

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ СЕТИ ОБСЛУЖИВАНИЯ СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ ПОТОКОВ ОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЗАЯВОК И ОГРАНИЧЕНИЕМ НА ВРЕМЯ ПРЕБЫВАНИЯ В УЗЛАХ

Н.Н. Бородин¹, Ю.В. Малинковский²

¹Гомельский государственный технический университет им. П.О. Сухого

²Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

EXPONENTIAL QUEUEING NETWORKS WITH COUNTABLE SET OF FLOWS OF NEGATIVE CUSTOMERS AND LIMITED SOJOURN TIME

N.N. Borodin¹, Yu.V. Malinkovsky²

¹Sukhoi State Technical University of Gomel

²Francisk Skorina Gomel State University

Аннотация. Рассматривается экспоненциальная сеть массового обслуживания с N однолинейными узлами. В сеть поступает пуассоновский поток запросов с параметром Λ и счетное число пуассоновских потоков отрицательных заявок с параметрами λ_l , $(l = \overline{1, \infty})$ соответственно. Входящий запрос с вероятностью p_l , а отрицательная заявка l -го потока с вероятностью q_{ll} направляются в i -й узел $\left(\sum_{l=1}^N p_l = \sum_{l=1}^N q_{ll} = 1, l = \overline{1, \infty}\right)$. Отрицательные заявки не обслуживаются. Заявка l -го потока при поступлении в i -й узел сразу удаляет ровно l запросов (при их наличии), и удаляет все запросы, если их число меньше l , $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$. Время пребывания запросов в узлах сети является случайной величиной, условное распределение которого при фиксированном числе запросов является показательным. Запросы, обслуженные в узлах, и запросы, покидающие узлы из-за завершения времени пребывания, могут оставаться запросами, становиться заявками l -го потока или покидать сеть.

Ключевые слова: сеть, отрицательная заявка, ограниченное время пребывания, стационарное распределение.

Для цитирования: Бородин, Н.Н. Экспоненциальные сети обслуживания со счетным числом потоков отрицательных заявок и ограничением на время пребывания в узлах / Н.Н. Бородин, Ю.В. Малинковский // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 39–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_39. – EDN: LHIIYJ

Abstract. An exponential queueing network with one-line nodes is considered. The network receives a Poisson flow of requests with a parameter Λ and a countable number of Poisson flows of negative customers with parameters λ_l , $(l = \overline{1, \infty})$, respectively. The incoming request with probability p_l and the negative customer of the l -th flow with probability q_{ll} are sent to the i -th node $\left(\sum_{l=1}^N p_l = \sum_{l=1}^N q_{ll} = 1, l = \overline{1, \infty}\right)$. Negative customers are not served. The customer of the l -th flow arriving at the i -th node, immediately deletes exactly l requests (if there are any), and deletes all the requests if their number is less than l , $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$. The sojourn time of requests in network nodes is a random variable with exponential conditional distribution for a fixed number of requests. The requests served at nodes and the requests leaving nodes for the sojourn time is over can remain requests, become customers of the l -th flow, or leave the network.

Keywords: network, negative customer, limited sojourn time, stationary distribution.

For citation: Borodin, N.N. Exponential queueing networks with countable set of flows of negative customers and limited sojourn time / N.N. Borodin, Yu.V. Malinkovskii // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 39–43. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_39 (in Russian). – EDN: LHIIYJ

1 Постановка задачи

Сеть массового обслуживания (СеМО) с конечным числом потоков отрицательных заявок исследована в статье [1]. В данной работе результаты [1] обобщаются на случай счетного числа потоков отрицательных заявок.

Исследуется СеМО, состоящая из N экспоненциальных узлов с единственным прибором обслуживания. Интенсивность обслуживания

прибором i -го узла равна μ_i , $i = \overline{1, N}$. В сеть извне поступают независимые пуассоновские потоки запросов и отрицательных заявок. При этом в i -й узел поступает поток запросов (запросы требуют обслуживания) с параметром Λp_i и счетное число потоков отрицательных заявок с параметрами $\lambda_l q_{ll}$ соответственно

$$\sum_{k=1}^N p_k = \sum_{k=1}^N q_{kl} = 1, \quad l = \overline{1, \infty}, \quad i = \overline{1, N}.$$

Заявки не требуют обслуживания. При поступлении заявки l -го потока в i -й узел она удаляет ровно l запросов (если таковые имеются) и удаляет все запросы, если их количество меньше l , $i = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$. После чего она исчезает не оказывая дальнейшего влияния. Время пребывания запроса в i -ом узле является случайной величиной. Условное распределение времени пребывания показательное с параметром $\frac{\nu_i}{n_i}$ (n_i – число

запросов в узле). При поступлении в пустой узел запрос сразу начинает обслуживаться. Заметим, что с интенсивностью ν_i покидает узел даже не закончив обслуживание. Число мест в очереди для запросов в узлах сети бесконечно. Предполагается, что запросы обслуживаются в узлах в порядке их поступления (FCFS). Запрос после обслуживания в i -ом узле попадает в j -й узел не меняя своего статуса запроса с вероятностью p_{ij}^+ , с вероятностью p_{ijl}^- становится заявкой l -го потока отрицательных заявок и с вероятностью p_{i0} покидает сеть ($i, j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$). Требуем выполнения условий:

$$\sum_{j=1}^N \left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} p_{ijl}^- \right) + p_{i0} = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Запрос не получивший обслуживание из за окончания времени пребывания в i -ом узле, направляется в j -й узел не меняя своего статуса запроса с вероятностью r_{ij}^+ , с вероятностью r_{ijl}^- становится заявкой l -го потока отрицательных заявок и с вероятностью r_{i0} покидает сеть ($i, j = \overline{1, N}$, $l = \overline{1, \infty}$). Требуем выполнения условий:

$$\sum_{j=1}^N \left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} r_{ijl}^- \right) + r_{i0} = 1, \quad i = \overline{1, N}.$$

Рассмотрим случайный вектор

$$\vec{n}(t) = (n_1(t), n_2(t), \dots, n_N(t)),$$

где $n_i(t)$ – число запросов в i -ом узле в момент времени t . Исходя из всех предположений, $\vec{n}(t)$ – многомерная цепь Маркова с непрерывным временем и пространством состояний $X = Z_+^N$, где $Z_+ = \{0, 1, \dots\}$.

Цель данной работы – установить условия эргодичности процесса $\vec{n}(t)$ и определить его финальное распределение.

2 Основной результат

Рассмотрим i -ый узел сети. Поместим его в фиктивную среду с пуассоновскими входящими потоками запросов и отрицательных заявок и теми же интенсивностями, что и потоки сети,

входящие в i -ый узел. Пусть λ_i^+ – интенсивность потока запросов, λ_{il}^- – интенсивности потоков отрицательных заявок ($l = \overline{1, \infty}$), $\tilde{n}_i(t)$ – число запросов в системе в момент времени t . Процесс $\tilde{n}_i(t)$ является Марковским с пространством состояний Z_+ . Найдем стационарное распределение процесса $\tilde{n}_i(t)$. Составим систему уравнений равновесия:

$$\begin{aligned} \lambda_i^+ p_i(n_i) &= \\ &= (\mu_i + \nu_i) p_i(n_i + 1) + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- p_i(n_i + l) \right), \quad (2.1) \\ n_i &= 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Подставим $p_i(n_i) = z_i^{n_i}$ в (2.1). Получим характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned} g(z_i) &= (\mu_i + \nu_i) z_i + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- z_i^l \right) - \lambda_i^+ = \\ &= \sum_{s=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^s \lambda_{is}^- z_i^l \right) + (\mu_i + \nu_i) z_i - \lambda_i^+ = 0. \quad (2.2) \end{aligned}$$

Будем предполагать, что

$$\sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^- < \infty, \quad i = \overline{1, N}.$$

Докажем, что при выполнении условия

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^-} < 1, \quad (2.3)$$

процесс $\tilde{n}_i(t)$ будет эргодическим. Действительно, $g(0) = -\lambda_i^+ < 0$ и, в силу (2.3),

$$g(1) = \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^- + (\mu_i + \nu_i) - \lambda_i^+ > 0.$$

Так как функция $g(z_i)$ непрерывна на отрезке $[0, 1]$, то для уравнения (2.2) существует корень $z_{i0} \in (0, 1)$. Следовательно, уравнение равновесия (2.1) имеет решение $p_i(n_i) = z_{i0}^{n_i}$. Учитывая нормировку $\sum_{n_i=0}^{\infty} p_i(n_i) = 1$, получаем:

$$p_i(n_i) = (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i}, \quad n_i = 0, 1, \dots \quad (2.4)$$

Далее воспользуемся эргодической теоремой Фостера [2]. При выполнении условия (2.3) уравнение (2.2) имеет корень $z_{i0} \in (0, 1)$, при этом (2.4) – частное решение системы уравнений равновесия (2.1). Сумма ряда равна единице:

$$\sum_{n_i=0}^{\infty} |p_i(n_i)| = \sum_{n_i=0}^{\infty} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = 1.$$

Значит, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1. Для эргодичности цепи Маркова $\tilde{n}_i(t)$ достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^-} < 1.$$

В этом случае стационарное распределение цепи имеет форму геометрического распределения $p_i(n_i) = (1 - z_{i0})z_{i0}^{n_i}$, $n_i = 0, 1, \dots$.

Всюду далее предполагается, что средняя интенсивность «вычеркивания» заявок во всех узлах конечна, т.е. выполняется условие

$$\sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^- < \infty, \quad i = \overline{1, N}.$$

Уравнение (2.2) при $z = z_{i0}$ принимает форму тождества

$$(\mu_i + \nu_i)z_{i0} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{is}^- z_{i0}^s \right) - \lambda_i^+ = 0, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.5)$$

При выполнении условий эргодичности

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} s\lambda_{is}^-} < 1, \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.6)$$

стационарное распределение изолированного узла имеет форму

$$p_i(n_i) = (1 - z_{i0})z_{i0}^{n_i}, \quad n_i = 0, 1, \dots, \quad i = \overline{1, N}. \quad (2.7)$$

Составим для сети систему уравнений трафика. Вероятность занятости прибора в i -м узле в стационарном режиме будет равна $1 - p_i(0) = z_{i0}$.

Поэтому:

$$\lambda_i^+ = \Lambda p_i + \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+), \quad i = \overline{1, N}, \quad (2.8)$$

$$\lambda_{il}^- = \lambda_i q_{il} + \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jil}^- + \nu_j r_{jil}^-), \quad (2.9)$$

$$i = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, \infty}.$$

Можно доказать, что система (2.8)–(2.9) имеет строго положительное решение.

Составим уравнения глобального равновесия для сети:

$$p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \left[\Lambda p_i + \left(\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} \right) I_{\{n_i \neq 0\}} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda p_i I_{\{n_i \neq 0\}} + \right. \quad (2.10)$$

$$+ p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_{i1} + (\lambda_{i2} + \lambda_{i3} + \dots) I_{\{n_i=0\}}] +$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_i q_{il} + (\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \dots) I_{\{n_i=0\}}] +$$

$$+ \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i) (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) I_{\{n_i \neq 0\}} + \right.$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) \times$$

$$\times (\mu_j (p_{jil}^- + (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) I_{\{n_i=0\}}) +$$

$$+ \nu_j (r_{jil}^- + (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots) I_{\{n_i=0\}})) +$$

$$\left. + p(\bar{n} + \bar{e}_j) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right.$$

$$\left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots) I_{\{n_i=0\}} \right\}, \quad \bar{n} \in Z_+^N.$$

Здесь $\bar{e}_i = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$, где i -я компонента равна единице, I_A – индикатор события A :

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{если событие } A \text{ произошло;} \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Покажем, что вероятности, задаваемые формулой

$$p(\bar{n}) = \prod_{i=1}^N p_i(n_i), \quad \bar{n} \in Z_+^N, \quad (2.11)$$

где $p_i(n_i)$ определяются формулой (2.7) при выполнении (2.6) удовлетворяют уравнениям (2.10).

Разобьем (2.10) на уравнения локального равновесия. Учтывая, что $I_{\{n_i=0\}} = 1 - I_{\{n_i \neq 0\}}$, приравняем слагаемые, содержащие множитель $I_{\{n_i \neq 0\}}$. Получим первое уравнение. Приравнявая слагаемые не содержащие множитель $I_{\{n_i \neq 0\}}$, получим второе уравнение

$$p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \left[\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda p_i - p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\lambda_i q_{i2} + \lambda_i q_{i3} + \dots] - \right.$$

$$- \sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \dots] + \quad (2.12)$$

$$+ \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i) (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \right.$$

$$- \sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) (\mu_j (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) +$$

$$+ \nu_j (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots)) -$$

$$- p(\bar{n} + \bar{e}_j) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) +$$

$$\left. \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots) \right] \right\}, \quad \bar{n} \in Z_+^N,$$

$$p(\bar{n}) \sum_{i=1}^N \Lambda p_i =$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_i q_{i1} + \lambda_i q_{i2} + \dots] + \right.$$

$$+ \sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i) [\lambda_i q_{il} + \lambda_i q_{il+1} + \dots] + \quad (2.13)$$

$$+ \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right.$$

$$+ \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) + p(\bar{n} + \bar{e}_j) (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) +$$

$$\left. \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots) \right] \right\}, \quad \bar{n} \in Z_+^N.$$

В (2.12) приравняем соответствующие слагаемые в суммах слева и справа:

$$p(\bar{n}) \left(\mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} \right) =$$

$$= p(\bar{n} - \bar{e}_i) \Lambda p_i - p(\bar{n} + \bar{e}_i) [\lambda_i q_{i2} + \lambda_i q_{i3} + \dots] -$$

$$\begin{aligned}
 & -\sum_{l=2}^{\infty} p(\bar{n} + l\bar{e}_i)[\lambda_i q_{il+1} + \lambda_i q_{il+2} + \dots] + \quad (2.14) \\
 & + \sum_{j=1}^N \left[p(\bar{n} + \bar{e}_j - \bar{e}_i)(\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \right. \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} p(\bar{n} + \bar{e}_j + l\bar{e}_i)(\mu_j (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) + \\
 & + \nu_j (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots)) - p(\bar{n} + \bar{e}_j)(\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \\
 & \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) \right], \quad \bar{n} \in Z_+^N, \quad i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

Очевидно, что из (2.13), (2.14) следует (2.10).

Разделим (2.14) на $p(\bar{n})$. Подставим (2.11) и используя (2.5), (2.8)–(2.9), получим:

$$\begin{aligned}
 & \mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_i q_{il} = \\
 & = \frac{\Lambda p_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} + \frac{1}{z_{i0}} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+) - \\
 & - \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0} z_{i0}^l (\mu_j (p_{jil+1}^- + p_{jil+2}^- + \dots) + \right. \\
 & \left. + \nu_j (r_{jil+1}^- + r_{jil+2}^- + \dots)) + z_{j0} (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right. \\
 & \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) \right] = \\
 & = \frac{\Lambda p_i}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} + \frac{\lambda_i^+ - \Lambda p_i}{z_{i0}} - \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{j=1}^N z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=l+1}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=l+1}^{\infty} r_{jis}^- \right) - \\
 & - \sum_{j=1}^N z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=1}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=1}^{\infty} r_{jis}^- \right) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} - \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) - \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} - \\
 & - \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) - \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{s=l+1}^{\infty} z_{i0}^l \lambda_i q_{is} - \\
 & - \frac{1}{z_{i0}} \sum_{l=2}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l+1}^{\infty} \lambda_i q_{is} - \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) = \\
 & = \frac{\lambda_i^+}{z_{i0}} - \frac{1}{z_{i0}} \left(\lambda_i^+ - (\mu_i + \nu_i) z_{i0} - z_{i0} \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{is}^- \right) - \\
 & - \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) = \mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_i q_{is},
 \end{aligned}$$

т. е. (2.14) выполняется.

Лемма 2.1. Для решений уравнений трафика (2.8)–(2.9) будет справедливо следующее тождество:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N z_{i0} (\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}) = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left(\Lambda p_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_i q_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) \right). \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

Действительно. Просуммируем (2.9) по $l = \overline{1, \infty}$, после чего полученное уравнение вместе с уравнением глобального равновесия (2.10) суммируем по $i = \overline{1, N}$. Учитываем, что

$$\begin{aligned}
 p_{i0} & = 1 - \sum_{j=1}^N \left(p_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} p_{jil}^- \right), \\
 r_{i0} & = 1 - \sum_{j=1}^N \left(r_{ij}^+ + \sum_{l=1}^{\infty} r_{jil}^- \right), \quad i = \overline{1, N}.
 \end{aligned}$$

В итоге получаем (2.15).

Далее разделим (2.13) на $p(\bar{n})$. Подставим в полученное равенство (2.11) и используя (2.5), (2.8)–(2.9), а также (2.15) получим:

$$\begin{aligned}
 & \sum_{i=1}^N \Lambda p_i = \sum_{i=1}^N \left\{ z_{i0} [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0} + \lambda_i q_{i1} + \lambda_i q_{i2} + \dots] + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=2}^{\infty} z_{i0}^l [\lambda_i q_{il} + \lambda_i q_{il+1} + \dots] + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0} z_{i0}^l (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + z_{j0} (\mu_j (p_{jil}^- + p_{jil+1}^- + \dots) + \nu_j (r_{jil}^- + r_{jil+1}^- + \dots)) \right] \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ z_{i0} [\mu_i p_{i0} + \nu_i r_{i0}] + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_i q_{is} + \right. \\
 & \left. + \sum_{j=1}^N \left[\sum_{l=1}^{\infty} z_{j0} z_{i0}^l \left(\mu_j \sum_{s=l}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=l}^{\infty} r_{jis}^- \right) + \right. \right. \\
 & \left. \left. + z_{j0} \left(\mu_j \sum_{s=1}^{\infty} p_{jis}^- + \nu_j \sum_{s=1}^{\infty} r_{jis}^- \right) \right] \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda p_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_i q_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_i q_{is} + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) + \right. \\
 & \left. + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^N z_{j0} (\mu_j p_{jis}^- + \nu_j r_{jis}^-) \right\} = \\
 & = \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda p_i - \lambda_i^+ + \sum_{l=1}^{\infty} (\lambda_i q_{il} - \lambda_{il}^-) + z_{i0} (\mu_i + \nu_i) + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_i q_{is} + \right. \\
 & \left. + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) + \sum_{s=1}^{\infty} (\lambda_{is}^- - \lambda_i q_{is}) \right\} =
 \end{aligned}$$

$$= \sum_{i=1}^N \left\{ \Lambda p_i - \lambda_i^+ + z_{i0}(\mu_i + \nu_i) + \sum_{l=1}^{\infty} z_{i0}^l \sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- \right\} = \begin{cases} \lambda_i^+ = \Lambda_i + \sum_{j=1}^N z_{j0}(\mu_j p_{ji}^+ + \nu_j r_{ji}^+), & i = \overline{1, N}; \\ \lambda_{il}^- = \lambda_{il} + \sum_{j=1}^N z_{j0}(\mu_j p_{jil}^- + \nu_j r_{jil}^-), & i = \overline{1, N}, l = \overline{1, \infty}. \end{cases}$$

т.е. (2.13) также выполняется.

Очевидно, что многомерная цепь Маркова $\vec{n}(t)$ является неприводимой и консервативной. Так как интенсивности выхода из состояний ограничены сверху

$$q(\vec{n}) \leq \sum_{i=1}^N \left[\Lambda_i + \mu_i + \nu_i + \sum_{l=1}^{\infty} \lambda_{il} \right],$$

то цепь регулярна. Доказано, что (2.11) является решением (2.10). При выполнении условий эргодичности (2.6) ряд

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{n} \in X} p(\vec{n}) &= \sum_{\vec{n} \in X} \prod_{i=1}^N p_i(n_i) = \\ &= \sum_{\vec{n} \in X} \prod_{i=1}^N (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = \sum_{n_1=1}^{\infty} \dots \sum_{n_N=1}^{\infty} \prod_{i=1}^N (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = \\ &= \prod_{i=1}^N \sum_{n_i=0}^{\infty} (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i} = 1. \end{aligned}$$

Значит, вероятности, задаваемые формулой (2.11) будут эргодическим распределением многомерного процесса $\vec{n}(t)$. Тем самым имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. При выполнении условий

$$\rho_i = \frac{\lambda_i^+}{\mu_i + \nu_i + \sum_{s=1}^{\infty} s \lambda_{is}^-} < 1, \quad i = \overline{1, N}$$

цепь Маркова $\vec{n}(t)$ эргодическая, а ее единственное стационарное распределение имеет форму произведения $p(\vec{n}) = \prod_{i=1}^N p_i(n_i)$, $\vec{n} \in Z_+^N$ с множителями $p_i(n_i) = (1 - z_{i0}) z_{i0}^{n_i}$, $n_i = 0, 1, \dots$, $i = \overline{1, N}$, где $z_{i0} \in (0, 1)$, $i = \overline{1, N}$ – корни уравнений

$$(\mu_i + \nu_i) z_{i0} + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{s=l}^{\infty} \lambda_{is}^- z_{i0}^s \right) - \lambda_i^+ = 0, \quad i = \overline{1, N},$$

а $\{\lambda_i^+, \lambda_{il}^-, i = \overline{1, N}, l = \overline{1, \infty}\}$ – решение системы уравнений графика

Заключение

В работе исследована открытая сеть массового обслуживания со счетным числом экспоненциальных потоков отрицательных заявок, поступающих в узлы сети. Матрицы маршрутизации обслуженных запросов и запросов, не дожидавшихся обработки, различны. Предполагается, что средняя интенсивность потоков отрицательных заявок поступающих в узлы конечна. Найдены условия эргодичности случайного Марковского процесса, описывающего функционирование сети. Получено стационарное распределение этого процесса, имеющее форму произведения.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Малинковский, Ю.В.* Сети массового обслуживания с конечным числом потоков отрицательных заявок и с ограниченным временем пребывания / Ю.В. Малинковский, Н.Н. Бородин // Проблемы физики, математики и техники. – 2018. – № 1 (34). – С. 64–68.
2. *Бочаров, П.П.* Теория массового обслуживания / П.П. Бочаров, А.В. Печинкин. – Москва: РУДН, 1995. – 529 с.
3. *Гихман, И.И.* Введение в теорию случайных процессов / И.И. Гихман, А.В. Скороход. – Москва: Наука, 1977. – 568 с.
4. *Gelenbe, E.* Product-form Queueing Networks with Negative and Positive Customers. / E. Gelenbe // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol .28. – P. 656–663.

Поступила в редакцию 11.05.2023.

Информация об авторах

Бородин Николай Николаевич – старший преподаватель
Малинковский Юрий Владимирович – д.ф.-м.н., профессор