Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (108), 2018

УДК 519.21

Анализ модели Хита, Джарроу и Мортона (HJM)

Д.А. Павлив

Представлен анализ модели Хита, Джарроу и Мортона (HJM), используемой для построения временной структуры доходности процентных ставок. Данная модель является представителем альтернативного подхода, составляющего некоторую конкуренцию классическим идеям, положенным в основу моделей процентных ставок. Вместо моделирования динамики краткосрочных процентных ставок с целью дальнейшего вывода на их основе временной структуры доходности, предлагается моделировать временную структуру напрямую. Теоретически, это позволяет более точно описать поведение кривых на всей числовой оси. В работе так же проанализированы аспекты практического применения модели.
Ключевые слова: временная структура доходности, форвардная кривая, волатильность, модель Васичека, модель Хо-Ли.

The paper presents an analysis of the Heath, Jarrow and Morton model (HJM) used to construct the term structure of interest rate yields. This model represents an alternative approach, which forms some competition to the classical ideas that are the basis of interest rate models. Instead of simulating the dynamics of short-term interest rates to further deriving the time structure on their basis, it is proposed to model the term structure directly. Theoretically, this allows more accurate description of the behavior of the curves on the entire numerical axis. In the same way, aspects of the practical application of the model are analyzed.
Keywords: term structure of interest rate yields, forward curve, volatility, Vasicek model, Ho-Lee model.

Введение. Традиционный подход к изучению временной структуры доходности, в частности, форвардной кривой, заключается в выборе наиболее правдоподобной математической модели поведения процентных ставок, оценки параметров по рыночным данным и построению с помощью такой модели временной структуры доходности в текущий и будущие периоды. Данный подход широко изучен в литературе на примере известных аффинных и неаффинных моделей. Хит, Джарроу и Мортон предложили альтернативный подход [1]. В модели HJM вместо моделирования краткосрочной процентной ставки и получения на ее основе форвардной кривой моделируется сама форвардная кривая. Ключевым моментом в таком подходе является то, что моделируется динамика форвардной кривой целиком, а не только ее краткосрочная часть.

Определение модели HJM. Рассмотрим стоимость бескупонной облигации, $P(t; T)$, в момент t, при фиксированном моменте погашения, $T \ge t$, когда по облигации выплачивается 1. Обозначим форвардную кривую в момент t как $F(t; T)$. Тогда можно записать связь между этими двумя величинами

$$P(t;T) = \exp\left(-\int_t^T F(t;u)\mathrm{d}u\right)$$

откуда следует

$$F(t;T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log P(t;T) \tag{1}$$

Предположим, что динамика стоимости бескупонной облигации описывается одномерным стохастическим дифференциальным уравнением

$$\mathrm{d}P(t;T) = \mu(t,T)P(t;T)\mathrm{d}t + \sigma(t,T)P(t;T)\mathrm{d}W \tag{2}$$

с функциями дрейфа $\mu(t, T)$ и волатильности $\sigma(t, T)$, $W(t)$ – винеровский процесс. Заметим, что из начального условия $P(t; t) = 1$ немедленно следует ограничение на функцию волатильности: $\sigma(t, t) = 0$.

Применяя формулу Ито к выражению для форвардной кривой (1) с учетом уравнения (2) получаем

$$\mathrm{d}F(t;T) = m(t,T)\mathrm{d}t + v(t,T)\mathrm{d}W,$$
$$m(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{2}\sigma^2(t,T) - \mu(t,T)\right), \quad v(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\sigma(t,T) \tag{3}$$

где, не ограничивая общности, знак перед dW заменен на противоположный, а $m(t, T)$ и $v(t, T)$ – функции дрейфа и волатильности процесса $F(t; T)$. Следует подчеркнуть еще раз, что дата погашения облигации, T, является фиксированной в уравнении (3), а «эволюция» процесса происходит за счет изменения момента времени t.

Рассмотрим модель HJM в риск-нейтральной мере. В этом случае, как известно, функция дрейфа, $\mu(t, T)$, будет совпадать со значением краткосрочной процентной ставки, $r(t)$. Тогда, учитывая условие $\sigma(t, t) = 0$, можно записать

$$m(t,T) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial T}\sigma^2(t,T) - \frac{\partial}{\partial T}r(t) = v(t,T)\int_t^T v(t,u)\mathrm{d}u \tag{4}$$

Выражение (4) является знаменитым условием HJM. Из него следует, что модель HJM в риск-нейтральной вероятностной мере однозначно определяется свой функцией волатильности. Таким образом, окончательно можно записать

$$\mathrm{d}F(t;T) = v(t,T)\left(\int_t^T v(t,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t + v(t,T)\mathrm{d}W \tag{5}$$

Выше была рассмотрена однофакторная модель HJM. Однако, такая модель не всегда способна отразить все закономерности траектории временной структуры доходности. Поэтому часто на практике рассматривают многомерную модель HJM, теория для которой легко обобщается на основе одномерного случая. В риск-нейтральной вероятностной мере N-мерное стохастическое дифференциальное уравнение для форвардной кривой определяется как

$$\mathrm{d}F(t;T) = m(t,T)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^N v_i(t,T)\mathrm{d}W_i = \left(\sum_{i=1}^N v_i(t,T)\int_t^T v_i(t,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^N v_i(t,T)\mathrm{d}W_i,$$

где dW_i некоррелированы, а условие HJM принимает вид

$$m(t,T) = \sum_{i=1}^N v_i(t,T)\int_t^T v_i(t,u)\mathrm{d}u.$$

Свойства модели HJM. Частные случаи. Краткосрочная процентная ставка, по определению, равна форвардной ставке с датой погашения равной текущей дате

$$r(t) = F(t;t).$$

Используя данное определение и уравнение (5), можно вывести стохастическое дифференциальное уравнение для краткосрочной процентной ставки. Пусть текущий момент времени обозначен через t_0. Тогда для любого момента времени t в будущем, с учетом (5), можно записать

$$r(t) = F(t;t) = F(t_0,t) + \int_{t_0}^t dF(u;t) = F(t_0,t) + \int_{t_0}^t v(s,t)\left(\int_s^t v(s,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}s + \int_{t_0}^t v(s,t)\mathrm{d}W(s)$$

Дифференцируя по t получаем стохастическое дифференциальное уравнение для процеса $r(t)$

$$\mathrm{d}r = \left(\frac{\partial F(t_0;t)}{\partial t} + \int_{t_0}^t \left(\frac{\partial v(s,t)}{\partial t}\left(\int_s^t v(s,u)\mathrm{d}u\right) + v^2(s,t)\right)\mathrm{d}s + \underline{\int_{t_0}^t \frac{\partial v(s,t)}{\partial t}\mathrm{d}W(s)}\right)\mathrm{d}t + v(t,t)\mathrm{d}W \tag{6}$$

Уравнение (6) является громоздким и для большинства конкретных значений функции $v(t, T)$ пролучить значение дрейфа процесса процентной ставка в явном аналитическом виде не удается. Однако, даже такая сложная форма уравнения позволяет сделать несколько важных наблюдений. Все, кроме последнего слагаемого, являются детерминированными, последнее слагаемое – случайное. Рассмотрим более детально «подчеркнутое» слагаемое. Оно зависит от исторических значений функции $v(t, T)$ начиная с момента t_0. Но, что более важно, оно также зависит от исторических значений стохастического приращения $\mathrm{d}W$. Таким образом, в общем случае, данное слагаемое имеет сильную зависимость от реализации процесса. Как следствие, это приводит к немарковскому процессу краткосрочной процентной ставки. Другими словами, для того, чтобы «предсказать» будущее значение процесса уже не достаточно знать текущее состояние процесса, необходимо также знать бесконечно много состояний в прошлом, что не позволяет записать уравнение в частных производных с конечным числом переменных для определения стоимости бескупонной облигации. Отметим, что в некоторых простейших случаях процесс (6) все же является макровским. Достаточным условием марковской природы процесса краткосрочной процентной ставки является независимось функции $v(t, T)$ от второго аргумента, то есть $v(t, T) = v(t)$.

Рассмотрим некоторые частные случаи модели HJM. Наиболее простым представителем данного класса моделей является модель Хо-Ли [2]. Она задается простейшей функцией волатильности – константой, $v(t, T) = \sigma$. В таком случае, процесс форвардной ставки в риск-нейтральной мере представим в виде

$$\mathrm{d}F(t;T) = \sigma^2 (T - t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W$$

Процесс краткосрочной процентной ставки в модели Хо-Ли, согласно проведенному выше анализу, обладает марковскими свойствами. Примем для простоты $t_0 = 0$, тогда из (6) немедленно следует вид данного процесса

$$\mathrm{d}r = \eta(t)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W, \quad \eta(t) = \frac{\partial F(0;t)}{\partial t} + \sigma^2 t$$

Марковские свойства полученного процесса позволяют записать дифференциальное уравнение в частных производных для стоимости бескупонной облигации, $P(r, t, T)$

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \eta(t)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0, \quad P(r, T, T) = 1 \tag{7}$$

Поиск решения уравнения (7) в классическом для аффинных моделей виде

$$P(r,t,T) = \exp\big(A(t,T) + rB(t,T)\big)$$

приводит к решению

$$P(r,t,T) = \exp\left(-r(T-t) + \frac{1}{6}\sigma^2 (T-t)^3 - \int_t^T \eta(s)(T-s)ds\right)$$

Отсюда, в каждый фиксированный момент t при фиксированном значении $r(t)$ форвардная ставка будет определяться согласно выражению

$$F(t,T) = r(t) + \sigma^2 t(T-t) + F(0,T) - F(0,t)$$

Большинство известных моделей при некоторых ограничениях имеют представление HJM. Рассмотрим в качестве примера модель Васичека [3], в которой динамика процентной ставки описывается диффузионным уравнением

$$\mathrm{d}r = k(\theta - r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W \tag{8}$$

Будем исследовать модель Васичека в риск-нейтральной вероятностной мере и при нулевом значении параметра θ. В таком случае форвардная кривая задается выражением [3]

$$F(t,T) = r(t)\mathrm{e}^{-k(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2k^2}\left(1 - \mathrm{e}^{-k(T-t)}\right)^2 \tag{9}$$

Применяя формулу Ито к функции (9) с учетом вида процесса (8) получаем стохастическое дифференциальное уравнение для процесса форвардной ставки

$$\mathrm{d}F(t,T)=\frac{\sigma^2}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-k(T-t)}\right)\mathrm{e}^{-k(T-t)}\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{e}^{-k(T-t)}\mathrm{d}W,$$

при этом следует отметить выполнение условия дрейфа HJM.

Из приведенных выше примеров можно заметить, что простейшие модели HJM могут приводить к стационарным и марковским процессам процентной ставки. Возникает вопрос: на сколько простой может быть функция волатильности форвардной ставки, чтобы породить реалистичный процесс? Для ответа на этот вопрос можно провести некоторый анализ. На рисунке 1 приведена зависимость исторической волатильности форвардной ставки, построенной по данным Центрального Европейского Банка [4], ECB от срока до погашения.

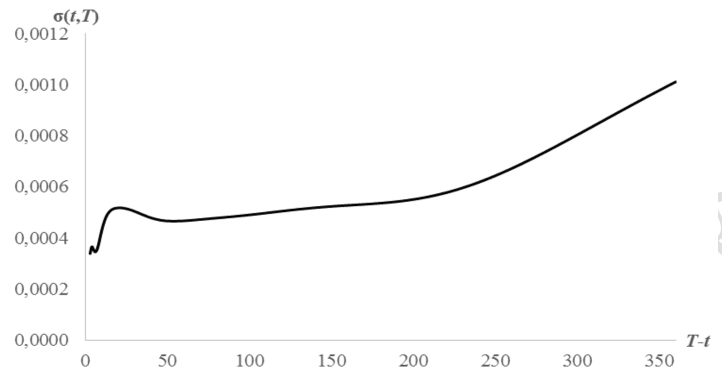

Рисунок 1 – График зависимости исторической волатильности форвардной ставки по данным ECB от срока до погашения. По оси *X* приведены сроки до погашения в месяцах

С некоторым приближением зависимость, представленную на рисунке 1, можно принять как линейную либо экспоненциальную для среднесрочных и долгосрочных обязательств. Однако, чтобы охватить всю динамику, вероятно, понадобится более сложная форма зависимости.

Практическое применение модели HJM. Метод Монте-Карло. Рассмотрим некоторые методы применения моделей HJM на практике. В простейшем случае, когда это удается, можно свести модель HJM к классической модели процентных ставок путем поиска стохастического дифференциального уравнения для процесса $r(t)$. Однако такой подход не представляет интереса в рамках данной статьи, так как получающиеся модели скорее всего уже известны и методы работы с ними хорошо изучены, как, например, модель Васичека [3].

Интерес представляют те случаи, когда свести модель HJM к явной форме модели процентных ставок не удается. Как известно, модель HJM в риск-нейтральной вероятностной мере однозначно задается своей функцией волатильности. Если функция волатильности не известна априори, то возникает задача ее аппроксимации. Одним из наиболее популярных методов оценки функции волатильности многомерной модели HJM является метод главных компонентов [2]. Вкратце, суть данного метода заключается в построении ковариационной матрицы *изменений* форвардной ставки для различных сроков до погашения. Далее находятся собственные значения и собственные вектора данной матрицы. Собственный вектор, соответствующий наибольшему собственному значению называется первым главным компонентом. Он определяет доминирующую составляющую движения форвардной кривой. Его первый элемент характеризует изменение ставки с наименьшим сроком до погашения, второй элемент – изменение ставки со вторым по величине сроком до погашения и так далее. Его собственное значение выступает в качестве дисперсии таких изменений. Тогда, i-ый элемент вектора волатильности процесса можно аппроксимировать функцией

$$\bar{v}_i(\tau_j)=\sqrt{\lambda_i}\left(V_i\right)_j,$$

где τ_i – сроки до погашения, например, 1/12 года, 4/12 года и так далее, $(V_i)_j$ – j-ый компонент вектора V_i. Для того, чтобы получить значение волатильности для других сроков до погашения, необходимо применить технику интерполирования.

Предположим, что функция волатильности известна. Как уже отмечалось ранее, так как модель HJM в общем случае порождает немарковский процесс процентной ставки, построить конечномерное дифференциальное уравнение в частных производных для нахождения временной структуры доходности не представляется возможным. Поэтому необходимы альтернативные способы построения временной структуры. Одним из подходов является моделирование процесса методом Монте-Карло.

Ниже описан алгоритм действий для нахождения временной структуры доходности методом Монте-Карло [5].

Рассмотрим одномерную модель HJM

$$\mathrm{d}F(t;T) = m(t,T)\mathrm{d}t + v(t,T)\mathrm{d}W = v(t,T)\left(\int_t^T v(t,u)\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}t + v(t,T)\mathrm{d}W \quad (10)$$

.

В общем случае моделирование непрерывного процесса (10) является неразрешимой задачей. Поэтому, обычно, прибегают к дискретизации исходного процесса. На самом деле дискретизации подтверждены оба аргумента функции $F(t, T)$. Для первого аргумента зафиксируем временную сетку $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_M = T^*$. Даже зафиксировав первый аргумент, t_j, в общем случае невозможно получить всю форвардную кривую $f(t_j,T)$ целиком, $t_j < T < T^*$, поэтому будем также использовать временную сетку для сроков до погашения. Вообще, сетка сроков до погашения может отличаться от сетки для первого аргумента. Однако, в целях упрощения, не ограничивая общности, будем считать, что первая и вторая сетки совпадают. В дискретной версии стоимость облигации будет иметь вид

$$\hat{P}(t_i,t_j) = \exp\left(-\sum_{k=i}^{j-1}\hat{F}(t_i,t_k)(t_{k+1}-t_k)\right).$$

Чтобы избежать дополнительных погрешностей, потребуем, чтобы начальные значения аппроксимации для цены облигации совпадали с точными значениями для всех узлов сетки, т. е.

$$\hat{P}(0,t_j) = \exp\left(-\sum_{k=0}^{j-1}\hat{F}(0,t_k)(t_{k+1}-t_k)\right) = \exp\left(-\int_0^{t_j} F(0,u)\mathrm{d}u\right) = P(0,t_j).$$

Отсюда следует, что

$$\hat{F}(0,t_k) = \frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int_{t_k}^{t_{k+1}} F(0,u)\mathrm{d}u,$$

для всех $k = 0, 1, \ldots, M-1$. После того, как начальные значения заданы, можно построить рекурсивную процедуры симуляции значений форвардной ставки

$$\hat{F}(t_i,t_j) = \hat{F}(t_{i-1},t_j) + \hat{m}(t_{i-1},t_j)(t_i - t_{i-1}) + \hat{v}(t_{i-1},t_j)\sqrt{t_i - t_{i-1}}\,\xi_i,\quad i = 0,\ldots,M,\quad j = i,\ldots,M, \quad (11)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_M$ – независимые стандартно распределенные нормальные случайные величины. Смоделировав достаточное число реализаций (11), можно найти их математическое ожидание, которое и будет выступать в качестве оценки временной структуры доходности.

Аппроксимация дрейфа выглядит немного сложнее. Дело в том, что дрейф определяется через волатильность из условия отсутствия арбитража. Можно показать, что для того, чтобы выражение

$$\hat{P}(t_i,t_j)\exp\left(-\sum_{k=0}^{i-1}\hat{F}(t_i,t_j)(t_{k+1}-t_k)\right)$$

было мартингалом в момент t для каждого T, необходимо и достаточно, чтобы аппроксимация дрейфа определялось следующим образом

$$\hat{m}(t_{i-1},t_j)(t_{j+1}-t_j) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=i}^{j}\hat{v}(t_{i-1},t_k)(t_{k+1}-t_k)\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum_{k=i}^{j-1}\hat{v}(t_{i-1},t_k)(t_{k+1}-t_k)\right)^2.$$

Это дискретная версия условия дрейфа модели HJM. Оно обеспечивает выполнения мартингального свойства для стоимости дисконтированных облигаций. Устремив шаг сетки к нулю, а индексы i и j к бесконечности, можно показать, что дискретная версия условия на дрейф будет соответствовать аналогичному условию для непрерывной модели.

Таким образом, исходными данными для использования модели HJM являются функция волатильности форвардной ставки, а также значения форвардной кривой в текущий момент времени.

Вышесказанное продемонстрированно на рисунке 2, где изображено семейство форвардных кривых в различные моменты времени, полученные с помощью метода Монте-Карло для модели Хо-Ли с параметром волатильности σ = 0,01.

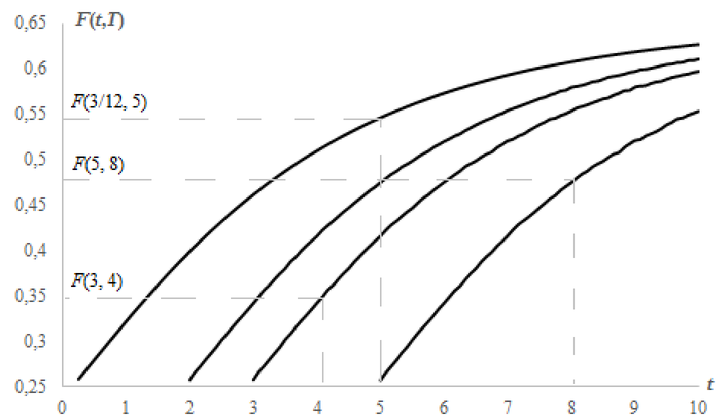

Рисунок 2 – Семейство форвардных кривых в различные моменты времени. На оси абсцисс приведена временная шкала в годах. Точка $F(5, 8)$ соответствует значению форвардной ставки в момент $t = 5$ со сроком до погашения $T - t = 3$

Заключение. В данной работе представлен обзор подходу HJM как альтернатива классически моделям процентных ставок для нахождения временной структуры доходности. Модель HJM привносит перспективные идеи в теорию временной структуры процентных ставок, такие как возможность моделирования временной структуры напрямую и на всей временной кривой. Особенности модели HJM определяют методы ее использования. В частности, в силу немарковской природы порождаемых процессов, получить временную структуру в аналитическом виде не удается, поэтому единственным способом использования таких моделей на практике является применение приближенных методов, таких как метод Монте-Карло. Модель HJM может порождать и марковские процессы, однако такие модели вряд ли могут представлять интерес в силу отсутствия новизны, так как в большинстве случаев сводятся к уже известным хорошо изученным моделям.

Литература

1. Heath, D. Bond pricing and the term structure of interest rates: a new methodology / D. Heath, R. Jarrow, A. Morton. – Econometrica. – 1992. – № 60. – P. 77–105.

2. Wilmott, P. Paul Wilmott on quantitative finance / P. Wilmott. – Second edition. – New York, 2000. – 1401 p.

3. Медведев, Г. О временной структуре доходности. Модель Васичека / Г. Медведев // Вестник ТГУ. – 2012. – № 1 (18). – С. 102–111.

4. Financial markets and interest rates: Euro area yield curves [Electronic resource] / European Central Bank. – Mode of access : https://www.ecb.europa.eu/stats/financial_markets_and_interest_rates/euro_area_yield_curves/html/index.en.html. – Date of access : 26.03.2017.

5. Glasserman, P. Monte Carlo methods in financial engineering. Springer / P. Glasserman. – New York, 2003. – 599 p.

Белорусский государственный университет

Поступила в редакцию 27.05.2017