УДК 535.42

ВТОРОЕ И ТРЕТЬЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЯ, ОПИСЫВАЮЩЕЙ ДИФРАКЦИЮ СВЕТА НА ОБЪЕМНЫХ ФАЗОВЫХ РЕШЕТКАХ

Ю. Ф. Романов и *А. Ф. Рыхлов*

Рассмотрены второе и третье приближения электродинамической теории возмущения и найдены поправки к амплитудам проходящей и дифрагированной волн, определяемых в первом приближении теории возмущения. Проведенные эксперименты показали, что соотношение интенсивностей проходящей и дифрагированной волн соответствует предсказаниям теории. Отмечено, что вне брэгговского резонанса результаты теории связанных волн Когельника не переходят в результаты теории возмущения.

Первое приближение электродинамической теории возмущения для описания дифракции плоской световой волны на объемных фазовых решетках было рассмотрено в работах [1-3]. Чтобы произвести корректную оценку точности и границ применимости результатов первого приближения, необходимо определить поправки, вносимые в амплитуды дифрагированной и проходящей волн вторым и третьим приближениями теории возмущения.

В настоящей статье показано, что второе приближение дает поправку к амплитуде проходящей волны, тогда как третье приближение — поправку к амплитуде дифрагированной волны, получаемой в первом приближении теории возмущения. При этом параметром малости является величина $\nu=(\Delta\varepsilon)k_0^2T/2\sqrt{k_zs_z}$, где $\Delta\varepsilon$ — половина амплитуды модуляции диэлектрической проницаемости, T — толщина решетки, $k_0=\omega/c$, k_z и s_z — абсолютные величины проекций волновых векторов, относящиеся к проходящей и дифрагированной волнам внутри решетки, на ось z, перпендикулярную к поверхности решетки. Экспериментально найденные соотношения интенсивностей проходящей и дифрагированной волн находятся в удовлетворительном согласии с теоретическими предсказаниями.

Теория

Рассмотрим дифракцию света на непреломляющей решетке, поверхность которой совпадает с плоскостью x, y, а диэлектрическая проницаемость имеет гармоническую модуляцию вида

$$\varepsilon(\mathbf{r})=\varepsilon+\Delta\varepsilon(\mathbf{r})=\varepsilon+2\Delta\varepsilon\cos(\mathbf{Qr})\,\Pi(z,T)=\varepsilon+\Delta\varepsilon\left[e^{-i(Q_yy+Q_zz)}+e^{i(Q_yy+Q_zz)}\right]\Pi(z,T). \quad (1)$$

Здесь ε — среднее значение диэлектрической проницаемости, совпадающее с диэлектрической проницаемостью окружающей среды, $2\Delta\varepsilon$ — амплитуда модуляции, $\Pi(z, T)$ — функция, равная единице внутри решетки, т. е. в области $0\leqslant z\leqslant T$, и нулю вне решетки. В выражении (1) предусмотрено, что вектор решетки $\mathbf{Q}$ лежит в плоскости y, z. Пусть в этой же плоскости лежит и волновой вектор $\mathbf{k}$ волны, падающей на решетку. Будем считать, что электрический вектор падающей волны перпендикулярен к плоскости падения и направлен по оси x (ТЕ-поляризация). Тогда падающая волна описывается следующим образом:

$$\mathbf{E}^{(0)}=\mathbf{e}_xE_0e^{i(k_yy+k_zz)}, \quad (2)$$

где $\mathbf{e}_x$ — орт оси x, k_y и k_z — проекции волнового вектора, причем $|\mathbf{k}| = \sqrt{\varepsilon}\,\omega/c$. Волна (2) соответствует нулевому приближению теории возмущения.

Исходя из волнового уравнения

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) + k_0^2 \varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \tag{3}$$

и представления искомого поля $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \mathbf{E}^{(3)}, \tag{4}$$

получаем следующие уравнения, соответствующие первому, второму и третьему приближениям теории возмущения,

$$\nabla^2 \mathbf{E}^{(1)} + k^2 \mathbf{E}^{(1)} = -k_0^2 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(0)}; \tag{5}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}^{(2)} + k^2 \mathbf{E}^{(2)} = -k_0^2 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(1)}; \tag{5а}$$

$$\nabla^2 \mathbf{E}^{(3)} + k^2 \mathbf{E}^{(3)} = -k_0^2 \Delta\varepsilon(\mathbf{r}) \mathbf{E}^{(2)}. \tag{5б}$$

В двухволновом представлении, когда учитываются только две волны — проходящая с касательной проекцией волнового вектора k_y и дифрагированная с касательной проекцией волнового вектора $s_y = k_y - Q_y$, уравнения (5), (5а) и (5б) после исключения экспоненциальных множителей, зависящих от координаты y, приобретают форму

$$\frac{d^2 E_1(z)}{dz^2} + s_z^2 E_1(z) = -k_0^2 \Delta\varepsilon E_0 e^{ik_z z} e^{-iQ_z z} \Pi(z, T); \tag{6}$$

$$\frac{d^2 E_2(z)}{dz^2} + k_z^2 E_2(z) = -k_0^2 \Delta\varepsilon E_1(z) e^{iQ_z z} \Pi(z, T); \tag{6а}$$

$$\frac{d^2 E_3(z)}{dz^2} + s_z^2 E_3(z) = -k_0^2 \Delta\varepsilon E_2(z) e^{-iQ_z z} \Pi(z, T), \tag{6б}$$

где

$$k_z^2 = k^2 - k_y^2; \quad s_z^2 = k^2 - (k_y - Q_y)^2. \tag{7}$$

Проходящая волна $\mathbf{E}_t$ является суммой волн $\mathbf{E}^{(0)}$ и $\mathbf{E}^{(2)}$, тогда как дифрагированная волна $\mathbf{E}_s$ является суммой волн $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(3)}$, т. е. второе приближение приводит к поправке в амплитуде проходящей волны нулевого приближения, а третье приближение — к поправке в амплитуде дифрагированной волны первого приближения.

Решение уравнения типа

$$\frac{d^2 E}{dz^2} + q^2 E = U(z) \tag{8}$$

удобно находить в виде свертки его правой части и функции Грина, равной в данном случае $\exp(iq\,|z|)/2iq$. Нас будут интересовать как решения вне решетки, так и решения внутри решетки. Последние необходимы для нахождения решения в следующем приближении теории, согласно (6а) и (6б). Методику последовательного решения уравнений подробно проиллюстрируем для случая пропускающих решеток. Решение уравнения (6) вне решетки имеет вид

$$E_1^b(z) = -E_0 \frac{k_0^2 \Delta\varepsilon}{2is_z} \int_0^T e^{is_z|z-\tilde z|} e^{ik_z \tilde z} e^{-iQ_z \tilde z} d\tilde z = -E_0 \frac{k_0^2 \Delta\varepsilon}{2is_z} \frac{e^{iT\Delta} - 1}{i\Delta} e^{is_z z}, \quad z \geqslant T. \tag{9}$$

Здесь введено обозначение

$$\Delta = k_z - Q_z - s_z, \tag{10}$$

характеризующее расстройку брэгговского резонанса. При выполнении условия Брэгга величина Δ равна нулю, если в решетке отсутствует поглощение. Решение внутри решетки E_1 практически получается заменой в (9) величины T величиной z

$$E_1(z) = -E_0 \frac{k_0^2 \Delta\varepsilon}{2is_z} \frac{e^{iz\Delta} - 1}{i\Delta} e^{is_z z}, \quad 0 \leqslant z \leqslant T. \tag{11}$$

Зная $E_1(z)$, находим решение уравнения (6а)

$$E_2^b(z) = E_0 \frac{k_0^4(\Delta\varepsilon)^2}{4k_z s_z} \frac{1 - iT\Delta - e^{-iT\Delta}}{(i\Delta)^2} e^{ik_z z}, \quad z \geq T; \tag{12}$$

$$E_2(z) = E_0 \frac{k_0^4(\Delta\varepsilon)^2}{4k_z s_z} \frac{1 - iz\Delta - e^{-iz\Delta}}{(i\Delta)^2} e^{ik_z z}, \quad 0 \leq z \leq T. \tag{13}$$

Используя (13), получаем амплитуду волны $E_3^b(z)$

$$E_3^b(z) = -E_0 \frac{k_0^6(\Delta\varepsilon)^3}{8k_z s_z^2} \frac{2(e^{iT\Delta} - 1) - iT\Delta(e^{iT\Delta} + 1)}{i(i\Delta)^3} e^{is_z z}, \quad z \geq T. \tag{14}$$

Если ввести параметры

$$\xi = \frac{T\Delta}{2}; \quad \nu = \frac{k_0^2 \Delta\varepsilon T}{2\sqrt{k_z s_z}}, \tag{15}$$

то дифрагированную волну можно представить в виде

$$\mathbf{E}_s(T) = \mathbf{E}^{(1)}(T) + \mathbf{E}^{(3)}(T) = \mathbf{e}_x [E_1^b(T) + E_3^b(T)] e^{i(k_y - Q_y)y} = \\ = i\mathbf{e}_x E_0 \sqrt{\frac{k_z}{s_z}} \nu \left(\frac{\sin\xi}{\xi} - \nu^2 \frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{2\xi^3}\right) e^{i\xi} e^{i(s_y y + s_z T)}. \tag{16}$$

Проходящая волна $\mathbf{E}_t(T)$ будет равна

$$\mathbf{E}_t(T) = \mathbf{E}^{(0)}(T) + \mathbf{E}^{(2)}(T) = \mathbf{e}_x [E_0 e^{ik_z T} + E_2^b(T)] e^{ik_y y} = \\ = \mathbf{e}_x E_0 \left(1 - \nu^2 \frac{1 - 2i\xi - e^{-2i\xi}}{4\xi^2}\right) e^{i(k_y y + k_z T)}. \tag{17}$$

Обратимся теперь к отражательной решетке, введя расстройку Δ_0 и параметр ξ_0 следующим образом:

$$\Delta_0 = k_z - Q_z + s_z; \quad \xi_0 = \frac{T\Delta_0}{2}. \tag{18}$$

Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательные выражения для $\mathbf{E}_s(0)$ и $\mathbf{E}_t(T)$

$$\mathbf{E}_s(0) = i\mathbf{e}_x E_0 \sqrt{\frac{k_z}{s_z}} \nu \left(\frac{\sin\xi_0}{\xi_0} - \nu^2 \frac{2\xi_0 - \sin 2\xi_0}{4\xi_0^3} e^{i\xi_0}\right) e^{i\xi_0} e^{is_y y}; \tag{19}$$

$$\mathbf{E}_t(T) = \mathbf{e}_x E_0 \left(1 - \nu^2 \frac{1 + 2i\xi_0 - e^{2i\xi_0}}{4\xi_0^2}\right) e^{i(k_y y + k_z T)}. \tag{20}$$

Формулы (16), (17), (19) и (20) значительно упрощаются при выполнении условия Брэгга. Для пропускающей решетки без поглощения в этом случае амплитуды волн будут равны

$$\mathbf{E}_s(T) = i\mathbf{e}_x E_0 \sqrt{\frac{k_z}{s_z}} \nu \left(1 - \frac{\nu^2}{6}\right) e^{i(s_y y + s_z T)}; \tag{21}$$

$$\mathbf{E}_t(T) = \mathbf{e}_x E_0 \left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right) e^{i(k_y y + k_z T)}. \tag{22}$$

Для отражательной решетки без поглощения имеем

$$\mathbf{E}_s(0) = i\mathbf{e}_x E_0 \sqrt{\frac{k_z}{s_z}} \nu \left(1 - \frac{\nu^2}{3}\right) e^{is_y y}; \tag{23}$$

$$\mathbf{E}_t(T) = \mathbf{e}_x E_0 \left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right) e^{i(k_y y + k_z T)}. \tag{24}$$

Из формул (16), (17), (19)—(24) видно, что относительные величины поправок к $\mathbf{E}^{(1)}$ и $\mathbf{E}^{(0)}$ пропорциональны параметру ν^2. Кроме того, поправки приводят к уменьшению как $\mathbf{E}^{(1)}$, так и $\mathbf{E}^{(0)}$. Дело в том, что амплитуда $\mathbf{E}^{(1)}$ в действительности оказывается завышенной, поскольку в первом приближении теории пренебрегается дифракционным затуханием падающей волны $\mathbf{E}^{(0)}$. Это затухание учитывается вторым приближением, а его влияние на амплитуду дифрагированной волны — третьим приближением.

В реальных условиях, как правило, необходимо считаться с поглощением света в материале решетки. С этой целью внутри решетки в величины k_z и s_z введем энергетический коэффициент поглощения α

$$k_z = k\cos\psi_k + i\alpha_k; \quad s_z = k\cos\psi_s + i\alpha_s; \quad \alpha_k = \frac{\alpha}{2\cos\psi_k}; \quad \alpha_s = \frac{\alpha}{2\cos\psi_s}, \tag{25}$$

где ψ_k и ψ_s — углы между векторами k и s и осью z, причем $\psi_k < \pi/2$, $\psi_s < \pi/2$. Тогда отношение интенсивностей проходящей и падающей волн при выполнении условия Брэгга в соответствии с (17) и (20) составит

$$\left|\frac{E_t(T)}{E_0}\right|^2 = \left[1 - \nu^2\,\frac{e^{(\alpha_k-\alpha_s)T} - 1 - (\alpha_k - \alpha_s)\,T}{(\alpha_k - \alpha_s)^2\,T^2}\right]^2 e^{-2\alpha_k T} \simeq \left(1 - \frac{\nu^2}{2}\right)^2 e^{-2\alpha_k T}, \tag{26}$$

если решетка пропускающая, и

$$\left|\frac{E_t(T)}{E_0}\right|^2 = \left[1 - \nu^2\,\frac{e^{-(\alpha_k+\alpha_s)T} - 1 + (\alpha_k + \alpha_s)\,T}{(\alpha_k + \alpha_s)^2\,T^2}\right]^2 e^{-2\alpha_k T}, \tag{27}$$

если решетка отражательная. В (26) и (27) пренебрегается влиянием α_k и α_s на величину ν, так как считается, что α_k и α_s много меньше k_z и s_z. Величины α_k и α_s сохраняются только в комбинациях $\alpha_k T$ и $\alpha_s T$.

Дифракционная эффективность решетки η определяется выражением

$$\eta = \left|\frac{E_s}{E_0}\right|^2 \frac{\cos\psi_s}{\cos\psi_k}, \tag{28}$$

в котором E_s относится к соответствующей границе решетки. Используя (16), получаем $\eta_Б$ в брэгговском резонансе для пропускающей решетки с поглощением

$$\eta_Б = \nu^2\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k - \alpha_s}{2}T\right)}{\frac{\alpha_k - \alpha_s}{2}T} - \nu^2\,\frac{(\alpha_k - \alpha_s)\frac{T}{2}\operatorname{ch}\left(\frac{\alpha_k - \alpha_s}{2}T\right) - \operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k - \alpha_s}{2}T\right)}{2\left(\frac{\alpha_k - \alpha_s}{2}T\right)^3}\right]^2 e^{-(\alpha_k+\alpha_s)T}. \tag{29}$$

Если $|\alpha_k - \alpha_s|\,T/2$ много меньше единицы, то

$$\eta_Б \simeq \nu^2\left(1 - \frac{\nu^2}{6}\right)^2 e^{-(\alpha_k+\alpha_s)T} \simeq \nu^2\left(1 - \frac{\nu^2}{3}\right) e^{-(\alpha_k+\alpha_s)T}. \tag{30}$$

На основании (19) получаем дифракционную эффективность отражательной решетки с поглощением при выполнении условия Брэгга

$$\eta_Б = \nu^2\left[\frac{\operatorname{sh}\left(\frac{\alpha_k + \alpha_s}{2}T\right)}{\frac{\alpha_k + \alpha_s}{2}T} - \nu^2 2\,\frac{\operatorname{sh}\left[(\alpha_k + \alpha_s)\,T\right] - (\alpha_k + \alpha_s)\,T}{(\alpha_k + \alpha_s)^3\,T^3}\, e^{-\frac{\alpha_k+\alpha_s}{2}T}\right]^2 e^{-(\alpha_k+\alpha_s)T}. \tag{31}$$

Эксперимент

В проведенных экспериментах использовались пропускающие и отражательные решетки, изготовленные голографическим методом на фотопластинках ЛОИ-2. Запись решеток производилась двумя световыми пучками диаметром 10 мм, которые были сформированы из пучка лазера ЛГ-38 ($\lambda_0 = 0.63$ мкм). При исследовании дифракции света фотопластинка с решеткой устанавливалась вертикально в держателе, укрепленном на поворотном столике с угловой шкалой, и освещалась непосредственно лазерным пучком. Условия опытов обеспечивали ТЕ-поляризацию падающего на решетку пучка света. С помощью фотодиода ФД-7К, подключенного к микроамперметру М1210, регистрировались фототоки I_0, I_s, I_t, соответствующие падающему, дифрагированному и проходящему пучкам.

С целью определения поглощательной способности материала решетки использовалось «холостое пятно», находящееся на той же самой фотопластинке вблизи решетки. Холостое пятно получалось путем засветки фотопластинки каждым из пучков света, причем время засветки каждым пучком равнялось времени экспозиции при записи решетки. Величина αT определялась по измеренному отношению интенсивностей прошедшего пучка и нормально падающего исходного пучка в соответствии с выражением

$$\frac{I_t\,(\text{хол})}{I_0} = t^2(0)\, e^{-\alpha T}, \tag{32}$$

где $t(0) = 0.96$ — энергетический френелевский коэффициент прохождения границы среда—воздух при показателе преломления n, равном 1.5.

Учет преломляющих границ фотопластинки, согласно [1, 3], приводит к следующей связи фототоков, измеренных при выполнении условия Брэгга, с величинами $|E_t|^2/\,|E_0|^2$ и $\eta_{\text{Б}}$, определяемыми формулами (24), (25), (28) и (29)

$$\frac{I_t}{I_0} = t^2(\Phi)\left|\frac{E_t}{E_0}\right|^2; \tag{33}$$

$$\frac{I_s}{I_0} = \eta_{\text{эксп}}; \quad \eta_{\text{расч}} = t(\Phi)\, t(\Phi_s)\, \eta_{\text{Б}}. \tag{34}$$

Здесь $t(\Phi)$ и $t(\Phi_s)$ — энергетические коэффициенты прохождения границы среда—воздух, Φ — внешний угол Брэгга, Φ_s — угол выхода дифрагированного пучка. Углы Φ и Φ_s связаны с внутренними углами $\psi_k^{\text{Б}}$ и $\psi_s^{\text{Б}}$, от которых зависят величины α_k и α_s, законом Снеллиуса: $\sin\Phi = n \sin\psi_k^{\text{Б}}$, $\sin\Phi_s = n\sin\psi_s^{\text{Б}}$, где $n = 1.5$.

№ решетки	Φ, град	Φ_s, град	$\frac{I_s}{I_0}$, %	$\frac{I_t}{I_0}$	αT	ν^2	$\eta_{\text{расч}}$, %
1	18	18	10.8	0.40	0.59	0.26	12.1
2 {	45	0	14.0	0.24	0.73	0.34	13.9
	0	45	14.0	0.28	0.73	0.37	14.9

В таблице представлены экспериментальные и расчетные данные, относящиеся к двум характерным решеткам. Решетка 1 имела слои, почти параллельные ее поверхности, т. е. являлась отражательной. Решетка 2 была пропускающей со слоями, наклонными к поверхности, благодаря чему брэгговская дифракция наблюдалась при двух углах, указанных в таблице. Значения ν^2 вычислялись на основании формул (26), (27), (33). Вычисленные значения ν^2 были использованы для определения $\eta_{\text{расч}}$, согласно формулам (30), (31), (34). Из таблицы видно, что значения $\eta_{\text{эксп}}$ и $\eta_{\text{расч}}$ удовлетворительно согласуются между собой, что свидетельствует о соответствии экспериментальных и теоретических данных.

Сравнение результатов теории возмущения с формулами Когельника

Параметры ξ и ν, определяемые формулами (15) и (16), отличаются от аналогичных параметров ξ_k и ν_k, введенных в известной теории связанных волн Когельника [4]. В обозначениях настоящей работы в случае пропускающих решеток связь между ними имеет вид

$$\xi_k = -\xi\,\frac{1}{2}\left(1 + \frac{s_k}{k_z - Q_z}\right); \quad \nu_k = \nu\sqrt{\frac{s_z}{k_z - Q_z}}. \tag{35}$$

Дополнительные множители при ξ и ν становятся равными единице в брэгговском резонансе.

Амплитуда дифрагированной волны для пропускающей решетки, согласно [4] пропорциональна функции

$$F = \nu_k f(\xi_k, \nu_k); \; f(\xi_k, \nu_k) = \frac{\sin \sqrt{\xi_k^2 + \nu_k^2}}{\sqrt{\xi_k^2 + \nu_k^2}}. \tag{36}$$

Разложение $f(\xi_k, \nu_k)$ в ряд Маклорена по параметру ν_k^2 приводит к полученному выше выражению (16) при замене: $\nu_k \to \nu$, $\xi_k \to \xi$. Ясно, что дифракционные эффективности, рассчитанные на основе теории возмущения и теории связанных волн Когельника при малой величине ν_k, будут совпадать лишь в брэгговском резонансе, когда $\nu_k = \nu$ и $\xi_k = \xi = 0$ (поглощение отсутствует).

Таким образом, формулы Когельника вне брэгговского резонанса переходят в формулы электродинамической теории возмущений только при замене ν_k на ν и ξ_k на ξ.

Литература

[1] О. В. Константинов, М. М. Панахов, Ю. Ф. Романов. Опт. и спектр., *46*, 979, 1979.

[2] О. В. Константинов, Ю. Ф. Романов, А. Ф. Рыхлов. Опт. и спектр., *50*, 95, 1981.

[3] О. В. Константинов, Ю. Ф. Романов, А. Ф. Рыхлов. ЖТФ, *51*, 239, 1981.

[4] H. Kogelnik. Bull. Syst. Tech. J., *48*, 2909, 1969.

Поступило в Редакцию 8 июля 1981 г.