Проблемы физики, математики и техники, № 3 (36), 2018

МАТЕМАТИКА

УДК 512.542

О *S*-КВАЗИНОРМАЛЬНЫХ ПОДГРУППАХ В КОНЕЧНЫХ ГРУППАХ

С.Ю. Башун, Э.М. Пальчик

Полоцкий государственный университет, *Новополоцк*

ON *S*-QUASINORMAL SUBGROUPS IN FINITE GROUPS

S.Yu. Bashun, E.M. Palchik

Polotsk State University, *Novopolotsk*

Исследуется строение конечной группы *G*, у которой ее собственная подгруппа *H* перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы *G* (тогда *H* называется *S*-квазинормальной подгруппой).

***Ключевые слова**: группа Шмидта* (*минимальная ненильпотентная группа*), *перестановочные подгруппы*, *разрешимая группа*.

The structure of a finite group *G* with a proper subgroup *H* which is permutable with all subgroups of Schmidt of group *G* (then *H* is called *S*-quasinormal subgroup) is investigated.

Keywords: *Schmidt group* (*minimal nonnilpotent group*), *permutable subgroups*, *solvable group*.

Введение

Рассматриваются только конечные группы.

Одним из первых вопросами перестановочности подгрупп в конечной группе занимался О. Оре [1]. Существенный вклад в это направление внес О. Кегель [2], [3]. Например, в [3] он доказал субнормальность собственной подгруппы, перестановочной со всеми силовскими подгруппами группы. Отметим, что строение конечных групп, у которых некоторые подгруппы перестановочны с подгруппами Шмидта (минимальными ненильпотетными группами), исследовалось в работах [7], [16], [17] и других. В данной работе исследуется нормальное строение конечной группы, у которой собственная подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта в группе.

1 Обозначения и терминология

В статье используются стандартные обозначения и терминология, которые можно найти в работах [4], [5]. Некоторые используемые обозначения (в том числе и новые) приведем для удобства чтения:

– $\Sigma(H)$ – множество всех подгрупп Шмидта в подгруппе H (если $H = G$, то $\Sigma(G) = \Sigma$);

– $H\Sigma = \Sigma H$ означает, что H перестановочна с каждой подгруппой из Σ;

– H_G – наибольшая нормальная подгруппа группы G, лежащая в подгруппе H;

– H^G – порождение всех сопряженных с H в G подгрупп;

– субнормальная подгруппа – член субнормального ряда группы (ряд групп $1 \subseteq G_1 \subseteq G_2 \subseteq ... \subseteq G_{i-1} \subseteq G_i \subseteq ... \subseteq G_{n-1} \subseteq G_n = G$ называется субнормальным, если $G_i \lhd G_{i+1}$ для всех $i = \overline{1, n-1}$);

– $H \lhd G$ ($H \lhd\lhd G$) – подгруппа H нормальна (субнормальна) в G;

– $\pi(G)$ – множество попарно различных простых делителей порядка группы G;

– *pd*-группа – группа, чей порядок делится на простое число *p*;

– G_p – силовская p-подгруппа группы G;

– *p*-замкнутая группа – группа G с $G_p \lhd G$;

– $R(G)$ – наибольшая нормальная разрешимая подгруппа группы G;

– примарная (бипримарная) группа – группа G с $|\pi(G)| = 1$ (с $|\pi(G)| = 2$);

– секция в G – фактор-группа A/B, где $B \lhd A \subseteq G$;

– $\Phi(G)$ ($Z(G)$) – подгруппа Фраттини (центр) группы G;

– $A^g = g^{-1}Ag$;

– $A \rtimes B$ – полупрямое произведение групп A и B с $A \lhd AB$;

– $\langle ... \rangle$ – порождение множеств, заключенных в $\langle\ \rangle$;

– S_n – симметрическая группа перестановок n символов.

2 Используемые результаты

***Лемма* 2.1.** *Пусть* A, C *и* B *– подгруппы группы* G. *Тогда*

(1) [1] *если* $AB = BA = L$, *то* L *– подгруппа в* G;

(2) [1] *если* $AB = BA$, $AC = CA$, *то* $A\langle C, B\rangle = \langle C, B\rangle A$;

(3) [3] *если* $H \lhd\lhd G$, *то* $H \cap G_p = H_p$ *для всех* $p \in \pi(H)$.

***Лемма* 2.2.** *Если* A, B, G *как в лемме* 2.1 *и* $AB^g = B^g A$ *для всех* $g \in G$, *то и* $A^y B^z = B^z A^y$ *для всех* $y \in G$, $z \in G$.

Доказательство. Пусть $a, a_1 \in A$, $b, b_1 \in B$. По условию $ax^{-1}bx = x^{-1}b_1xa_1$. Пусть $y, z \in G$, $zy^{-1} = x$. Тогда $ayz^{-1}bzy^{-1} = yz^{-1}b_1zy^{-1}a_1$. Последнее равенство после умножения слева на y^{-1}, а справа – на y дает нам $y^{-1}ayz^{-1}bz = z^{-1}b_1zy^{-1}a_1y$. □

***Лемма* 2.3.** *Пусть* A *и* B_i, $i = \overline{1,n}$, *– собственные подгруппы группы* G *и* $AB_i^g = B_i^g A$ *для всех* $g \in G$ *и всех* $i = \overline{1,n}$. *Тогда можно выбрать наибольшую по включению собственную подгруппу* M, *содержащую* A, *с этим свойством* ($MB_i^g = B_i^g M$ *для всех* $g \in G$ *и всех* $i = \overline{1,n}$). *Тогда имеет место одно из утверждений*:

(1) $M_G \ne 1$;

(2) $G = MB_i$ *или* $B_i^G \subseteq N_G(M)$ *для всех* $i = \overline{1,n}$.

Доказательство. По лемме 2.1 (1) $MB_i = L_i$, – подгруппа в G, $i = \overline{1,n}$. Предположим, что существует i для которого $L_i = L \subset G$. Предположим, что $a \in L \setminus M$ и $a \notin N_G(M) = N$. Тогда $M \subset \langle M, M^a\rangle = D \subseteq L$. По леммам 2.1 (2) и 2.2 $DB_j^x = B_j^x D$ для всех $x \in G$ и всех $j \in \{1,\dots,n\}$. Это противоречит выбору $M \subset L \subset G$. Поэтому $a \in N$. Тогда и $L \subseteq N$ ввиду произвольного выбора элемента $a \in L \setminus N$. В частности, $B_i \subseteq L_i = L \subseteq N$. Аналогично, $B_i^g \subset MB_i^g = K$ – подгруппа в G. $K \subset G$ так как в противном случае $MB_i^g = G$ и по [5, лемма VI.4.5] $L = MB_i = G$, что противоречит предположению $L = L_i \subset G$.

Как и выше, $B_i^g \subset K \subseteq N$. Ввиду произвольного выбора $g \in G$ получается, что $Y = B_i^G \subseteq N$. Но $Y \lhd G$ и из леммы 2.1 (2) следует, что подгруппа MY перестановочна со всеми подгруппами B_i^g для всех $g \in G$ и всех $i \in \{1,\dots,n\}$. Если $MY \subset G$, то это противоречит выбору M. Поэтому, либо $MY = M$, либо $MY = G$. Но если $Y \subseteq M$, то $M_G \ne 1$. Если $MY = G$, то $M \lhd G$ и $M_G \ne 1$.

Поэтому можно считать, что $MB_i = L = G$ для всех $i = \{1,\dots,n\}$ [5, лемма VI.4.5]. □

***Лемма* 2.4** [6]. *Пусть* A *– группа Шмидта. Тогда* A *имеет следующие свойства.*

(1) $A = A_p \rtimes A_r$, $p \ne r$ *– простые числа,* $A'_p = \Phi(A_p)$, $A_p / A'_p = p^m$, *где* m *– наименьшее целое число такое, что* r *делит* $p^m - 1$;

(2) *если* $r = 2$, *то* $|A_p| = p$ (*следует из* (1) *и* [5, *теорема* I.17.4]);

(3) $A_r = \langle y\rangle$;

(4) $Z(A) = \Phi(A) = \Phi(A_p) \times \langle y^r\rangle$;

(5) *Если* $1 \ne N \lhd A$, *то* A/N *либо есть группа Шмидта, либо циклическая r-группа.*

***Лемма* 2.5** [7, лемма 2]. *Пусть* $G/N = \overline{G}$. *Среди подгрупп, порождающих вместе с* N *всю группу* G *выберем наименьшую относительно включения подгруппу* L. *Тогда* $G = LN$, $L \cap N \subseteq \Phi(L)$, $\overline{G} \cong LN/N \cong L/L \cap N$.

***Лемма* 2.6** [8, лемма 5]. *Пусть* $G/N = \overline{G} = \overline{G}_p \rtimes \overline{G}_r$ *– группа Шмидта, а* $N \subseteq \Phi(G)$. *Тогда либо* G *– группа Шмидта типа* $G = G_p \rtimes G_r$, *либо порождается своими собственными p-замкнутыми подгруппами Шмидта.*

***Лемма* 2.7** [10, теорема 7.7.1]. *Пусть* A, B, H *– подгруппы группы* $G = A \cdot B$, $H \subseteq A \cap B$. *Если* $H \lhd\lhd A$, $H \lhd\lhd B$, *то* $H \lhd\lhd G$.

***Лемма* 2.8** [11, следствие 7.3]. *Если в конечной простой группе* G *нет секций, изоморфных* S_3, *то* $G \in \{Sz(2^{2n+1}), L_2(3^{2n+1})\}$.

***Лемма* 2.9.** *Если в группе* G *имеется секция* $A/B = X^*$, *являющаяся подгруппой Шмидта и* $X^* = X_p^* \rtimes X_r^*$, *то и в группе* G *имеется подгруппа Шмидта типа* $X = X_p \rtimes X_r$.

Доказательство. По лемме 2.5 в группе A имеется подгруппа L такая, что $LB = A$ и $L \cap B \subseteq \Phi(L)$, $LB/B \cong L/L \cap B \cong A/B$. По лемме 2.6 тогда и в группе L имеется подгруппа Шмидта L^0 типа $L_p^0 \rtimes L_r^0$. □

***Лемма* 2.10** [15]. *Неразрешимая группа* G *содержит такую подгруппу Шмидта* K, *которая является p-замкнутой pd-подгруппой Шмидта четного порядка, которая не добавляема в* G.

Отметим, что лемма 2.10 обобщает предложение 1 работы [16].

***Лемма* 2.11.** *Пусть* $G = A \cdot B$ *– группа, где* $A \in \Sigma$, $B\Sigma = \Sigma B$, *а* B *– наибольшая по включению собственная подгруппа в* G *с этим свойством и* $B_G = 1$. *Если* B *– нильпотентная группа, то* G *– разрешимая группа.*

Доказательство. Предположим, что G – неразрешимая группа. Пусть K – p-замкнутая pd-подгруппа Шмидта четного порядка в G, которая существует по лемме 2.10. По условию теоремы $BK^g = K^g B$ для всех $g \in G$. Из леммы 2.3 и условия теоремы следует, что $G = BK$. (По условию для B включения $B \subset BK^G \subset G$ невозможно). Это противоречит лемме 2.10. Итак, G – разрешимая группа. □

Напомним упомянутый во введении результат Кегеля.

***Лемма* 2.12** [3]. *Пусть H – собственная подгруппа группы G, $\pi = \pi(H)$. Если H перестановочна со всеми силовскими π-подгруппами G_p, $p \in \pi$, то $H \lhd\lhd G$ и $G_p \cap H = H_p$.*

***Теорема* 2.1.** *Пусть H^* – собственная подгруппа группы G и $\Sigma H^* = H^*\Sigma$. Тогда в группе G существует наибольшая по включению собственная подгруппа H с тем же свойством $H\Sigma = \Sigma H$ и $H^* \subseteq H$. Тогда либо $H \lhd\lhd G$, либо группа $\overline{G} = G / H_G$ является разрешимой группой с нильпотентной подгруппой $\overline{H} = H / H_G$ и имеющая факторизацию $\overline{G} = \overline{H} O_t(\overline{G})$, где $t \in \pi(G)$.*

Доказательство. По лемме 2.3 либо $H_G \neq 1$, либо $G = HB$, где $B \in \Sigma(G)$. Если $T = H_G \neq 1$, то рассмотрим группу $\overline{G} = G / T$ и ее подмножество $\Sigma(\overline{G})$. Пусть $\Sigma(\overline{G}) \neq \varnothing$. Пусть $\overline{S} \in \Sigma(\overline{G})$, $\overline{S} = \overline{S}_p \leftthreetimes \overline{S}_r$. По лемме 2.5 в группе S, где $S / T = \overline{S}$, имеется подгруппа L^* такая, что $TL^* = S$, $\overline{S} \cong L^* / L^* \cap T$, $L^* \cap T \subseteq \Phi(L^*)$. По лемме 2.6 L^* есть либо группа Шмидта, либо порождается своими подгруппами Шмидта.

По условию и лемме 2.1 (2) $HL^* = L^* H$. Тогда

$$H / T \cdot L^*T / T = L^*T / T \cdot H / T =$$
$$= S / T \cdot H / T = H / T \cdot S / T = \overline{S}\,\overline{H} = \overline{H}\,\overline{S}.$$

Так как подгруппа $\overline{S}$ пробегает все множество $\Sigma(\overline{G})$, то получается, что $\overline{H}\Sigma(\overline{G}) = \Sigma(\overline{G})\overline{H}$.

Предположим, что в группе $\overline{G}$ имеется подгруппа $\overline{H}^{**}$, содержащая $\overline{H}$, наибольшая по включению относительно свойства

$$\overline{H}^{**}\Sigma(\overline{G}) = \Sigma(\overline{G})\overline{H}^{**}.$$

Пусть $X \in \Sigma(H^{**}) \subseteq \Sigma(G)$. По лемме 2.3 $X^G \subseteq H_G^{**}$. Аналогично, H_G^{**} содержит все подгруппы из множества $\Sigma(H^{**})$. Тогда группа $\overline{H}^{**}$ – нильпотентная группа по [10, теорема 4.3.1]. (Если бы в группе $\overline{H}^{**}$ имелись подгруппы Шмидта, то по лемме 2.6 и в группе H^{**} имелись бы вне H_G^{**} подгруппы Шмидта). Ясно также, что $\overline{H}_G^{**} = \overline{1}$. По лемме 2.11 $\overline{G}$ – разрешимая группа. По выбору H $\overline{H} \cdot \overline{H}_{\overline{G}}^{**} = \overline{H}$, т. е. $H_G = H_G^{**}$. В частности, из разрешимости группы $\overline{G}$ следует, что в $\overline{G}$ есть минимальная нормальная t-подгруппа $\overline{M}$. Поэтому и $\overline{G} = \overline{H}\,\overline{M} = \overline{H}^{**} \cdot \overline{M}$. Если $\overline{H}\,\overline{M} \subset \overline{G}$, то $HM \subset G$ и $M \subseteq H$ по условию для H.

Если же $\Sigma(\overline{G}) = \varnothing$, то $\overline{G}$ – нильпотентная группа (как выше $\overline{H}^{**}$). Но тогда $\overline{H}^{**} \lhd\lhd \overline{G}$. Если же $H_G = 1$, то для H справедливы те же рассуждения, что и для $\overline{H}^{**}$ выше. □

Отметим, что вопрос о строении группы с подгруппой $H \subset G$ и условием $H\Sigma = \Sigma H$ был поставлен второму автору Я.Г. Берковичем в 1967 году после выхода работы [7].

Рассмотрим некоторые модификации условия леммы 2.12.

***Теорема* 2.2.** *Пусть H – собственная подгруппа группы G, $\pi = \pi(H)$. Пусть выполняется одно из следующих условий*:

(1) *$\{p, r\} \subseteq \pi$ и H – наибольшая относительно включения собственная подгруппа в G, перестановочная со всеми силовскими p- и r-подгруппами группы G*;

(2) *$|\pi'(G)| > 1$ и H – наибольшая по включению собственная подгруппа в G, перестановочная со всеми s- и t-силовскими π'-подгруппами группы G*;

(3) *$p \in \pi$, H – наибольшая по включению собственная подгруппа из G, перестановочная со всеми силовскими p-подгруппами группы G.*

Тогда при выполнении условий (1) *и* (2) *$H_G \neq 1$. При выполнении условия* (3) *либо $H_G \neq 1$, либо $G = H \cdot G_p$, $(|H|, |G_p|) = 1$, либо $G = H \cdot G_p$ и $H \cap G_p = H_p \neq 1$ и G – не простая группа, исключая простые группы, указанные в* [14, *теорема* 5.8].

Доказательство. Предположим, что имеем условия (1) и (2) и $H_G = 1$. Тогда по лемме 2.3 $G = HG_p = HG_r$ при условии (1) и $G = HG_s = HG_t$ для $\{s, t\} \subseteq \pi'$ по условию (2). Но тогда $|G_r| \cdot |G_p|$ делит $|H|$ и, соответственно, $|G_s| \cdot |G_t|$ делит $|H|$. Но тогда $H = G$, но не $H \subset G$. Это противоречие показывает, что $H_G \neq 1$.

Предположим, что выполняется условие (3) и $H_G = 1$. По лемме 2.3 $G = HG_p$. Простые группы с такой факторизацией описаны в [14, теорема 5.8]. □

Заключение

В работе исследовано строение конечной группы, у которой собственная подгруппа перестановочна со всеми подгруппами Шмидта группы. Попутно доказано, что собственная подгруппа группы, порядок которой делится на простые числа p и r $(p \neq r)$, которая перестановочна со всеми силовскими r- и p-подгруппами группы и является наибольшей по включению относительно этого свойства, содержит нормальную подгруппу всей группы, отличную от 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ore*, *O.* Contributions to the theory of groups of finite order / O. Ore // Duke Math. J. – 1939. – № 5. – P. 431–460.

2. *Kegel*, *O.* Producte nilpotenter Gruppen / O. Kegel // Archiv der Math. – 1961. – Vol. 12. – S. 90–93.

3. *Kegel*, *O.* Sylow-Gruppen und Subnormalteiler endlicher Gruppen / O. Kegel // Math. Zeitschrift. – 1962. – Vol. 78. – S. 205–221.

4. *Горенстейн*, *Д.* Конечные простые группы. Введение в их классификацию / Д. Горенстейн. – М.: Мир, 1985. – 352 с.

5. *Huppert*, *B.* Endliche Gruppen I / B. Huppert // Berlin: Springer-Verlag. – 1982. – 793 s.

6. *Гольфанд*, *Ю.А.* О группах, все подгруппы которых специальные / Ю.А. Гольфанд // Доклады АН СССР. – 1948. – Т. 60, № 8. – С. 1313–1315.

7. *Беркович*, *Я.Г.* О конечных группах с перестановочными подгруппами / Я.Г. Беркович, Э.М. Пальчик // Сибирск. матем. ж. – 1967. – Т. 8, № 4. – С. 741–753.

8. *Пальчик*, *Э.М.* О подгруппах Шмидта простых неабелевых конечных K-групп / Э.М. Пальчик, О.В. Голубева // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. Вопросы алгебры. – 2000. – № 3 (16). – С. 138–144.

9. *Чунихин*, *С.А.* Подгруппы конечных групп / С.А. Чунихин. – Минск: Наука и техника, 1964. – 158 с.

10. *Lennox*, *J.C.* Subnormal subgroups of groups / J.C. Lennox, E. Stewart. – Oxford: Clarendon press, 1987. – 253 p.

11. *Glauberman*, *G.* Factorizations in local subgroups of finite groups / G. Glauberman // Regional conf. series in Math. № 33 Amer. Math. Soc. Providence. – 1977. – 74 p.

12. *Монахов*, *В.С.* Произведение конечных групп, близких к нильпотентным / В.С. Монахов // Сборник «Конечные группы». – Минск: Наука и техника. – 1975. – С. 70–100.

13. *Башун*, *С.Ю.* $3'$-подгруппы Шмидта четного порядка в конечных группах / С.Ю. Башун // Весці НАН Беларусі, сер. фіз.-мат. н. – 2013. – № 1. – С. 57–63.

14. *Arad*, *Z.* On the finite factorizable groups / Z. Arad, E. Fisman // J. Algebra. – 1984. – Vol. 86, № 2. – P. 522–548.

15. *Князина*, *В.Н.* О существовании подгрупп Шмидта в конечных неразрешимых группах / В.Н. Князина, В.С. Монахов // Сборник научных работ студентов высших учебных заведений Республики Беларусь «НИРС 2002». – Минск. – 2003. – С. 322–325.

16. *Беркович*, *Я.Г.* Условие, необходимое для совпадения группы с коммутантом / Я.Г. Беркович // Известия высших учебных заведений. Математика. – 1968. – № 8 (75). – С. 14–18.

17. *Князина*, *В.Н.* Конечные группы с полунормальными подгруппами Шмидта / В.Н. Князина, В.С. Монахов // Алгебра и логика. – 2007. – Т. 46, № 4. – С. 448–458.

Поступила в редакцию 28.03.18.