Проблемы физики, математики и техники, № 3 (36), 2018

УДК 512.548

ПЕРЕСТАНОВОЧНОСТЬ ЭЛЕМЕНТОВ В ПОЛИАДИЧЕСКИХ ГРУППОИДАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

А.М. Гальмак

Могилёвский государственный университет продовольствия

PERMUTABILITY OF ELEMENTS IN POLYADIC GROUPOIDS OF SPECIAL FORM

A.M. Gal'mak

Mogilev State University of Food Technologies

Изучается перестановочность элементов в полиадических группоидах с полиадической операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая определяется на k-ой декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η.

Ключевые слова: *полугруппа*, *полиадическая операция*, *полуабелевость*, *нейтральная последовательность*.

The permutability of elements in polyadic groupoids with polyadic operation $\eta_{s,\sigma,k}$, which is determined on a k-th Cartesian power A^k of n-ary groupoid $< A, \eta >$ with the substitution σ of the set $\{1, \ldots, k\}$ and n-ary operation η is studied.

Keywords: *semigroup*, *polyadic operation*, *semiabelianness*, *neutral sequence*.

Введение

Полиадическим группоидом специального вида мы называем универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с одной l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1) + 1$, которая определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$ и n-арной операции η. Полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ первоначально была определена в [1]. Там же было доказано, что если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то полиадическая операция $\eta_{s,\sigma,k}$ также является ассоциативной. Частным случаем $(n = 2)$ полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A. Изучению операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ и некоторых её обобщений посвящена книга [3]. Частные случаи этой l-арной операции изучал Э. Пост в [4]. В качестве полугруппы A он рассматривал либо симметрическую группу, либо полную линейную группу над полем комплексных чисел. При этом арность полиадической операции и число k были связаны равенством $l = k + 1$, а роль подстановки σ в обоих случаях играл цикл $(12 \ldots k)$.

В данной статье изучается связь между перестановочностью элементов в n-арной полугруппе $< A, \eta >$ и перестановочностью элементов в l-арной полугруппе $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

1 Операция $\eta_{s,\sigma,k}$

Опредедение **1.1** [1]. Пусть $< A, \eta >$ – n-арный группоид, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $l = s(n-1) + 1$, $k \geq 2$, $\sigma \in \mathbf{S}_k$. Определим на A^k вначале n-арную операцию

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_n) = \\ = \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) = \\ = (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots \\ \ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{n\sigma^{n-1}(k)})), \tag{1.1}$$

а затем l-арную операцию

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = \\ = \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n \ldots \mathbf{x}_{2(n-1)} \\ \eta_{1,\sigma,k}(\ldots \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-2)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)} \\ \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)+1})) \ldots))). \tag{1.2}$$

Ясно, что n-арная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$ при $s = 1$.

Явный вид l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ описывает следующая

Теорема **1.1** [1]. *Если*

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$
$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_\mathrm{k}),$$

то для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j*-я компонента* y_j *находится по формуле*

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(j)} \\ \eta(x_{n\sigma^{n-1}(j)} \ldots x_{(2(n-1))\sigma^{2(n-1)-1}(j)}\ \eta(\ldots \\ \ldots \eta(x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)} \ldots \\ \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) \ldots))). \tag{1.3}$$

Замечание **1.1.** Если n-арная операция η ассоциативна, то (1.3) может быть переписано следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) =$$
$$= \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Если η – бинарная операция, обозначаемая символом $\circ$, то бинарная операция $\eta_{1,\sigma,k}$ совпадает с бинарной операцией $\overset{\sigma}{\circ}$, а l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ – с l-арной операцией $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [3]. При этом $l = s + 1$, а равенства (1.1), (1.2) и (1.3) принимают вид

$$\mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_2 = (x_{11}, \ldots, x_{1k}) \overset{\sigma}{\circ} (x_{21}, \ldots, x_{2k}) =$$
$$= (x_{11}x_{2\sigma(1)}, \ldots, x_{1k}x_{2\sigma(k)}),$$
$$[\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_k]_{l,\sigma,k} =$$
$$= \mathbf{x}_1 \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_2 \overset{\sigma}{\circ} (\ \ldots (\mathbf{x}_{l-2} \overset{\sigma}{\circ} (\mathbf{x}_{l-1} \overset{\sigma}{\circ} \mathbf{x}_l)) \ldots)),$$
$$y_j = x_{1j}(x_{2\sigma(j)}(\ \ldots (\ x_{s\sigma^{s-1}(j)}x_{(s+1)\sigma^{s}(j)}) \ldots)).$$

Для сокращения записей в правой части последнего равенства символ операции $\circ$ не указан. Для ассоциативной бинарной операции $\circ$ это же равенство может быть переписано следующим образом

$$y_j = x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(l-1)\sigma^{l-2}(j)}x_{l\sigma^{l-1}(j)}.$$

Именно таким равенством в [3, определение 3.1.4] была определена l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ на k-ой декартовой степени полугруппы A.

Таким образом, l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [3], определенная на k-ой декартовой степени полугруппы, является частным случаем l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ из [5], определенной на k-ой декартовой степени группоида. Последняя операция, в свою очередь, является частным случаем l-арной операции из определения 1.1, определенной на k-ой декартовой степени n-арного группоида.

Изучению некоторых свойств операции $\eta_{s,\sigma,k}$ посвящены статьи [6], [7].

***Замечание* 1.2.** Частным случаем l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ является и n-арная операция $\tilde{\eta}$ из [3, с. 227], которая совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,(12\ \ldots\ n-1),n-1}$.

Имеет место

***Теорема* 1.2** [1]. *Если n-арная операция η – ассоциативна, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ ассоциативна.*

***Теорема* 1.3** [8]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ l-арная группа.*

2 Перестановочность элементов в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$

Напомним, что n-арный группоид $< A, [\ ] >$ называют:

абелевым, если в нём для любой подстановки σ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ выполняется тождество

$$[x_1x_2 \ldots x_n] = [x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}]; \qquad (2.1)$$

полуабелевым, если в нём выполняется тождество

$$[xx_1 \ldots x_{n-2}y] = [yx_1 \ldots x_{n-2}x]. \qquad (2.2)$$

Заметим, что абелевы и полуабелевы n-арные операции впервые появились у Дёрнте [9] при изучении n-арных групп.

При $n = 2$ понятия абелевости и полуабелевости совпадают, так как в этом случае тождества (2.1) и (2.2) принимают вид $xy = yx$.

Последовательность $e_1 \ldots e_{n-1}$ элементов n-арного группоида $< A, [\ ] >$ называют:

нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \ldots e_{n-1}x] = [xe_1 \ldots e_{n-1}] = x;$$

левой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[e_1 \ldots e_{n-1}x] = x;$$

правой нейтральной в нем, если для любого $x \in A$ верно

$$[xe_1 \ldots e_{n-1}] = x.$$

***Предложение* 2.1.** *Если подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то n-арный группоид $< A, \eta >$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда полуабелев n-арный группоид $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{i(n-1)}) \in A^k,\ i = 1, \ldots, n.$$

Так как n-арный группоид $< A, \eta >$ – полуабелев, то, учитывая определение операции $\eta_{s,\sigma,k}$ и тождественность подстановки σ^{n-1}, получим

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{x}_n) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}((x_{11}, \ldots, x_{1k}) \ldots (x_{n1}, \ldots, x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)}\ x_{n\sigma^{n-1}(1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)}\ x_{n\sigma^{n-1}(k)})) =$$
$$= (\eta(x_{11}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)}x_{n1}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(x_{1k}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)}x_{nk})) =$$
$$= (\eta(x_{n1}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)}x_{11}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(x_{nk}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)}x_{1k})) =$$
$$= (\eta(x_{n1}x_{2\sigma(1)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(1)}\ x_{1\sigma^{n-1}(1)}), \ldots$$
$$\ldots, \eta(x_{nk}x_{2\sigma(k)} \ldots x_{(n-1)\sigma^{n-2}(k)}\ x_{1\sigma^{n-1}(k)})) =$$
$$= \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{x}_1),$$

то есть

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{x}_n) = \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{x}_n\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{n-1}\mathbf{x}_1).$$

Следовательно, n-арный группоид $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$ является полуабелевым.

Достаточность. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – произвольные элементы из A. Положим

$$\mathbf{y}_i = (\underbrace{x_i, \ldots, x_i}_{k}) \in A^{n-1},\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y}_{n-1}\mathbf{y}_n) = (g_1, \ldots, g_{n-1}),$$
$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_n\mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y}_{n-1}\mathbf{y}_1) = (h_1, \ldots, h_{n-1}).$$

Так как n-арный группоид $< A^k, \eta_{1,\sigma,k} >$ является полуабелевым, то

$$\eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_1\mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y}_{n-1}\mathbf{y}_n) = \eta_{1,\sigma,k}(\mathbf{y}_n\mathbf{y}_2 \ldots \mathbf{y}_{n-1}\mathbf{y}_1),$$

откуда $g_i = h_i$, где

$$g_i = \eta(x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n),\ h_i = \eta(x_nx_2 \ldots x_{n-1}x_1).$$

Следовательно, в n-арном группоиде $< A, \eta >$ выполняется тождество

$$\eta(x_1x_2 \ldots x_{n-1}x_n) = \eta(x_nx_2 \ldots x_{n-1}x_1),$$

что означает его полуабелевость. □

***Замечание* 2.1.** При доказательстве достаточности предложения 2.1 тождественность подстановки σ^{n-1} не использовалась.

Так как, согласно замечанию 1.2, n-арная операция $\tilde{\eta}$ совпадает с n-арной операцией $\eta_{1,\,(12\,\ldots\,n-1),\,n-1}$, то полагая в предложении 2.1 $k = n - 1$, $\sigma = (12 \ldots n - 1)$, получим

***Следствие* 2.1** [3, Предложение 5.1.12]. *n-Арный группоид $< A, \eta >$ является полуабелевым тогда и только тогда, когда полуабелев n-арный группоид $< A^{n-1}, \tilde{\eta} >$.*

Следующая теорема обобщает необходимое утверждение из формулировки предложения 2.1.

***Теорема* 2.1.** *Если n-арная полугруппа $< A, \eta >$ является полуабелевой, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ также является полуабелевой.*

Доказательство. Так как $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, то согласно теореме 1.2, l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ действительно является l-арной полугруппой.

Положим

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}),\ i = 1, 2, \ldots, l,$$

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l) = (y_1, y_2, \ldots, y_k),$$

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_l\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_1) = (z_1, z_2, \ldots, z_k),$$

где, в силу замечания 1.1,

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots$$
$$\ldots\ x_{(s(n-1))\sigma^{s(n-1)-1}(j)}\ x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}),$$

$$z_j = \eta(x_{(s(n-1)+1)j}x_{2\sigma(j)} \ldots$$
$$\ldots\ x_{(s(n-1))\sigma^{s(n-1)-1}(j)}\ x_{1\sigma^{s(n-1)}(j)}).$$

Так как σ^{l-1} – тождественная подстановка, то $\sigma^{l-1}(j) = \sigma^{s(n-1)}(j) = j$ для любого $j = 1, 2, \ldots, k$. Учитывая это равенство, и, используя обозначение

$$\alpha_t = x_{(t(n-1)+2)\sigma^{t(n-1)+1}(j)}\ \ldots$$
$$\ldots\ x_{((t+1)(n-1))\sigma^{(t+1)(n-1)-1}(j)},\ t = 0, 1, \ldots, s-1,$$

последние два равенства можно переписать следующим образом

$$y_j = \eta(x_{1j}\alpha_1\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_2\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_3 \ldots$$
$$\ldots \alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{(s(n-1)+1)j}),$$

$$z_j = \eta(x_{(s(n-1)+1)j}\alpha_1\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_2\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_3 \ldots$$
$$\ldots \alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{1j}).$$

В силу полуабелевости n-арной операции η, имеем

$$y_j = \eta(x_{1j}\alpha_1\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_2\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_3 \ldots$$
$$\ldots \alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{(s(n-1)+1)j}) =$$
$$= \eta(\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_1 x_{1j}\alpha_2\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_3 \ldots$$
$$\ldots \alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{(s(n-1)+1)j}) =$$
$$= \eta(\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_1\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_2 x_{1j}\alpha_3 \ldots$$
$$\ldots \alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{(s(n-1)+1)j}) =$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \eta(\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_1\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_2\, x_{(3(n-1)+1)\sigma^{3(n-1)}(j)}\, \alpha_3 \ldots$$
$$\ldots\ x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-2}x_{(s(n-1)+1)j}\alpha_{s-1}x_{1j}) =$$
$$= \eta(\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_1\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_2\, x_{(3(n-1)+1)\sigma^{3(n-1)}(j)}\, \alpha_3 \ldots$$
$$\ldots x_{(s(n-1)+1)j}\alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{1j}) =$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$= \eta(\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_1x_{(s(n-1)+1)j}\alpha_2\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \ldots$$
$$\ldots \alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{1j}) =$$
$$= \eta(x_{(s(n-1)+1)j}\alpha_1\, x_{n\sigma^{n-1}(j)}\, \alpha_2\, x_{(2(n-1)+1)\sigma^{2(n-1)}(j)}\, \alpha_3 \ldots$$
$$\ldots \alpha_{s-2}\, x_{((s-1)(n-1)+1)\sigma^{(s-1)(n-1)}(j)}\, \alpha_{s-1}x_{1j}) = z_j,$$

то есть $y_j = z_j$. Следовательно, в $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ выполняется тождество

$$\eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_l) = \eta_{s,\,\sigma,\,k}(\mathbf{x}_l\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{l-1}\mathbf{x}_1),$$

что означает полуабелевость l-арной полугруппы $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$. □

Предложение 2.1 получается из теоремы 2.1 при $s = 1$.

Так как n-арная полугруппа $< A, \eta >$, производная от полугруппы A, в которой выполняется тождество

$$xx_1 \ldots x_{n-2}y = yx_1 \ldots x_{n-2}x,$$

является полуабелевой, то из теоремы 2.1 вытекает

***Следствие* 2.2**. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, производная от полугруппы A, в которой выполняется тождество*

$$xx_1 \ldots x_{n-2}y = yx_1 \ldots x_{n-2}x,$$

подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ является полуабелевой.

***Теорема* 2.2.** *Если n-арный группоид $< A, \eta >$ обладает левой нейтральной последовательностью, то из полуабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ следует полуабелевость n-арного группоида $< A, \eta >$.*

Доказательство. Пусть $x, x_2, \ldots, x_{n-1}, y$ – произвольные элементы из A, $e_1 \ldots e_{n-1}$ – левая нейтральная последовательность n-арного группоида $< A, \eta >$. Положим

$$\mathbf{x} = (\underbrace{x, \ldots, x}_{k}),\ \mathbf{x}_2 = (\underbrace{x_2, \ldots, x_2}_{k}),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \mathbf{x}_{n-1} = (\underbrace{x_{n-1}, \ldots, x_{n-1}}_{k}),\ \mathbf{y} = (\underbrace{y, \ldots, y}_{k}),$$
$$\mathbf{x}_n = \mathbf{x}_{2(n-1)+1} = \ldots = \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+1} = (\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{k}),$$
$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_{2(n-1)+2} = \ldots = \mathbf{x}_{(s-1)(n-1)+2} = (\underbrace{e_2, \ldots, e_2}_{k}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\mathbf{x}_{2(n-1)} = \mathbf{x}_{3(n-1)} = \ldots = \mathbf{x}_{s(n-1)} = (\underbrace{e_{n-1}, \ldots, e_{n-1}}_{k}).$$

Так как l-арная полугруппа $< A^k, \eta_{s,\,\sigma,\,k} >$ – полуабелева, то

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)}\mathbf{y}) = \eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{y}\mathbf{x}_2 \ldots \mathbf{x}_{s(n-1)}\mathbf{x}),$$

откуда, в силу (1.3), имеем

$$\eta(xx_2 \ldots x_{n-1}\underbrace{\eta(e_1 \ldots e_{n-1}\,\eta(\ldots\eta(e_1 \ldots e_{n-1}\,y)\ldots))}_{s-1}) =$$

$$= \eta(yx_2 \ldots x_{n-1}\underbrace{\eta(e_1 \ldots e_{n-1}\,\eta(\ldots\eta(e_1 \ldots e_{n-1}\,x)\ldots))}_{s-1}),$$

откуда, используя левую нейтральность последовательности $e_1 \ldots e_{n-1}$, получим

$$\eta(xx_2 \ldots x_{n-1}y) = \eta(yx_2 \ldots x_{n-1}x).$$

Последнее равенство, ввиду произвольного выбора элементов $x, x_2, \ldots, x_{n-1}, y \in A$, означает полуабелевость n-арного группоида $< A, \eta >$. □

Если в теореме 2.2 n-арный группоид $< A, \eta >$ является n-арной полугруппой, обладающей правой нейтральной последовательностью, то в силу замечания 1.1, предпоследнее равенство из доказательства теоремы 2.2 имеет вид

$$\eta(xx_2 \ldots x_{n-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1}\,y) =$$

$$= \eta(yx_2 \ldots x_{n-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1}\,x),$$

откуда, используя правую нейтральность последовательности $e_1 \ldots e_{n-1}$, получим

$$y_j = \eta(xx_2 \ldots (x_{n-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1})y) =$$

$$= \eta(yx_2 \ldots (x_{n-1}\underbrace{e_1 \ldots e_{n-1} \ldots e_1 \ldots e_{n-1}}_{s-1})x),$$

$$\eta(xx_2 \ldots x_{n-1}y) = \eta(yx_2 \ldots x_{n-1}x).$$

Поэтому имеет место

***Теорема* 2.3.** *Если n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, то из полуабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ следует полуабелевость n-арной полугруппы $< A, \eta >$.*

Так как в n-арной полугруппе $< A, \eta >$, производной от полугруппы A с единицей (левой единицей, правой единицей) e, последовательность $\underbrace{e \ldots e}_{n-1}$ является нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной), то из теоремы 2.3 вытекает

***Следствие* 2.3**. *Пусть $< A, \eta >$ – n-арная полугруппа, производная от полугруппы A* с *единицей (левой единицей, правой единицей). Тогда из полуабелевости l-арного группоида $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ следует полуабелевость n-арной полугруппы $< A, \eta >$.*

3 Критерии полуабелевости

Теоремы 1.2, 2.1 и 2.3 позволяют сформулировать следующий критерий полуабелевости l-арной полугруппы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$.

***Теорема* 3.1.** *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$. Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n-арная полугруппа $< A, \eta >$ полуабелева.*

Если подстановка σ из $\mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, то она удовлетворяет и условию $\sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому из теоремы 3.1 вытекает

***Следствие* 3.1.** *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$. Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n-арная полугруппа $< A, \eta >$ полуабелева.*

Любой цикл σ длины $n - 1$ из $\mathbf{S}_k$, где $n - 1 \leq k$, удовлетворяет условию $\sigma^n = \sigma$, а значит и условию $\sigma^{s(n-1)+1} = \sigma$. Поэтому полагая в теореме 3.1 или в следствии 3.1 σ – цикл длины $n - 1$, получим

***Следствие* 3.2.** *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, σ – цикл длины $n - 1$ из $\mathbf{S}_k$, где $n - 1 \leq k$. Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – l-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n-арная полугруппа $< A, \eta >$ полуабелева.*

Полагая в следствии 3.2 $k = n - 1$, получим

***Следствие* 3.3.** *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, σ – цикл длины $n - 1$ из* $\mathbf{S}_{n-1}$. *Тогда $< A^{n-1}, \eta_{s,\sigma,n-1} >$ – l-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n-арная полугруппа $< A, \eta >$ полуабелева.*

Полагая в следствии 3.3 $\sigma = (12 \ldots n - 1)$, получим

***Следствие* 3.4.** *Пусть n-арная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью. Тогда $< A^{n-1}, \eta_{s,(12 \ldots n-1),n-1} >$ – l-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n-арная полугруппа $< A, \eta >$ полуабелева.*

Полагая в теореме 3.1 и следствиях 3.1–3.4 $n = 3$, получим ещё три следствия.

***Следствие* 3.5.** *Пусть тернарная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ удовлетворяет условию $\sigma^{2s+1} = \sigma$. Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – $(2s + 1)$-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа $< A, \eta >$ полуабелева.*

***Следствие* 3.6.** *Пусть тернарная полугруппа $< A, \eta >$ обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью, подстановка $\sigma \in \mathbf{S}_k$ имеет порядок 2.*

Тогда $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– $(2s + 1)$-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа* $< A, \eta >$ *полуабелева.*

***Следствие* 3.7.** *Пусть тернарная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью,* σ *– транспозиция из* $\mathbf{S}_k$. *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– $(2s + 1)$-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа* $< A, \eta >$ *полуабелева.*

***Следствие* 3.8.** *Пусть тернарная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает нейтральной (левой нейтральной, правой нейтральной) последовательностью. Тогда* $< A^2, \eta_{s,(12),2} >$ *– $(2s + 1)$-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда тернарная полугруппа* $< A, \eta >$ *полуабелева.*

Так как в бинарных группоидах понятия абелевости и полуабелевости совпадают, то из теоремы 3.1 вытекает

***Следствие* 3.9.** *Пусть полугруппа A обладает единицей (левой единицей, правой единицей), подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< A^k, [\ ]_{l,\sigma,k} >$ *– l-арная полугруппа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда полугруппа A абелева.*

***Замечание* 3.1.** Следствие 3.9 для полугруппы A с единицей доказано в [3, Предложение 3.5.4].

Так как всякая n-арная группа обладает нейтральными последовательностями, то для n-арных групп теоремы 2.3 и 3.1 формулируются следующим образом. При этом при формулировке теоремы 3.3 учитывалась теорема 1.3.

***Теорема* 3.2.** *Если* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, то из полуабелевости l-арного группоида* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *следует полуабелевость n-арной группы* $< A, \eta >$.

***Теорема* 3.3.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *– l-арная группа, являющаяся полуабелевой тогда и только тогда, когда n-арная группа* $< A, \eta >$ *полуабелева.*

Для теоремы 3.3 можно сформулировать следствия, аналогичные следствиям 3.1–3.9.

Например, используя следствие из теоремы 3.3 для случая $n = 3$, получим следующие два примера.

***Пример* 3.1.** Пусть $\mathbf{T}_3$ – множество всех нечётных подстановок на трёх символах. Определим на $\mathbf{T}_3$ тернарную операцию $\eta(\alpha\beta\gamma) = \alpha\beta\gamma$. Тогда $< \mathbf{T}_3, \eta >$ – полуабелева тернарная группа третьего порядка, не являющаяся абелевой [10]. Согласно теореме 3.3, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра $< T_3^2, \eta_{s,(12),2} >$ является полуабелевой $(2s + 1)$-арной группой девятого порядка. В частности, $< T_3^2, \eta_{1,(12),2} >$ – полуабелева тернарная группа девятого порядка.

***Пример* 3.2.** Пусть $\mathbf{D}_n$ – диэдральная группа, $\mathbf{B}_n$ – подмножество всех её отражений. Определим на $\mathbf{B}_n$ тернарную операцию $\eta(\varphi\psi\theta) = \varphi\psi\theta$. Тогда $< \mathrm{B}_n, \eta >$ – полуабелева тернарная группа порядка n, не являющаяся абелевой [10]. Согласно теореме 3.3, для любого $s \geq 1$ универсальная алгебра $< B_n^2, \eta_{s,(12),2} >$ является полуабелевой $(2s + 1)$-арной группой порядка n^2. В частности, $< B_n^2, \eta_{1,(12),2} >$ – полуабелева тернарная группа порядка n^2.

4 Критерии не *n*-полуабелевости

Пусть $l = s(n - 1) + 1$, $s \geq 1$. l-Арный группоид $< A, \eta >$ называется n-полуабелевым, если в нём для любых $t = 0, 1, \ldots, s - 1$ выполняется тождество

$$\eta(x_1 \ldots x_{t(n-1)}x_{t(n-1)+1}x_{t(n-1)+2} \ldots x_{(t+1)(n-1)}$$
$$x_{(t+1)(n-1)+1}x_{(t+1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)+1}) =$$
$$= \eta(x_1 \ldots x_{t(n-1)}x_{(t+1)(n-1)+1}x_{t(n-1)+2} \ldots$$
$$\ldots x_{(t+1)(n-1)}x_{t(n-1)+1}x_{(t+1)(n-1)+2} \ldots x_{s(n-1)+1}).$$

Если положить

$$\alpha_i = x_{(i-1)(n-1)+2} \ldots \mathrm{x}_{i(n-1)},\ i = 1, \ldots s,$$

то последнее тождество можно переписать следующим образом

$$[x_1\alpha_1x_n \ldots x_{(t-1)(n-1)+1}\alpha_tx_{t(n-1)+1}$$
$$\alpha_{t+1}x_{(t+1)(n-1)+1}\alpha_{t+2} \ldots \alpha_sx_l] =$$
$$= [x_1\alpha_1x_n \ldots x_{(t-1)(n-1)+1}\alpha_tx_{(t+1)(n-1)+1}$$
$$\alpha_{t+1}x_{t(n-1)+1}\alpha_{t+2} \ldots \alpha_sx_l].$$

Понятно, что l-полуабелевые l-арные группоиды – это в точности полуабелевые l-арные группоиды, а 2-полуабелевые l-арные группоиды – это в точности абелевы l-арные группоиды.

n-Полуабелевы полиадические операции впервые появились у Э. Поста [4] при изучении полиадических групп.

Полиадический группоид, не являющийся n-полуабелевым, будем называть также не n-полуабелевым.

Проведя соответствующие вычисление, можно убедиться в справедливости следующего предложения.

***Предложение* 4.1**. *Всякий n-полуабелевый l-арный группоид является полуабелевым.*

В связи с предложением 4.1 возникает вопрос: *существуют ли полуабелевы l-арные группоиды вида* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$, *не являющиеся n-полуабелевыми*?

Для положительного ответа на этот вопрос нам понадобятся две теоремы из [11].

***Теорема* 4.1** [11]. *Пусть n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$ *и отличным от* e_{n-1} *элементом, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n \neq \sigma$. *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

***Теорема* 4.2** [11]. *Пусть n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает левой нейтральной последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$ *и отличным от* e_1 *элементом,* *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^n \neq \sigma$. *Тогда l-арный группоид* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *не является n-полуабелевым.*

Эти теоремы и теорема 3.1 позволяют сформулировать следующие две теоремы.

***Теорема* 4.3**. *Пусть полуабелева n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает правой нейтральной последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$ *и отличным от* e_{n-1} *элементом, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условиям* $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – *полуабелева, но не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

***Теорема* 4.4**. *Пусть полуабелева n-арная полугруппа* $< A, \eta >$ *обладает левой нейтральной последовательностью* $e_1 \ldots e_{n-1}$ *и отличным от* e_1 *элементом, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условиям* $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – *полуабелева, но не n-полуабелева l-арная полугруппа.*

В n-арной группе $< A, \eta >$ для любого её элемента a существуют такие элементы u и v, что последовательности

$$u\underbrace{a \ldots a}_{n-2}, \ \underbrace{a \ldots a}_{n-2}v$$

являются нейтральными. Поэтому к n-арной группе $< A, \eta >$, обладающей различными элементами a и b, применима как теорема 4.3 ($u\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$ рассматривается как правая нейтральная последовательность), так и теорема 4.4 ($\underbrace{a \ldots a}_{n-2}v$ рассматривается как левая нейтральная последовательность).

Таким образом, для n-арных групп имеет место

***Теорема* 4.5**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *полуабелева неодноэлементная n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условиям* $\sigma^n \neq \sigma$, $\sigma^l = \sigma$. *Тогда* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ – *полуабелева, но не n-полуабелева l-арная группа.*

***Пример* 4.1.** Пусть $< T_3^2, \eta_{1,(12),2} >$ – полуабелева тернарная группа девятого порядка из примера 3.1. Считая в определении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$

$$A = T_3^2,\ \eta = \eta_{1,(12),2},\ n = 3,\ k = 4,\ \sigma = (1234) \in \mathbf{S}_4,$$

определим на $(T_3^2)^4$ $(2s + 1)$-арную операцию $\eta_{s,(1234),4}$.

Если $s = 2t$, где $t \geq 1$, то

$$(1234)^{2s+1} = (1234)^{4t+1} = (1234).$$

А так как, кроме того, $(1234)^3 \neq (1234)$, то согласно теореме 4.5, универсальная алгебра $< (T_3^2)^4, \eta_{2t,(1234),4} >$ является полуабелевой $(4t + 1)$-арной группой порядка 3^8, не являющейся 3-полуабелевой. В частности, $< (T_3^2)^4, \eta_{2,(1234),4} >$ – полуабелева 5-арная группа порядка 6561, не являющаяся 3-полуабелевой.

***Пример* 4.2.** Пусть $< B_n^2, \eta_{1,(12),2} >$ – полуабелева тернарная группа порядка n^2 из примера 3.2. Считая в определении l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$

$$A = B_n^2,\ \eta = \eta_{1,(12),2},\ n = 3,\ k = 4,\ \sigma = (1234) \in \mathbf{S}_4,$$

определим на $(B_n^2)^4$ $(2s + 1)$-арную операцию $\eta_{s,(1234),4}$. Тогда для любого $t \geq 1$ по теореме 4.5, $< (B_n^2)^4, \eta_{2t,(1234),4} >$ – полуабелева $(4t + 1)$-арная группа порядка n^8, не являющаяся 3-полуабелевой. В частности, $< (B_n^2)^4, \eta_{2,(1234),4} >$ – полуабелева 5-арная группа порядка n^8, не являющаяся 3-полуабелевой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак, А.М.* О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д Русаков // Известия ГГУ им. Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.
2. *Гальмак, А.М.* Многоместные ассоциативные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак // Весці НАН Беларусі. – 2008. – № 3. – С. 28–34.
3. *Гальмак, А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.
4. *Post, E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, № 2. – P. 208–350.
5. *Гальмак, А.М.* Об операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – Могилев. – 2010. – № 1 (35). – С. 34–38.
6. *Русаков, А.Д.* О неполуассоциативности полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ / А.Д. Русаков // Проблемы физики, математики и техники. – 2017. – № 1 (30). – С. 68–72.
7. *Русаков, А.Д.* Новые критерии ассоциативности l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$ / А.Д Русаков, М.В. Селькин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 2 (35). – С. 76–79.
8. *Гальмак, А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ імя А.А. Куляшова. – Могилев. – 2018. – № 1 (35). – С. 34–38.
9. *Dörnte, W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.
10. *Гальмак, А.М.* Тернарные группы отражений / А.М. Гальмак, Г.Н. Воробьев. – Минск: Беларуская навука, 1998. – 128 с.
11. *Гальмак, А.М.* О не n-полуабелевости полиадических группоидов специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко // XII школа-конференция по теории групп. – Тез. докл. – Геленджик, 2018. – С. 34–38.

Поступила в редакцию 04.04.18.