согласно работе [8] $\Phi_\theta(G) = \overline{\Phi}_\theta(G,A)$.

Пусть подгруппа $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)$ не совпадает с подгруппой $\overline{\Phi}_\theta(G,A)$, тогда $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)/\overline{\Phi}_\theta(G,A) \neq 1$ и пусть $K/\overline{\Phi}_\theta(G,A)$ – минимальная нормальная подгруппа в $G/\overline{\Phi}_\theta(G,A)$, содержащаяся в $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)/\overline{\Phi}_\theta(G,A)$. Так как формация p-нильпотентных групп содержит формацию всех нильпотентных групп, то $K/\overline{\Phi}_\theta(G,A)$ p-нильпотентна. Тогда на основании работы [8] следует, что K p-нильпотентная подгруппа. Следовательно, $K \subseteq F_p(G)$. Тогда

$$K \subseteq \overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A) \cap \overline{\Phi}_{\theta_{F_p}}(G,A),$$

получили противоречие. Значит, допущение не верно и $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)/\overline{\Phi}_\theta(G,A) = 1$, а, значит, $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A) = \Phi_\theta(G,A)$.

Применяя результат работы [8] и теорему 1 получаем следующее

Следствие 4.2.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|)=1$, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор, G – разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A) \neq G$, то $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G,A)$ p-нильпотентная подгруппа группы G.*

В случае, когда группа операторов A является тривиальной, то из теоремы 2 получаем

Следствие 4.2.2. *Пусть G – разрешимая группа, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G) \neq G$, то $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G) = \Phi_\theta(G)$.*

Следствие 4.2.3. *Пусть G – разрешимая группа, Θ – абнормально полный подгрупповой функтор. Если $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G) \neq G$, то $\overline{\Phi}_{\theta_{\overline{F}_p}}(G)$ p-нильпотентная подгруппа группы G.*

Если группа операторов A является тривиальной и подгрупповой функтор Θ выделяет все максимальные подгруппы группы G, то имеет место следующее

Следствие 4.2.4. *Пусть G – разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G) \neq G$, то $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G) = \Phi^p(G)$.*

Следствие 4.2.5. *Пусть G – разрешимая группа. Если $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G) \neq G$, то $\overline{\Phi}^p_{\overline{F}_p}(G)$ p-нильпотентная подгруппа группы G.*

Если вместо формации p-нильпотентных групп взять формацию нильпотентных групп, то из теоремы 4.4 получаем

Следствие 4.2.6. *Пусть G – разрешимая группа. Если в группе G существуют ненильпотентные абнормальные максимальные подгруппы, не содержащие $F(G)$, то пересечение всех таких подгрупп совпадает с $\Delta(G)$.*

Из следствия 4.2.6 вытекает соответствующий результат работы [4].

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Шеметков, Л.А. Формации конечных групп / Л.А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 267 с.

3. Селькин, М.В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М.В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Монахов, В.С. Замечания о максимальных подгруппах конечных групп / В.С. Монахов // Доклады НАН Беларуси. – 2003. – Т. 47, № 4. – С. 31–33.

5. Бородич, Р.В. Об F-достижимых подгруппах в группах с операторами / Р.В. Бородич, Е.Н. Бородич, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2015. – № 2 (23). – С. 33–39.

5. Скиба, А.Н. Алгебра формаций / А.Н. Скиба. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 240 с.

6. Поляков, Л.Я. О конечных группах с заданной группой операторов / Л.Я. Поляков // Вопросы алгебры. – 1987. – Вып. 3. – С. 63–67.

7. Gaschütz, W. Über die Φ-Untergruppen endlicher Gruppen / W. Gaschütz // Math. Z. – 1953. – Bd. 58. – S. 160–170.

8. Бородич, Е.Н. О пересечении подгрупп в группах с операторами / Е.Н. Бородич, Р.В. Бородич, М.В. Селькин // Вестник БГУ. Сер.1. Физика. Математика. Информатика. – 2012. – № 1. – С. 54–62.

Гомельский государственный
университет им. Ф. Скорины

Поступила в редакцию 27.04.2018