6. Хило, Н.А. Преобразование порядка бесселевых световых пучков в одноосных кристаллах / Н. А. Хило, А.А. Рыжевич, Е.С. Петрова // Кв. эл. – 2001. – Т. 31. – № 1. – С. 85–89.

7. Казак, Н.С. Формирование бесселевых световых пучков в условиях внутренней конической рефракции / Н.С. Казак, Н.А. Хило, А.А. Рыжевич // Кв. эл. – 1999. – Т. 29. – № 2. – С. 184–188.

8. Formation of higher-order Bessel light beams in biaxial crystals / T.A. King, W. Hogervorst, N.S. Kazak [et al.] // Opt. Comm. – 2001. – Vol.187. – P. 407–414.

9. Belyi, V.N. Frequency conversion of Bessel light beams in nonlinear crystals / V.N. Belyi, N.S. Kazak, N.A. Khilo // Quantum electronics. – 2000. – Vol. 30. – № 9. – P. 753–766.

10. Belyi, V.N. Properties of parametric frequency conversion with Bessel light beams / V.N. Belyi, N.S. Kazak, N. A. Khilo // Opt. Comm. – 1999. – Vol. 162. – P. 169–176.

11. Beam quality improvement at Raman conversion of multimode conical beam. / R.V. Chulkov [et al.] // J. Opt. Soc. Am. B. – 2006. – Vol. 23. – № 6. – P. 1109–1116.

12. Generation and propagation of high-order Bessel vortices in linear and non-linear crystals / V. Belyi, N. Khilo, A. Forbes, A. Ryzhevich // Laser Beam Shaping X, 3 August 2009, San Diego, CA, USA: Proc. SPIE. Proceedings of SPIE / Andrew Forbes, Todd E. Lizotte eds. – 2009. – Washington: SPIE. – Vol. 7430. – P. 74300F-1–8.

С.С. Гиргель

УО «Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины», Беларусь

БЕССЕЛЕВЫ СВЕТОВЫЕ ПОЛЯ В ОДНООСНЫХ КРИСТАЛЛАХ

Бесселевы световые поля обладают многими интересными свойствами (например, бездифракционным распространением), поэтому широко изучаются в настоящее время [1, 2]. Авторы большинства работ ограничиваются только изотропными средами. Гораздо меньше работ для кристаллов, что обусловлено математическими трудностями. Обычно ограничиваются направлениями вдоль и перпендикулярно оптической оси одноосных кристаллов (см., например, [4–8]) и отдельными направлениями двухосных кристаллов.

В настоящей работе инвариантным методом Ф.И. Федорова [9] изучаются монохроматические бесселевы световые поля вдоль произвольных направлений одноосных кристаллов. Одноосные кристаллы характеризуются тензором $\varepsilon = \varepsilon_0 + (\varepsilon_e - \varepsilon_0)\boldsymbol{c} \cdot \boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{c}$ – единичный вектор оптической оси ($\boldsymbol{c}^2 = 1$). В последних возможны моды двух типов: обыкновенные и необыкновенные (o- и e-типа) [9].

Пусть в одноосном кристалле в произвольном направлении $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$ ($\boldsymbol{n}^2 = 1$) распространяется некоторое световое поле. Введем ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \boldsymbol{e}_z\}$, ($\boldsymbol{e}_x = [\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c}] / \sqrt{[\boldsymbol{n}, \boldsymbol{c}]^2}$), связанный с векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{c}$.

Для мод o-типа электрическое поле можно представить в виде [3, 4, 10–13]

$$\boldsymbol{E}_0 = [\nabla \psi, \boldsymbol{c}]; \ \boldsymbol{D}_0 = \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0. \tag{1}$$

Здесь скалярная функция ψ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\nabla^2 + k^2)\psi = 0, \tag{2}$$

где, для краткости, введены обозначения $k^2 = k_0^2 \varepsilon_0$, $k_0 = \omega / c$.

Одними из возможных решений (2) являются функции Бесселя целочисленного порядка m первого рода

$$\psi_m(x, y, z) = J_m(k_\perp \rho) \cdot exp[i(k_\| z + m\varphi)], \tag{3}$$

которые описывают бегущие волны (моды o-типа) Бесселя вдоль оси $\boldsymbol{e}_z$ [10–12]. Здесь $k_\|$ – свободный параметр ($k_\| \in (0 \div k)$), причем

$$k_\perp^2 = k^2 - k_\|^2; \ \ \rho = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{4}$$

Как обычно, в (3) азимутальный угол $\varphi = arctg(y/x)$, модовое число m принимает целочисленные значения $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Вычисляя, находим, что

$$\nabla \psi = k_\perp (\psi_{m-1} \boldsymbol{e}_+ - \psi_{m+1} \boldsymbol{e}_-) / \sqrt{2} + i k_\| \psi_m \boldsymbol{n}. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{e}_\pm = (\boldsymbol{e}_x \pm i\boldsymbol{e}_y) / \sqrt{2}$ – нормированные циркулярные векторы. Подставляя (5) в (1) вычисляем электрический вектор $\boldsymbol{E}_0$ бесселева поля o-типа при произвольном направлении распространения $\boldsymbol{n}$ в одноосном кристалле. После некоторых выкладок $\boldsymbol{E}_0$ можно также представить в форме

$$\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_{0\|} \cos\theta + \boldsymbol{E}_{0\perp} \sin\theta. \tag{6}$$

Здесь θ – угол между векторам нормали $\boldsymbol{n}$ и оптической осью $\boldsymbol{c}$. Электрические векторы $\boldsymbol{E}_{0\|}$ и $\boldsymbol{E}_{0\perp}$ бесселевой моды o-типа

$$\boldsymbol{E}_{0\|} = ik_{\perp}(\psi_{m-1}\boldsymbol{e}_{+} + \psi_{m+1}\boldsymbol{e}_{-})/\sqrt{2}\,; \tag{7}$$

$$\boldsymbol{E}_{0\perp} = ik_{\|}\boldsymbol{e}_{x}\psi_{m} + k_{\perp}(\psi_{m+1} - \psi_{m-1})\boldsymbol{n}/\sqrt{2} \tag{8}$$

соответствуют направлениям, параллельным и перпендикулярным оси $\boldsymbol{c}$.

Вектор магнитного поля $\boldsymbol{H}_0 = -i[\nabla,[\nabla\psi,\boldsymbol{c}]]/k_o$ вычисляем из уравнений Максвелла и представляем также как сумму двух слагаемых [10–12]:

$$\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{H}_{0\|}\cos\theta + \boldsymbol{H}_{0\perp}\sin\theta\,. \tag{9}$$

Векторы $\boldsymbol{H}_{0\|}$ и $\boldsymbol{H}_{0\perp}$, описывающие поляризацию бесселевых полей *o*-типа вдоль и перпендикулярно оптической оси, соответственно равны:

$$k_0\boldsymbol{H}_{0\|} = k_{\|}\nabla\psi_m - ik^2\psi_m\boldsymbol{n}; \quad k_0\boldsymbol{H}_{0\perp} = k_{\|}\nabla(\psi_{m-1} - \psi_{m+1})/\sqrt{2} + ik^2\psi_m\boldsymbol{e}_y\,. \tag{10}$$

Учитывая (5), нетрудно вычислить векторы $\boldsymbol{H}_{0\|}$ и $\boldsymbol{H}_{0\perp}$ явно:

$$k_0\,\boldsymbol{H}_e = k_{\perp}\left(k_{\|}(\psi_{m-1}\boldsymbol{e}_{+} - \psi_{m+1}\boldsymbol{e}_{-})/\sqrt{2} - ik_{\perp}\psi_m\,\boldsymbol{n}\right); \tag{11}$$

$$k_0\boldsymbol{H}_{0\perp} = \frac{k_{\perp}^2}{\sqrt{8}}(\psi_{m+2}\boldsymbol{e}_{-} - \psi_{m-2}\boldsymbol{e}_{+}) + i\,(k^2 - \frac{k_{\perp}^2}{2})\,\boldsymbol{e}_y\psi_m - i\,\frac{k_{\|}k_{\perp}}{2}(\psi_{m+1} + \psi_{m-1})\boldsymbol{n}. \tag{12}$$

Перейдем к модам *e*-типа. Для скалярного потенциала ψ необыкновенной монохроматической световой моды в одноосных кристаллах можно получить следующее анизотропное уравнение Гельмгольца

$$(\nabla\varepsilon\nabla + k_0^2\varepsilon_0\varepsilon_e)\psi = 0\,. \tag{13}$$

Тогда вектор магнитного поля $\boldsymbol{H}_e$ моды *e*-типа равен [10–13]

$$\boldsymbol{H}_e = [\nabla\psi,\boldsymbol{c}]\,. \tag{14}$$

Чтобы решить (13), введем масштабированный оператор набла $\nabla' = \varepsilon^{1/2}\nabla$ и перейдем тем самым к новым переменным ($\boldsymbol{r}' = \varepsilon^{-1/2}\boldsymbol{r}$), которые будем отмечать штрихами. Это означает изменение масштаба вдоль оси $\boldsymbol{c}$. При этом поверхность оптической индикатрисы (эллипсоид вращения) превращается в сферу и поэтому анизотропное уравнение Гельмгольца (13) принимает вид

$$(\nabla'^2 + k^2)\,\psi = 0\,, \tag{15}$$

как для изотропных сред. В отличие от (2) здесь уже $k^2 = k_0^2\varepsilon_0\varepsilon_e$.

Пусть в одноосном кристалле в произвольном направлении $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{e}_z$ ($\boldsymbol{n}^2 = 1$) распространяется некоторая необыкновенная мода. Введем масштабированный ортонормированный базис $\{\boldsymbol{e}_x{}', \boldsymbol{e}_y{}', \boldsymbol{e}_z{}'\}$, связанный с векторами $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{c}$:

$$\boldsymbol{e}_z{}' = \varepsilon^{-1/2}\boldsymbol{n}/\sqrt{\boldsymbol{n}\varepsilon^{-1}\boldsymbol{n}}\,;\ \boldsymbol{e}_x{}' = [\boldsymbol{n},\boldsymbol{c}]/\sqrt{[\boldsymbol{n},\boldsymbol{c}]^2}\,;$$

$$\boldsymbol{e}_y{}'=[\boldsymbol{e}_z{}',\boldsymbol{e}_x{}']=\varepsilon^{1/2}\boldsymbol{e}_{y0}/\sqrt{\boldsymbol{e}_{y0}\varepsilon\boldsymbol{e}_{y0}}\,.$$

Заметим, что ортогональному базису $\{\boldsymbol{e}_x{}',\boldsymbol{e}_y{}',\boldsymbol{e}_z{}'\}$ в масштабированной системе координат соответствует неортогональный базис $\{\boldsymbol{e}_x=\boldsymbol{e}_x{}'$, $\boldsymbol{e}_y=\varepsilon\,\boldsymbol{e}_{y0}/\sqrt{\boldsymbol{e}_{y0}\varepsilon\boldsymbol{e}_{y0}}$, $\boldsymbol{e}_z=\boldsymbol{n}\}$ в реальном пространстве, где $\boldsymbol{e}_{y0}=[\boldsymbol{e}_z,\boldsymbol{e}_x]$.

Одними из возможных решений (13) являются функции Бесселя первого рода, которые описывают бегущие волны (моды) Бесселя вдоль оси $\boldsymbol{e}_z{}'$ [10-12]:

$$\psi_m(x',y',z')=J_m(k_\perp\rho')\cdot exp[i(k_\|z'+m\varphi')]. \qquad (16)$$

Здесь введены обозначения:

$$k_\| \in(0\div k);\quad k_\perp^2=k^2-k_\|^2;\quad \rho'=\sqrt{x'^2+y'^2};\quad \varphi'=arctg\ (y'/x'). \qquad (17)$$

Масштабированные величины можно представить в инвариантной [8] форме:

$$\rho'^2=\frac{[\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}]\overline{\varepsilon^{-1}}[\boldsymbol{n},\boldsymbol{r}]}{\boldsymbol{n}\varepsilon^{-1}\boldsymbol{n}};\quad tg\,\varphi'=\frac{\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_{y0}}{\boldsymbol{r}\boldsymbol{e}_x}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\boldsymbol{e}_{y0}\varepsilon\,\boldsymbol{e}_{y0}}};\quad z'=\frac{\boldsymbol{r}\varepsilon^{-1}\boldsymbol{n}}{\sqrt{\boldsymbol{e}_{y0}\varepsilon\,\boldsymbol{e}_{y0}}}.$$

Так как $\nabla\psi=\varepsilon^{-1/2}\nabla'\psi,$ то для расчета $\nabla\psi$ можно воспользоваться результатами для мод *о*-типа, заменяя соответствующие величины штрихованными. В итоге находим, что векторы поля необыкновенных бесселевых мод равны

$$\boldsymbol{H}_e=[\nabla\psi,\boldsymbol{c}]=[\nabla'\psi,\boldsymbol{c}]/\sqrt{\varepsilon_0}\,. \qquad (18)$$

Остальные векторы необыкновенных мод бесселевых световых полей

$$\boldsymbol{E}_e=i\varepsilon^{-1/2}[\nabla',[\nabla'\psi,\boldsymbol{c}]]/(k_0\varepsilon_0\sqrt{\varepsilon_e}),\ \boldsymbol{D}_e=\varepsilon\,\boldsymbol{E}_e \qquad (19)$$

можно вычислить из уравнений Максвелла и уравнений связи. Для представления векторов поля в явном виде достаточно использовать (5) и заменить переменные величины на их масштабированные. Тогда; например, вектор

$$\boldsymbol{H}_e=[ik_\perp(\psi_{m-1}\boldsymbol{e}'_+-\psi_{m+1}\boldsymbol{e}'_-)/\sqrt{2}+ik_\|\psi_m\boldsymbol{n}',\boldsymbol{c}]/\sqrt{\varepsilon_0}\,, \qquad (20)$$

где $\boldsymbol{e}'_\pm=(\boldsymbol{e}'_x\pm i\boldsymbol{e}'_y)/\sqrt{2}$ – масштабированные циркулярные векторы.

Выражения (18)–(20) эквивалентны соотношениям, ранее полученным нами в [10–12], но представлены здесь в инвариантной форме. Подчеркнем, что для мод *е*-типа функции ψ_m, $\psi_{m\pm1}$, $\psi_{m\pm2}$ зависят от штрихованных координат. Мы показали, что переход от мод *о*-типа к полям *е*-типа можно осуществить простой заменой соответствующих величин *о*-типа на их масштабированные аналоги.

Итак, переход к масштабированному (штрихованному) базису позволил упростить расчеты и получить компактные инвариантные выражения для бесселевых векторных полей *о*- и *е*-типов вдоль произвольных направлений в одноосных кристаллах.

Литература

1. Girgel, S.S. Vectorial of Bessel light beams/ S.S. Girgel, S.N. Kurilkina // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4358. – P. 258–264.
2. Казак, Н. Бесселевы световые пучки: свойства и перспективы применения // Н. Казак, В. Белый, Н. Хило // Наука и инновации. – 2003. – № 7–8. – С. 9–18.
3. Хило, Н.А. Бесселевы световые пучки в одноосных кристаллах/ Н.А.Хило, Е.С. Петрова // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2001. – № 6(9). – С. 103–107.
4. Belyi, V.N. Second Harmonic Generation with Elliptical Bessel beams / V.N. Belyi, N.A. Khilo, E.S. Petrova, A.G. Mashchenko, V.E.Leparskii // XVII International Conference on Coherent and Nonlinear Optics // Proc. SPIE. – 2001. – Vol. 4751. – P. 97–103.
5. Cincotti, G. Propagation-invariant beams in uniaxial crystals / G. Cincotti, A. Ciattoni and C. Palma // Journ. of Mod. Optics. – 2002. – Vol. 49, № 13. – P. 2267–2272.
6. Ciattoni, A. Nondiffracting beams in uniaxial media propagating orthogonally to the optical axis / A. Ciattoni, C. Palma // Opt. Commun. – 2003. – Vol. 224. – P. 175–183.
7. Hacyan, S. Evolution of optical phase and polarization vortices in birefringent media / S. Hacyan and R. Jáuregui // Journ. Optics A. – 2009. – Vol.11, № 8. – P. 085204–085300.
8. Новицкий, А.В. Ковариантные дисперсионные уравнения и тензорные эволюционные операторы для оптических волноводов/ А.В. Новицкий, Л.М. Барковский // Журн. Техн. Физ. – 2005. – № 75, № 5. – С. 101–106.
9. Федоров, Ф.И. Теория гиротропии / Ф.И. Федоров. – Мн. Наука и техника, 1976. – 456 с.
10. Гиргель, С.С. Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. I. Моды о-типа / С.С. Гиргель // Материалы Международной конференции «Лазерная физика и применения лазеров», Беларусь, г. Минск, 14–16 мая 2003 г. – С. 78–79; Гиргель, С.С. Световые пучки Бесселя в одноосных кристаллах. II. Моды е-типа / С.С. Гиргель // Там же. – С. 80–81.
11. Гиргель, С.С. Бесселевы световые пучки в одноосных кристаллах / С.С. Гиргель // Ковариантные методы в физике. Оптика и акустика // Сб. научных трудов. – ИФ НАН Беларуси, 2005. – С. 172–176.
12. Гиргель, С.С. Бесселевы световые пучки/ С.С. Гиргель // Известия Гомельского госуниверситета им. Ф. Скорины. – 2005. – № 3(30). – С. 93–98.

13. Карпенко, В.А. Потенциальные функции электромагнитных волн в одноосных кристаллах / В.А. Карпенко // Ковариантные методы в теоретической физике. Оптика и акустика. – Мн., 1981. – С. 70–73.

А.Ф. Константинова, Е.А. Евдищенко, Б.В. Набатов, Т.Г. Головина

Институт кристаллографии РАН, Москва, Россия

РАЗВИТИЕ ИССЛЕДОВАНИЙ ОПТИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ КРИСТАЛЛОВ В ИНСТИТУТЕ КРИСТАЛЛОГРАФИИ РАН

В 1958 г. на физическом факультете МГУ – студентам кафедры "Кристаллография и кристаллофизика" – читал курс лекций по кристаллооптике замечательный учёный Ф.И. Фёдоров. Именно с этого времени и по настоящее время в Институте кристаллографии (ИК) РАН развиваются методы исследования анизотропных оптически активных кристаллов, основанные на использовании различных физических явлений.

Первые совместные с Ф.И. Фёдоровым работы, в ИК РАН, состояли в исследовании оптической активности одноосных кристаллов с учетом многократных отражений и в определении параметров оптической активности для кристаллов планальных классов. Именно с этих работ начались экспериментальные исследования кристаллов, ориентированных не только в направлении оптической оси, но и произвольным образом относительно её.

После того, как Ф.И. Фёдоровым с учениками были получены точные выражения для азимута и эллиптичности света, прошедшего через пластинку из оптически активного двуосного поглощающего кристалла, стало возможно проводить экспериментальные исследования таких кристаллов. Для этого специально был создан дихрограф. Этот прибор отличается от серийных дихрографов наличием специального приспособления, в силу чего обеспечивается возможность проведения измерений не только для изотропных, но и для анизотропных сред. Благодаря вращению образца в особом держателе исключается влияние линейного двупреломления, тем самым устраняется необходимость его учёта.

Таким образом, в ИКРАН основные направления исследования оптической активности кристаллов разрабатывались на основе работ Ф.И. Федорова. Выполнение при его жизни и последующие исследования – как теоретические, так и экспериментальные осуществлялись благодаря