Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (108), 2018

УДК 519.872

Анализ сети с положительными заявками и сигналами различных типов в переходном режиме

Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий

Проведён анализ марковской G-сети с разнотипными положительными заявками и сигналами в переходном режиме. Сигнал при поступлении в систему уничтожает положительную заявку своего типа или перемещает заявку своего типа в другую систему. Потоки положительных заявок и сигналов, поступающих в каждую из систем сети, независимы. Выбор положительных заявок всех типов на обслуживание происходит случайным образом. Для нестационарных вероятностей состояний сети выведена система разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) Колмогорова. Она решена с помощью модифицированного метода последовательных приближений, совмещённого с методом рядов. Доказана сходимость последовательных приближений с течением времени к стационарному распределению вероятностей, вид которого указан в статье, а сама последовательность приближений сходится к единственному решению системы РДУ. Любое последовательное приближение представимо в виде сходящегося степенного ряда с бесконечным радиусом сходимости, коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям, что является удобным при расчётах на компьютерах.
Ключевые слова: G-сеть, переходный режим, метод последовательных приближений, совмещённый с методом рядов, разнотипные положительные заявки и сигналы.

An analysis of the Markov G-network with various positive applications and signals in a transient mode is carried out. A signal when entering the system destroys a positive application of its type or moves its application type to another system. Streams of positive applications and signals coming to each of the network systems are independent. The choice of positive applications for all types of service is random. For nonstationary probabilities of network states, a system of Kolmogorov's difference-differential equations (RDU) is derived. It is solved by a modified method of successive approximations, combined with the method of series. The convergence of successive approximations with time has been proved to the stationary distribution of probabilities, the form of which is indicated in the article, and the sequence of approximations converges to the unique solution of the RDU system. Any successive approximation is representable in the form of a convergent power series with an infinite radius of convergence, the coefficients of which satisfy recurrence relations, which is convenient for computer calculations.
Keywords: G-network, non-stationary regime, method of successive approximations, combined with the method of series, multiple positive customers and signals.

Введение. Впервые в рассмотрение G-сети ввёл Gelenbe в 1991 г. в статье [1]. В переходном режиме данная сеть рассмотрена в [2]. Данные сети имеют широкое практическое применение: в качестве модели нейронной сети [3], генных нормативных сетей [4], модели поведения компьютерных вирусов [5]. Понятие триггера было введено в рассмотрение Gelenbe в [6], в отличии от отрицательной заявки он не уничтожает одну положительную, а перемещает её в другую систему. Объединение триггера и отрицательной заявки в один объект – сигнал было введено в рассмотрение в стационарном режиме в статье [7], а в переходном – в [8]. В статьях [2] и [8] нестационарные вероятности состояний G-сети были найдены с помощью метода многомерных производящих функций. В статье [9] в рассмотрение были введены G-сети с положительными и отрицательными заявками многих классов, когда отрицательная заявка одного типа могла уничтожить с определённой вероятностью отрицательную заявку другого типа, были получены выражения в форме произведения для стационарных вероятностей состояния. В статье [10] была рассмотрена такая же сеть, но в переходном режиме в предположении, что отрицательная заявка может уничтожать положительную заявку только своего типа. С помощью модифицированного метода последовательных приближений, совмещённого с методом рядов, найдены нестационарные вероятности состояний. В статье [11] найдены стационарные вероятности состояний для сети с положительными заявками и сигналами многих типов.

Данная статья посвящена нахождению нестационарных вероятностей состояний сети, описанной в [11], модифицированным методом последовательных приближений, совмещённым с методом рядов.

Описание сети. Будем рассматривать открытую сеть массового обслуживания с n однолинейными системами массового обслуживания (СМО) и r типами положительных заявок и сигналов. В СМО S_i из внешней среды поступает простейший поток положительных заявок с интенсивностью λ^+ и дополнительный простейший поток сигналов с интенсивностью $\lambda^{(1)}$, $i=\overline{1,n}$. Все поступающие в сеть потоки заявок независимы. Каждая положительная заявка входного потока типа c независимо от других заявок направляется в СМО S_i с вероятностью p^+_{0ic}, $\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r} p^+_{0ic}=1$. Длительности обслуживания положительных заявок типа c в этой СМО имеет экспоненциальное распределение с параметром μ_{ic}. Будем считать, что заявки на обслуживание выбираются случайно, а именно, если в i-той СМО находится k_{is} заявок класса s, то вероятность того, что на обслуживании в ней будет заявка класса c равна $\dfrac{k_{ic}}{\sum_{s=1}^{r} k_{is}}, i=\overline{1,n}, c=\overline{1,r}$.

После завершения обслуживания положительной заявки типа c в i-й СМО она с вероятностью $p_{ic0}=1-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\left(p^+_{icjs}+p^-_{icjs}\right)$ уходит из сети, а с вероятностью p^+_{icjs} направляется в j-ю СМО опять в качестве положительной заявки типа s, и с вероятностью p^-_{icjs} в качестве сигнала типа s, $i, j=\overline{1,n}$.

Сигнал типа c, поступающий в i-ю СМО, в которой нет положительных заявок типа c, не оказывает на сеть никакого влияния и сразу исчезает из нее. В противном случае, когда в эту СМО поступает сигнал, может произойти следующее: поступающий сигнал мгновенно перемещает положительную заявку типа c из данной системы СМО в j-ю СМО в качестве положительной заявки типа s с вероятностью q_{icjs}, данное действие сигнала называют триггером; или сигнал срабатывает как отрицательная заявка типа c с вероятностью $q_{ic0}=1-\sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r} q_{icjs}$ и уничтожает одну положительную заявку типа c.

Под состоянием нашей сети в момент времени t будем понимать вектор $\left(\vec{k},t\right)=\left(k_{11},k_{12},...,k_{1r},k_{21},k_{22},...,k_{2r},...,k_{n1},k_{n2},...,k_{nr},t\right)$, где k_{ic} – число положительных заявок типа c в i-той СМО, который образует цепь Маркова с непрерывным временем и счётным числом состояний. Нужно найти зависящие от времени вероятности состояний сети в переходном режиме.

Система разностно-дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний сети. Обозначим через I_{ic} вектор размерности $n\times r$, состоящий из нулей, кроме компоненты с номером $r(i-1)+c$, равной единице, I_{00} – нулевой $n\times r$ вектор , а $P\left(\vec{k},t\right)$ - вероятность состояния $\vec{k}(t)$; $u(x)=\begin{cases}1, x>0\\ 0, x\le 0\end{cases}$ – функцию Хевисайда.

Возможны следующие переходы нашей цепи Маркова в состояние $\left(\vec{k},t+\Delta t\right)$ за время Δt:

1) из состояния $\left(\vec{k}-I_{js},t\right)$, в этом случае в j-ю СМО за время Δt поступит положительная заявка типа s с вероятностью $\lambda^+ p^+_{0js}u\left(k_{js}\right)\Delta t+o(\Delta t)$, $j=\overline{1,n}$, $s=\overline{1,r}$;

2) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ic},t\right)$, в данном случае в i-ю СМО за время Δt поступит сигнал типа c, который сработает как отрицательная заявка и уничтожит в ней положительную заявку

своего типа или после завершения обслуживания положительная заявка типа c уйдёт из сети, или переходит в j-тую СМО как сигнал типа s, но не обнаружит там положительных заявок данного типа с вероятностью

$$\left(\lambda^{(1)} p^{-}_{0ic} q_{ic0} + \mu_{ic} \frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r} k_{is}+1} p_{ic0} + \mu_{ic} \frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r} k_{is}+1} p^{-}_{icjs} \left(1-u\left(k_{ic}\right)\right)\right) \Delta t + o(\Delta t),\ i=\overline{1,n},\ c=\overline{1,r};$$

3) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},t\right)$, при этом положительная заявка типа c после обслуживания в i-той СМО перейдёт в j-ю СМО в качестве положительной заявки типа s или сигнала типа c, который действует как триггер и сразу переместит положительную заявку из системы S_i в систему S_j в качестве положительной заявки типа s; вероятность такого события равна

$$\left(\mu_{ic} \frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r} k_{is}+1} p^{+}_{icjs} + \lambda^{(1)} p_{0ic} q_{icjs}\right) u\left(k_{js}\right) \Delta t + o(\Delta t),\ i,\ j=\overline{1,n};$$

4) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},t\right)$, при этом после окончания обслуживания положительной заявки типа c в СМО S_i она направится в СМО S_j в качестве сигнала типа c, который сработает в ней как отрицательная заявка типа s, уничтожит в S_j положительную заявку своего типа; вероятность такого события равна $\mu_{ic} \dfrac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r} k_{is}+1} p^{-}_{icjs} q_{js0} \Delta t + o(\Delta t)$;

5) из состояния $\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}-I_{ml},t\right)$, в этом случае после окончания обслуживания заявки типа c в СМО S_i, она направится в СМО S_j как сигнал типа s, который мгновенно переместит положительную заявку своего типа из системы S_j в систему S_m как положительную заявку типа l; вероятность такого события равна $\mu_{ic} \dfrac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r} k_{is}+1} p^{-}_{icjs} q_{jm} u\left(k_{ml}\right) \Delta t + o(\Delta t)$;

6) из состояния $(\vec{k},t)$, при этом в каждую СМО S_i, $i=\overline{1,n}$, не поступают ни положительные заявки любых типов, ни сигналы, или сигналы при поступлении не будут обнаруживать заявок своего типа и в них за время Δt не обслужилось ни одной заявки; вероятность такого события равна $1-\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{c=1}^{r}\left[\lambda^{+} p^{+}_{0ic} + \lambda^{-} p^{-}_{0ic} + \mu_{ic}\right] \Delta t + o(\Delta t),\ i=\overline{1,n}$;

7) из остальных состояний с вероятностью $o(\Delta t)$.

Тогда, используя формулу полной вероятности и переходя к пределу при $\Delta t \to 0$, можно получить систему разностно-дифференциальных уравнений (РДУ) для вероятностей состояний сети:

$$\frac{dP(\vec{k},t)}{dt} = -\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\lambda^{+}_{0ic} + \lambda^{-}_{0ic} + \mu_{ic}\right] P\left(\vec{k},t\right) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left\{\lambda^{+}_{0ic}\, u\left(k_{ic}\right) P\left(\vec{k}-I_{ic},t\right) + \right.$$

$$+\left(\mu_{ic} \frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r} k_{is}+1} p_{ic0} + \lambda^{-}_{0ic} q_{ic0}\right) P\left(\vec{k}+I_{ic},t\right) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{s=1}^{r}\left[\mu_{ic} \frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r} k_{is}+1} \left(1-u\left(k_{js}\right)\right) p^{-}_{icjs} P\left(\vec{k}+I_{ic},t\right) + \right.$$

$$+\left(\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}p_{icjs}^{+}+\lambda_{0ic}^{-}q_{icjs}\right)u(k_{js})P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},t\right)+\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}p_{icjs}^{-}q_{js0}P\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},t\right)+$$

$$\left.\left.+\sum_{m=1}^{n}\sum_{l=1}^{r}\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}p_{icjs}^{-}q_{ml}u(k_{ml})P\left(k+I_{ic}+I_{js}-I_{ml},t\right)\right]\right\}. \qquad (1)$$

Нахождение вероятностей состояний G-сети методом последовательных приближений. Систему РДУ (1) можно представить в виде:

$$\frac{dP(\vec{k},t)}{dt}=-\Lambda(\vec{k})P(\vec{k},t)+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},t\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},t\right)+\sum_{i,j,m=1}^{n}\sum_{c,s,l=1}^{r}\Phi_{icjsml}^{++}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}-I_{ml},t\right), \qquad (2)$$

где

$$\Lambda(\vec{k})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{c=1}^{r}\left[\lambda_{0ic}^{+}+\lambda_{0ic}^{-}+\mu_{ic}\right],\ \Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})=\delta_{0i}\delta_{0c}\lambda_{0js}^{+}u(k_{js})+\delta_{0j}\delta_{0s}\left(\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}p_{ic0}+\lambda_{0ic}^{-}q_{ic0}\right)+$$

$$+\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}\left(1-u(k_{js})\right)p_{icjs}^{-}+\left(\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}p_{icjs}^{+}+\lambda_{0ic}^{-}q_{icjs}\right)u(k_{js}),\ \Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})=\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}p_{icjs}^{-}q_{js0},$$

$$\Phi_{icjsml}^{++}(\vec{k})=\mu_{ic}\frac{k_{ic}+1}{\sum\limits_{s=1}^{r}k_{is}+1}p_{icjs}^{-}q_{ml}u(k_{ml}).\ \delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\ 0, i\neq j\end{cases}.$$

Решение системы (2) имеет вид

$$P(\vec{k},t)=e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(P(\vec{k},0)+\int_{0}^{t}e^{\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},x\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},x\right)+\sum_{i,j,m=1}^{n}\sum_{c,s,l=1}^{r}\Phi_{icjsml}^{++}(\vec{k})P\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}-I_{ml},x\right)\right)dx\right). \qquad (3)$$

Пусть $P_q(\vec{k},t)$ – приближение $P(\vec{k},t)$ на q-й итерации, $P_{q+1}(k,t)$ – решение системы (2) , полученное методом последовательных приближений. Тогда из (3) следует, что

$$P_{q+1}(\vec{k},t)=e^{-\Lambda(\vec{k})t}\left(P(\vec{k},0)+\int_{0}^{t}e^{\Lambda(\vec{k})x}\left(\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P_q\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js},x\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++}(\vec{k})P_q\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js},x\right)+\sum_{i,j,m=1}^{n}\sum_{c,s,l=1}^{r}\Phi_{icjsml}^{++}(\vec{k})P_q\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}-I_{ml},x\right)\right)dx\right). \qquad (4)$$

В качестве начального приближения для вероятности состояния $(\vec{k},t)$ возьмём стационарную вероятность $P_0(\vec{k},t)=P(\vec{k})=\lim\limits_{t\to\infty}P(\vec{k},t)$, которая удовлетворяет соотношению

$$\Lambda(\vec{k})P(\vec{k})=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}(\vec{k})P_q\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)+$$

$$+\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{++}\left(\vec{k}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}\right)+\sum_{i,j,m=1}^{n}\sum_{c,s,l=1}^{r}\Phi_{icjsml}^{++}\left(\vec{k}\right)P_q\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}-I_{ml}\right). \qquad (5)$$

Для последовательных приближений справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Последовательные приближения* $P_q\left(\vec{k},t\right), q=0,1,2,...,$ *сходятся при* $t\to\infty$ *к стационарному решению системы уравнений (2), а сама последовательность* $\left\{P_q\left(\vec{k},t\right)\right\},\ q=0,1,2,...,$ *построенная по схеме (4), при любом ограниченном по t нулевом приближении* $P_0\left(\vec{k},t\right)$, $0\le P_0\left(\vec{k},t\right)\le 1,$ *сходится при* $q\to\infty$ *к единственному решению системы (2).*

Теорема 1 доказываются аналогично как в [10] для сети с разнотипными положительными и отрицательными заявками.

Теорема 2. *Любое приближение* $P_q\left(\vec{k},t\right)$, $q\ge 1,$ *представимо в виде сходящегося степенного ряда*

$$P_q\left(\vec{k},t\right)=\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}\right)t^l, \qquad (6)$$

коэффициенты которого удовлетворяют рекуррентным соотношениям:

$$d_{q+1l}^{+-}\left(\vec{k}\right)=\frac{-\Lambda\left(\vec{k}\right)^l}{l!}\left\{P(k,0)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\Lambda\left(\vec{k}\right)^{u+1}}D_{qu}^{+-}\left(\vec{k}\right)\right\}, l\ge 0,$$

$$d_{q0}^{+-}(k)=P\left(\vec{k},0\right),\ d_{0l}^{+}(k)=P\left(\vec{k},0\right)\delta_{l0}, \qquad (7)$$

$$D_{ql}^{+-}\left(\vec{k}\right)=\sum_{i,j=1}^{n}\sum_{s,c=1}^{r}\mathit{\Phi}_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)+\mathit{\Phi}_{icjs}^{++}\left(\vec{k}\right)d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}\right)+$$

$$+\sum_{i,j,m=1}^{n}\sum_{c,s,l=1}^{r}\Phi_{icjsml}^{++}\left(\vec{k}\right)d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}-I_{ml}\right).$$

Доказательство. Покажем, что коэффициенты степенного ряда (6) удовлетворяют рекуррентным соотношениям (7). Подставим последовательные приближения (6) в формулу (4). Тогда, учитывая, что

$$e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}\int_0^t e^{\Lambda\left(\vec{k}\right)x}x^l dx=\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{k}\right)}\right]^{l+1}l!\sum_{j=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^l}{j!}, l=0,1,2,...,$$

будем иметь

$$\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}\right)t^l=e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}P\left(\vec{k},0\right)+\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{i,j=1}^{n}\left[\sum_{c,s=1}^{r}\Phi_{icjs}^{+-}\left(\vec{k}\right)d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}-I_{js}\right)+\right.$$

$$\left.+\Phi_{icjs}^{++}\left(\vec{k}\right)d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}\right)+\sum_{i,j,m=1}^{n}\sum_{c,s,l=1}^{r}\Phi_{icjsml}^{++}\left(\vec{k}\right)d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}+I_{ic}+I_{js}-I_{ml}\right)\right].$$

Используя обозначения (7), последний ряд можно записать в виде

$$\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}\right)t^l=e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}P\left(\vec{k},0\right)+\sum_{l=0}^{\infty}D_{ql}^{+-}\left(\vec{k}\right)\left[\frac{1}{\Lambda\left(\vec{k}\right)}\right]^{l+1}l!\sum_{u=l+1}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^u}{u!}t^u.$$

Поменяв местами индексы суммирования и разлагая $e^{-\Lambda\left(\vec{k}\right)t}$ в ряд по степеням t, получим

$$\sum_{l=0}^{\infty}d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}\right)t^l=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left[-\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^l}{l!}\left\{P\left(\vec{k},0\right)+\sum_{u=0}^{l-1}\frac{(-1)^{u+1}u!}{\left[\Lambda\left(\vec{k}\right)\right]^{u+1}}D_{qu}^{+-}\left(\vec{k}\right)\right\}t^l. \qquad (8)$$

Приравнивая в левой и правой части выражения (8) коэффициенты при t^l, получим соотношения (7) для коэффициентов ряда (6).

Для нахождения радиуса сходимости степенного ряда (6) нужно использовать формулу Коши-Адамара: $\frac{1}{R\left(\vec{k}\right)}=\lim_{l\to\infty}\sqrt[l]{\left|d_{ql}^{+-}\left(\vec{k}\right)\right|}$. Аналогично как в [10] можно доказать, что радиус сходимости степенного ряда (6) равен $+\infty$.

Литература

1. Gelenbe, E. Product form queueing networks with negative and positive customers / E. Gelenbe // Journal of applied probability. – 1991. – Vol. 28, Is.1. – P. 656–663.

2. Matalytski, M. Non-stationary analysis of queueing network with positive and negative messages / M. Matalytski, V. Naumenko // Journal of applied mathematics and computational mechanics. – 2013. – Vol. 12, № 2. – P. 61–71.

3. Gelenbe, E. G-networks: a unifying model for neural and queueing networks / E. Gelenbe // Annals of operations research. – 1994. – Vol. 48. – P. 433–461.

4. Kim, H. G-networks towards synthetic biology / H. Kim, E. Gelenbe // A brief review. Conf. Proc. IEEE Eng. Med. Biol. Soc. – 2013. – Vol. 1. – P. 579–583.

5. Маталыцкий, М.А. Стохастические сети с нестандартными перемещениями заявок : монография / М.А. Маталыцкий, В.В. Науменко. – Гродно : ГрГУ,2016. – 348 с.

6. Gelenbe, E. G-networks with triggered customer movement / E. Gelenbe // Journal of applied probability. – 1993. – V. 30, is. 1. – P. 742–748.

7. Gelenbe, E. G-networks with signals and batch removal / E. Gelenbe // Probability in the engineering and informational sciences. – 1993. – Vol. 7. – P. 335–342.

8. Matalytski, M. Investigation of G-network with signals at transient behavior / M. Matalytski, V. Naumenko // Journal of applied mathematics and computational mechanics. – 2014. – Vol. 13, is. 1. – P. 75–86.

9. Fourneau, J.M. G-networks with multiple classes of negative and positive customers / J.M. Fourneau, E. Gelenbe, R. Suros // Theoretical computer science. – 1996. – Vol. 155. – P. 141–156.

10. Копать, Д.Я. Анализ сети с положительными и отрицательными заявками разных типов в переходном режиме / Д.Я. Копать, М.А. Маталыцкий // Вестник ГрГУ. Сер.2. – 2017. – № 3. – С. 150–161.

11. Gelenbe, E. G-networks with multiple classes of signals and positive customers / E. Gelenbe, A. Labed // European journal of operational research. – 1998. – Vol. 108. – P. 293–305.

Гродненский государственный
университет им. Я. Купалы

Поступила в редакцию 29.01.2018