Проблемы физики, математики и техники, № 3 (36), 2018

УДК 517.5

ЭКВИВАЛЕНТ СТРУКТУРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ СЛОЖНОГО ПРОЦЕССА, МОДЕЛИРУЕМОГО АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Г.Н. Казимиров

Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины

EQUIVALENT OF THE STRUCTURAL CHARACTERISTIC OF A COMPLEX PROCESS MODELED BY ALGEBRAICAL POLYNOMIALS

G.N. Kazimirov

F. Scorina Gomel State University

Доказывается эквивалентность обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига типа Якоби и *K*-функционала Петре.

Ключевые слова: *оператор обобщённого сдвига Якоби*, *обобщённый модуль гладкости*, *K-функционал.*

The equivalence of the generalized modulus of smoothness defined by the generalized shift operator of Jacobi type and the *K*-functional of Petre is proved.

Keywords: *generalized Jacobi shift operator*, *generalized modulus of smoothness*, *K-functional.*

Введение

Для 2π-периодических функций хорошо известны прямая и обратная теоремы теории приближений о связи между модулями гладкости и их наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами. При рассмотрении непериодических функций уже не удаётся получить такие же связи между модулями гладкости функции и её наилучшими приближениями алгебраическими многочленами. Однако, если обычный модуль гладкости заменить некоторым обобщённым модулем гладкости, то остаются справедливыми прямая и обратная теоремы теории приближений. Некоторые из таких обобщённых модулей были предложены М.К. Потаповым. В настоящей работе рассматривается один из таких обобщённых модулей гладкости и доказывается его эквивалентность *K*-функционалу. С помощью этой эквивалентности, следуя методу *K*-функционала, введённому Я. Петре, легко доказываются прямая и обратная теоремы теории приближений.

1 Основные определения

Будем говорить, что $f \in L_p$, $1 \le p < \infty$, , если функция f измерима на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_p = \left(\int_{-1}^{1} |f(x)|^p dx\right)^{1/p} < +\infty$, а для $p = \infty$ функция f непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и $\|f\|_\infty = \max_{-1 \le x \le 1} |f(x)|$. Через $L_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций *f*, что

$$f(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta \in L_p \text{ и}$$

$$\|f\|_{p,\alpha,\beta} = \|f(x)(1-x)^\alpha (1+x)^\beta\|_p.$$

Для $\nu > \mu > -\frac{1}{2}$ определим оператор обобщённого сдвига

$$T(f, x, \nu, \mu) =$$

$$= \frac{1}{\gamma(\nu,\mu)} \int_0^1 \int_{-1}^1 f\left(x\cos t + yz\sin t\sqrt{1-x^2} - \right.$$

$$\left. -(1-y^2)(1-x)\sin^2\frac{t}{2}\right) \times$$

$$\times (1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dz dy,$$

где $\gamma(\nu,\mu) = \int_0^1 \int_{-1}^1 (1-y^2)^{\nu-\mu-1} y^{2\mu+1} (1-z^2)^{\mu-\frac{1}{2}} dz dy.$

Введём обозначения $(r = 2, 3, ...)$:

$$\Delta_h^1(f, x, \nu, \mu) = T_h(f, x, \nu, \mu) - f(x),$$

$$\Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f, x, \nu, \mu) = \Delta_{h_r}^1(\Delta_{h_1,\ldots,h_{r-1}}^{r-1}(f, x, \nu, \mu), x, \nu, \mu),$$

$$\tilde{\omega}_r(f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} = \sup_{|h_i| \le \delta, i=1,\ldots,r} \left\|\Delta_{h_1,\ldots,h_r}^r(f, x, \nu, \mu)\right\|_{p,\alpha,\beta},$$

$$D_{x,\nu,\mu} = (1-x)^{-\nu}(1+x)^{-\mu}\frac{d}{dx}(1-x)^{\nu+1}(1+x)^{\mu+1}\frac{d}{dx},$$

$$D_{x,\nu,\mu}^0 = I,$$

где I – тождественный оператор, $D_{x,\nu,\mu}^1 = D_{x,\nu,\mu}$ и для $k = 2, 3, \ldots$ $D_{x,\nu,\mu}^k = D_{x,\nu,\mu}^1(D_{x,\nu,\mu}^{k-1})$.

Через $AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$ обозначим множество таких функций *g*, что *g* имеет абсолютно непрерывную на каждом $[a, b] \subset (-1, 1)$ $2r-1$ производную и $D_{x,\nu,\mu}^l g \in L_{p,\alpha,\beta}$ для $l = 0, 1, 2, \ldots, r$.

Для $f \in L_{p,\alpha,\beta}$ введём *K*-функционал Петре по формуле:

$$K_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta} =$$
$$= \inf_{g\in AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}} \left\{ \|f-g\|_{p,\alpha,\beta} + \delta^{2r} \left\|D^r_{x,\nu,\mu} g(x)\right\|_{p,\alpha,\beta} \right\}.$$

2 Вспомогательные утверждения

Лемма 2.1. *Пусть даны числа* p,ν,μ *такие, что* $1\le p\le\infty$, $\nu>\mu>-\frac{1}{2}$. *Пусть числа* α *и* β *выбраны по правилу:*

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0 \ \textit{и}\ -\frac{1}{2}<\beta<\mu \ \textit{при}\ p=1,$$

$$\nu-\mu>\alpha-\beta> 0 \ \textit{и}\ -\frac{1}{2p}<\beta<\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} \ \textit{при}$$
$1<p<\infty$,

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0 \ \textit{и}\ 0\le\beta<\mu+\frac{1}{2} \ \textit{при}\ p=\infty.$$

Тогда, если $f\in L_{p,\alpha,\beta}$, *то* $T_t(f,x,\nu,\mu)\in L_{p,\alpha,\beta}$ *и* $\|T_t(f,x,\nu,\mu)\|_{p,\alpha,\beta}\le C_3\|f\|_{p,\alpha,\beta}$, *где положительная постоянная* C_3 *не зависит от f и t.*

Лемма 2.1 доказана в [2].

Лемма 2.2. *Пусть даны числа* p,r,ν,μ *такие, что* $1\le p\le\infty$, $r=1,2,3,...$, $\nu>\mu>-\frac{1}{2}$. *Пусть числа* α *и* β *выбраны по правилу*:

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0 \ \textit{и}\ -\frac{1}{2}<\beta<\mu \ \textit{при}\ p=1,$$

$$\nu-\mu>\alpha-\beta> 0 \ \textit{и}\ -\frac{1}{2p}<\beta<\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} \ \textit{при}$$
$1<p<\infty$,

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0 \ \textit{и}\ 0\le\beta<\mu+\frac{1}{2} \ \textit{при}\ p=\infty.$$

Тогда для $g\in AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$ *и* $\delta\in[0,\pi]$ *справедливо неравенство*:

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\le C_4\delta^{2r}\left\|D^r_{x,\nu,\mu}g(x)\right\|_{p,\alpha,\beta},$$

где положительная постоянная C_4 *не зависит от g и* δ.

Лемма 2.2 доказана в [3].

Для $0\le h\le\frac{\pi}{2}$ рассмотрим оператор

$$L_h(f,x,\nu,\mu)=\frac{1}{\varphi(h)}\int_0^h\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1}\times$$
$$\times\int_0^\omega\left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2\mu+1}T_u(f,x,\nu,\mu)dudw,$$

где

$$\varphi(h)=\int_0^h\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1}\times$$
$$\times\int_0^\omega\left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2\mu+1}dudw.$$

Пусть $L^1_h(f,x,\nu,\mu)=L_h(f,x,\nu,\mu)$, а для $k=2, 3, \ldots$

$$L^l_{h_1,\ldots,h_l}(f,x,\nu,\mu)=L_{h_l}(L^{l-1}_{h_1,\ldots,h_{l-1}}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu).$$

Лемма 2.3. Пусть даны числа p,ν,μ такие, что $1\le p\le\infty$, $\nu>\mu>-\frac{1}{2}$. Пусть числа α и β выбраны по правилу:

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0 \text{ и } -\frac{1}{2}<\beta<\mu \text{ при } p=1,$$

$$\nu-\mu>\alpha-\beta> 0 \text{ и } -\frac{1}{2p}<\beta<\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} \text{ при}$$
$1<p<\infty$,

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0 \text{ и } 0\le\beta<\mu+\frac{1}{2} \text{ при } p=\infty.$$

Тогда если $f\in L_{p,\alpha,\beta}$, то для любого $k\in\mathrm{N}$ $L^k_h(f,x,\nu,\mu)\in AD^k(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$.

Лемма 2.3 доказана в [3].

Положим $T^1_h(f,x,\nu,\mu)=T_h(f,x,\nu,\mu)$, а для $l=2, 3, \ldots$

$$T^l_{t_1,\ldots,t_l}(f,x,\nu,\mu)=T_{t_l}(T^{l-1}_{t_1,\ldots,t_{l-1}}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu).$$

Лемма 2.4. Пусть даны числа p,r,ν,μ такие, что $1\le p\le\infty$, $r=1,2,3,...$, $\nu>\mu>-\frac{1}{2}.$. Пусть $g\in AD^r(\nu,\mu)_{1,\nu,\mu}$. Тогда для почти всех $x\in[-1,1]$ и всех $t_1,\ldots,t_l\in R$, $l=1,2,3,...$ справедливо равенство:

$$D^r_{x,\nu,\mu}T^l_{t_1,\ldots,t_l}(g,x,\nu,\mu)=T^l_{t_1,\ldots,t_l}(D^r_{x,\nu,\mu}g,x,\nu,\mu).$$

Лемма 2.4 доказана в [3, с. 26].

Лемма 2.5. Пусть даны числа ν,μ такие, что, $\nu>\mu>-\frac{1}{2}$. Если $f\in L_{1,\nu,\mu}$, то для любых $k\in\mathrm{N}$ и $0\le h\le\frac{\pi}{2}$ справедливо равенство:

$$D^k_{x,\nu,\mu}L^k_h(f,x,\nu,\mu)=\frac{1}{(\varphi(h))^k}\Delta^k_h(f,x,\nu,\mu).$$

Лемма 2.5 доказана в [3, с. 50].

Лемма 2.6. Пусть даны числа ν,μ такие, что $\nu>\mu>-\frac{1}{2}$. Если $f\in L_{1,\nu,\mu}$, то для почти всех $x\in[-1,1]$ и для любых $t_1,t_2\in R$ справедливо равенство: $T^2_{t_1,t_2}(f,x,\nu,\mu)=T^2_{t_2,t_1}(f,x,\nu,\mu)$.

Лемма 2.6 доказана в [3, с. 32].

3 Основной результат

Теорема 3.1. Пусть даны числа p,r такие, что $1\le p\le\infty$, $r=1,2,3,...$. Пусть числа α и β выбраны по правилу:

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\ge 0 \text{ и } -\frac{1}{2}<\beta<\mu \text{ при } p=1,$$

$$\nu-\mu>\alpha-\beta>0 \text{ и } -\frac{1}{2p}<\beta<\mu+\frac{1}{2}-\frac{1}{2p} \text{ при}$$

$1<p<\infty$,

$$\nu-\mu>\alpha-\beta\geq 0 \text{ и } 0\leq\beta<\mu+\frac{1}{2} \text{ при } p=\infty.$$

Тогда для $f\in L_{p,\alpha,\beta}$ справедливы неравенства:

$$C_1\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\leq K_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq C_2\tilde{\omega}(f,\delta,\nu.\mu)_{p,\alpha,\beta},$$

где положительные постоянные C_1 и C_2 не зависят от f и δ.

Доказательство. Используя Лемму 2.1 и Лемму 2.2 имеем для $g\in AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$

$$\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq\tilde{\omega}_r(f-g,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}+\tilde{\omega}(g,\delta)_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq C_5\left\|f-g\right\|_{p,\alpha,\beta}+C_6\delta^{2r}\left\|D_x^r g(x)\right\|_{p,\alpha,\beta},$$

где C_5 и C_6 не зависят от f, g и δ.

Переходя к точной нижней грани по всем функциям $g\in AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$, получим:

$$C_1\tilde{\omega}_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\leq K_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Для доказательства правого неравенства рассмотрим функцию

$$A_h^r(f,x,\nu,\mu)=E-(E-L_h^r)^r(f,x,\nu,\mu),$$

где $E(f,x,\nu,\mu)=f(x)$.

Из леммы 2.3 следует, что

$$L_h^k(f,x,\nu,\mu)\in AD^k(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Нетрудно проверить, что

$$AD^l(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\subset AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$$

при $l\geq r\geq 1$, $l=r,r+1,....$ Поэтому

$$A_h^r(f,x,\nu,\mu)\in AD^r(\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Так как $L_h^r(f,x,\nu,\mu)$ имеет абсолютно непрерывную производную на каждом $[a,b]\subset(-1,1)$, то применяя теорему Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, Лемму 2.4, обобщённое неравенство Минковского и Лемму 2.1, имеем для $l=2,3...$

$$\left\|D_{x,\nu,\mu}^r(L_h^r)^l(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq\frac{1}{\varphi(h)}\int_0^h\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1}\times$$
$$\times\int_0^\omega\left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2\mu+1}\times$$
$$\times\left\|T_u(D_{x,\nu,\mu}^r L_h^{rl-1}(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}dudw\leq$$
$$C_7\left\|D_{x,\nu,\mu}^r L_h^{rl-1}(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq\ldots\leq$$
$$\leq C_8\left\|D_{x,\nu,\mu}^r L_h^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Так как $A_h^r(f,x,\nu,\mu)$ представляет собой сумму произведений $L_h^r(f,x,\nu,\mu)$, то

$$\left\|D_{x,\nu,\mu}^r A_h^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq C_9\left\|D_{x,\nu,\mu}^r L_h^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

Применяя лемму 2.5, имеем

$$(\varphi(h))^r\left\|D_{x,\nu,\mu}^r A_h^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq C_{10}\left\|\Delta_h^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq C_{11}\sup_{|t|\leq h}\left\|\Delta_t^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq C_{12}\tilde{\omega}_r(f,h,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Поскольку для $0\leq h\leq\frac{\pi}{2}$

$$\varphi(h)=\int_0^h\left(\sin\frac{\omega}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1}\times$$
$$\times\int_0^\omega\left(\sin\frac{u}{2}\right)^{2\nu+1}\left(\cos\frac{u}{2}\right)^{2\mu+1}dudw\geq$$
$$\geq\int_0^h\left(\frac{\omega}{2}\right)^{-2\nu-1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{-2\mu-1}\left(\cos\frac{\omega}{2}\right)^{2\mu+1}\times$$
$$\times\int_0^\omega\left(\frac{u}{\pi}\right)^{2\nu+1}dudw=C_{13}\int_0^h\omega d\omega=C_{14}h^2,$$

где положительные постоянные C_{13} и C_{14} не зависят от h, то

$$(h)^{2r}\left\|D_{x,\nu,\mu}^r A_h^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq C_{15}\tilde{\omega}_r(f,h,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

С другой стороны, так как

$$E-L_h^r=(E-L_h)(E+L_h+\ldots+L_h^{r-1}),$$

то из определения $L_h(f,x)$, обобщённого неравенства Минковского и Леммы 2.1следует, что при $0\leq h\leq\frac{\pi}{2}$ $\left\|L_h(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq C_{16}\left\|f\right\|_{p,\alpha}$.

Поэтому

$$\begin{aligned}&\left\|(E-L_h^r)(g,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq\\&\leq C_{17}\left\|(E-L_h)(g,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq\\&\leq C_{18}\sup_{0\leq u\leq h}\left\|\Delta_u(g,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Из леммы 2.6 следует, что

$$T_t(L_h(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu)=L_h(T_t(f,x,\nu,\mu),x,\nu,\mu).$$

Поэтому из неравенства (3.1) следует, что

$$\left\|f(x)-A_h^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq C_{18}\sup_{0\leq u_1\leq h}\sup_{0\leq u_2\leq h}\ldots\sup_{0\leq u_r\leq h}\left\|\Delta_{u_1,u_2,\ldots,u_r}^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}\leq$$
$$\leq C_{19}\tilde{\omega}_r(f,h,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Таким образом для $0\leq h\leq\frac{\pi}{2}$

$$K_r(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}\leq C_{20}\tilde{\omega}(f,\delta,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Пусть

$$I_h=\left\|f(x)-A_1^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}+$$
$$+h^{2r}\left\|D_{x,\nu,\mu}^r A_1^r(f,x,\nu,\mu)\right\|_{p,\alpha,\beta}.$$

По доказанному выше для

$0\leq h\leq\frac{\pi}{2}$ $I_h\leq C_{21}\tilde{\omega}(f,1,\nu,\mu)_{p,\alpha,\beta}$ и для $\frac{\pi}{2}\leq h\leq\pi$

$$I_h \le C_{22} I_1 \le C_{23} \tilde{\omega}(f, 1, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \le$$
$$\le C_{24} \tilde{\omega}_r (f, h, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta}.$$

Итак, для любого $\delta \in [0, \pi]$

$$K_r (f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta} \le C_2 \tilde{\omega}(f, \delta, \nu, \mu)_{p,\alpha,\beta}. \qquad \square$$

Заключение

В статье рассмотрена эквивалентная структурная характеристика функций f, для которых можно подобрать более простые функции P_n (алгебраические многочлены степени не выше чем n-1), близкие в некотором смысле к исходным [1]. Ранее этот результат был получен для обобщённого модуля гладкости, определяемого при помощи оператора обобщённого сдвига типа Чебышева [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Казимиров*, *Г.Н.* Об одном подходе к упрощению модели сложного процесса на основе алгебраических многочленов / Г.Н.Казимиров // Известия Гомельского государственного университета им. Ф. Скорины. – 2002. – № 6 (15). – С. 171–174.

2. *Потапов*, *М.К.* О структурных характеристиках классов функций с данным порядком наилучшего приближения / М.К. Потапов // Труды МИАН СССР. – 1975. – Т. 134. – С. 260–277.

3. *Казимиров*, *Г.Н.* Приближение алгебраическими многочленами функций с данным *k*-м обобщённым модулем гладкости: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.01 / Г.Н. Казимиров. – Москва,1995. – 106 л.

4. *Казимиров*, *Г.Н.* Эквивалентная структурная характеристика данного обобщённого модуля гладкости / Г.Н. Казимиров // Проблемы физики, математики и техники. – 2010. – № 3 (4). – С. 49–51.

Поступила в редакцию 25.04.18.