МАТЕМАТИКА

УДК 512.548

DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_47
EDN: OEPOEU

СТЕПЕНИ ЭЛЕМЕНТОВ В *l*-АРНЫХ ГРУППАХ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА. I

А.М. Гальмак

Белорусский государственный университет пищевых и химических технологий, *Могилёв*

POWERS IN *l*-ARY GROUPS OF A SPECIAL FORM. I

A.M. Gal'mak

Belarusian State University of Food and Chemical Technologies, *Mogilev*

Аннотация. Изучаются степени элементов в полиадических группах специального вида, то есть в полиадических группах с l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, которая называется полиадической операцией специального вида и определяется на декартовой степени A^k n-арной группы $< A, \eta >$ с помощью подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$, удовлетворяющей условию $\sigma^l = \sigma$, *и n-арной операции* η.

Ключевые слова: *полиадическая операция*, *n-арная группа*, *степень элемента*.

Для цитирования: *Гальмак*, *А.М.* Степени элементов в l-арных группах специального вида. I / А.М. Гальмак // Проблемы физики, математики и техники. – 2023. – № 2 (55). – С. 47–51. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_47. – EDN: OEPOEU

Abstract. The article deals with powers in polyadic groups of a special form, that is in polyadic groups with l-ary operation $\eta_{s,\sigma,k}$, that is called polyadic operation of a special form and is defined on Cartesian power of A^k n-ary group $< A, \eta >$ by substitution $\sigma \in \mathbf{S}_k$ and n-ary operation η.

Keywords: *polyadic operation*, *n-ary group*, *power*.

For citation: Gal'mak, A.M. Powers in l-ary groups of a special form. I / A.M. Gal'mak // Problems of Physics, Mathematics and Technics. – 2023. – № 2 (55). – P. 47–51. – DOI: https://doi.org/10.54341/20778708_2023_2_55_47 (in Russian). – EDN: OEPOEU

Введение

Полиадическим группоидом специального вида называют [1] универсальную алгебру $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ с одной l-арной операцией $\eta_{s,\sigma,k}$, где $l = s(n-1) + 1$, $n \geq 2$, $s \geq 1$, $k \geq 2$, которая определяется на декартовой степени A^k n-арного группоида $< A, \eta >$ с помощью подстановки σ множества $\{1, \ldots, k\}$.

Если $< A, \eta >$ – n-арная группа,

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{ik}) \in A^k, \ i = 1, 2, \ldots, l,$$

то l-арная операция $\eta_{s,\sigma,k}$ может быть определена следующим образом:

$$\eta_{s,\sigma,k}(\mathbf{x}_1 \ldots \mathbf{x}_l) = (y_1, \ldots, y_k),$$

где для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ j-ая компонента y_j находится по формуле

$$y_j = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{(s(n-1)+1)\sigma^{s(n-1)}(j)}) = \eta(x_{1j}x_{2\sigma(j)} \ldots x_{l\sigma^{l-1}(j)}).$$

Частными случаями ($n = 2$) полиадической операции $\eta_{s,\sigma,k}$ являются l-арная операция $[\ ]_{l,\sigma,k}$, которая первоначально была определена в [2] для любых целых $k \geq 2$, $l \geq 2$ и любой подстановки $\sigma \in \mathbf{S}_k$ на k-ой декартовой степени A^k полугруппы A, а также две полиадические операции Э. Поста [3], которые являются частными случаями l-арной операции $[\ ]_{l,\sigma,k}$.

В [4] было доказано, что если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то l-арный группоид $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ является l-арной группой.

В данной статье доказываются результаты, позволяющие для каждого элемента $\mathbf{a}$ l-арной группы $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ специального вида находить его степени $\mathbf{a}^{[v]}$, компоненты которых выражаются через компоненты элемента $\mathbf{a}$ с помощью n-арной операции η n-арной группы, на декартовой степени которой построена указанная l-арная группа.

1 Предварительные сведения

Информацию, приведённую в этом разделе, можно найти в книгах [5]–[8].

Согласно Э. Посту [3], последовательность $e_1 \ldots e_{s(n-1)}$, где $s \geq 1$, элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называется *нейтральной*, если

$$\eta(e_1 \ldots e_{s(n-1)}x) = \eta(xe_1 \ldots e_{s(n-1)}) = x$$

для любого $x \in A$.

Это определение обобщает на n-арный случай определение единицы группы A как элемента $e \in A$ такого, что

$$ex = xe = x$$

для любого $x \in A$. Существуют и другие обобщения единицы группы (см., например, [7]).

Согласно Э. Посту [3], последовательность β элементов n-арной группы $< A, \eta >$ называется *обратной* к последовательности α элементов этой же n-арной группы, если последовательности $\alpha\beta$ и $\beta\alpha$ являются нейтральными.

Одноэлементную обратную последовательность $b \in A$ для последовательности α естественно называть обратным элементом для этой последовательности.

Согласно В. Дёрнте [9], элемент b n-арной группы $< A, \eta >$ называется *косым* элементом для элемента $a \in A$, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ верно

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1} b \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a.$$

Если b косой элемент для элемента a, то употребляют обозначение $b = \overline{a}$. Таким образом, по определению

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1} \overline{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-i}) = a, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

***Замечание* 1.1.** Можно показать (см., например, [6]), что:

1) *для того, чтобы последовательность $e_1 \ldots e_{s(n-1)}$ являлась нейтральной в n-арной группе $< A, \eta >$, достаточно выполнения для некоторого $a \in A$ одного из следующих равенств*

$$\eta(e_1 \ldots e_{s(n-1)}a) = a, \; \eta(ae_1 \ldots e_{s(n-1)}) = a;$$

2) *для того, чтобы последовательность β являлась обратной к последовательности α в n-арной группе $< A, \eta >$, достаточно нейтральности одной из последовательностей $\alpha\beta$, $\beta\alpha$;*

3) *для того, чтобы элемент b n-арной группы $< A, \eta >$ являлся косым для $a \in A$, достаточно выполнения равенства из определения косого элемента только для некоторого $i = 1, 2, \ldots, n$.*

4) *для любого элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ его косой элемент $\overline{a}$ является обратным для последовательности $\underbrace{a \ldots a}_{n-2}$, а последовательности $\overline{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-2}$ и $\underbrace{a \ldots a}_{n-2} \overline{a}$ являются нейтральными.*

5) *если $n \geq 3$, то для любого элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ и любого $i = 0, 1, \ldots, n-3$ последовательность*

$$\underbrace{a \ldots a}_{i} \overline{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-i-3}$$

является обратной для a. В частности, обратными для a являются последовательности $\overline{a} \underbrace{a \ldots a}_{n-3}$ и $\underbrace{a \ldots a}_{n-3} \overline{a}$.

6) *любой элемент a n-арной группы $< A, \eta >$ перестановочен со своим косым элементом $\overline{a}$.*

***Лемма* 1.1.** [6, предложение 1.2.20]. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ – последовательности, составленные из элементов n-арной группы $< A, \eta >$, и пусть $\beta_1, \ldots, \beta_r$ – последовательности, обратные соответственно данным. Тогда $\beta_r \ldots \beta_1$ – обратная последовательность для последовательности $\alpha_1 \ldots \alpha_r$.*

Согласно Э. Посту [3], *ν-ой n-адической степенью* элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ называется элемент этой же n-арной группы, обозначаемый символом $a^{[\nu]}$ и определяемый следующим образом:

$$a^{[\nu]} = a, \text{ если } \nu = 0;$$

$$a^{[\nu]} = \eta(\underbrace{a \; \ldots \; a}_{\nu(n-1)+1}), \text{ если } \nu > 0;$$

$a^{[\nu]}$ – решение уравнения $\eta(x \underbrace{a \; \ldots \; a}_{-\nu(n-1)}) = a$, если $\nu < 0$.

Таким образом, если $\nu < 0$, то

$$\eta(a^{[\nu]} \underbrace{a \; \ldots \; a}_{-\nu(n-1)}) = a.$$

Используя нейтральность последовательности $a^{[\nu]} \underbrace{a \; \ldots \; a}_{-\nu(n-1)-1}$ и сформулированное выше утверждение 2), можно убедиться в том, что в случае $\nu < 0$ верно не только предыдущее равенство, но и равенство

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1} a^{[\nu]} \underbrace{a \; \ldots \; a}_{-\nu(n-1)-i+1}) = a$$

для любого $i = 1, 2, \ldots, -\nu(n-1)+1$. Отсюда в силу однозначной разрешимости в n-арной группе $< A, \eta >$ уравнения

$$\eta(\underbrace{a \ldots a}_{i-1} x \underbrace{a \; \ldots \; a}_{-\nu(n-1)-i+1}) = a,$$

следует, что если $\nu < 0$, то n-адическую степень $a^{[\nu]}$ элемента a n-арной группы $< A, \eta >$ можно определить как решение последнего уравнения. В частности, как решение уравнения

$$\eta(\underbrace{a \; \ldots \; a}_{-\nu(n-1)} x) = a.$$

Ясно, что $a^{[-1]} = \overline{a}$.

В статье существенно используется следующая теорема.

***Теорема* 1.1** [4]. *Если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ – l-арная группа.*

2 Основной результат

Согласно теореме 1.1, если $< A, \eta >$ – n-арная группа, подстановка σ удовлетворяет условию $\sigma^l = \sigma$, то $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ l-арная группа. Укажем для каждого элемента этой l-арной группы его ν-ую l-адическую степень, предварительно сделав

***Замечание* 2.1.** Так как для l-арной группы $< A^k, \eta_{s, \sigma, k} >$ верно равенство

$$l - 2 = s(n-1) - 1,$$

то всякая обратная последовательность в n-арной группе $< A, \eta >$ для последовательности α_j длины $l - 2$ эквивалентна в смысле Поста одному и тому же элементу α_j^{-1} этой же n-арной группы, который естественно называть обратным элементом для последовательности α_j. Ясно также, что любая обратная последовательность a_j^{-1} в n-арной группе $< A, \eta >$ для элемента a_j эквивалентна в смысле Поста некоторой последовательности длины $n - 2$.

***Теорема* 2.1.** *Пусть* $< A, \eta >$ *– n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *– произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)},\ j = 1, \ldots, k, \qquad (2.1)$$

a_j^{-1} *и* α_j^{-1} *– любая обратная последовательность и обратный элемент в* $< A, \eta >$ *для элемента* a_j *и последовательности* α_j *соответственно. Тогда ν-ая l-адическая степень* $\mathbf{a}^{[\nu]}$ *элемента* $\mathbf{a}$ *имеет вид* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = a_j,\ \textit{если}\ \nu = 0;$$

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{\nu}),\ \textit{если}\ \nu > 0; \qquad (2.2)$$

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1}),\ \textit{если}\ \nu < -1, \qquad (2.3)$$

$$b_j = \alpha_j^{-1},\ \textit{если}\ \nu = -1, \qquad (2.4)$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a},\ \textit{если}\ \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{\nu}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{\nu})),\ \textit{если}\ \nu > 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1} \underbrace{a_1^{-1}\alpha_1^{-1} \ldots a_1^{-1}\alpha_1^{-1}}_{-\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1} \underbrace{a_k^{-1}\alpha_k^{-1} \ldots a_k^{-1}\alpha_k^{-1}}_{-\nu-1})),\ \textit{если}\ \nu < -1.$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_k^{-1}),\ \textit{если}\ \nu = -1.$$

Доказательство. Для ν = 0 доказывать нечего. Если ν > 0, то положим

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathrm{a} \ \ldots \ \mathrm{a}}_{\nu(l-1)+1}) = (b_1, \ldots, b_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, тождественность подстановки σ^{l-1} и равенство (2.1), получим

$$b_j = \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}$$

$$\underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}$$

$$a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{\nu}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{\nu}),$$

то есть верно (2.2) для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$.

Пусть теперь ν < – 1 и положим

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathrm{a} \ldots \mathrm{a}}_{-\nu(l-1)}(b_1, \ldots, b_k)) = (c_1, \ldots, c_k).$$

Из этого равенства, принимая во внимание определение l-арной операции $\eta_{s,\sigma,k}$, тождественность подстановки σ^{l-1}, равенства (2.1) и (2.3) и нейтральность последовательностей $a_j a_j^{-1}$ и $\alpha_j \alpha_j^{-1}$, получим

$$c_j = \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)} \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_{\sigma^{l-1}(j)}}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_{\sigma^{l-1}(j)}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j \ldots a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} a_j}_{-\nu-1}$$

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)} b_j) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-\nu-1} \alpha_j\ \eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1})) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-\nu-1} \alpha_j\ \alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1}) =$$

$$= \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-\nu-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1}) = \ldots$$

$$\ldots = \eta(a_j \alpha_j^{-1}\alpha_j^{-1}) = a_j,$$

то есть $c_j = a_j$ для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$. Следовательно,

$$\eta_{s,\sigma,k}(\underbrace{\mathrm{a} \ldots \mathrm{a}}_{-\nu(l-1)}(b_1, \ldots, b_k)) = \mathbf{a},$$

то есть $(b_1, \ldots, b_k) = \mathrm{a}^{[\nu]}$.

Случай ν = – 1 доказывается также как и случай ν < – 1, при этом вместо (2.3) применяется (2.4) и учитывается пустота последовательностей

$$\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-\nu-1}\ \text{и}\ \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1}. \qquad \square$$

***Замечание* 2.2.** Понятно, что равенства (2.2) и (2.3) могут быть переписаны следующим образом

$$b_j = \eta(\underbrace{a_j\alpha_j \ldots a_j\alpha_j}_{\nu} a_j),\ \text{если}\ \nu > 0,$$

$$b_j = \eta(\underbrace{\alpha_j^{-1}a_j^{-1} \ldots \alpha_j^{-1}a_j^{-1}}_{-\nu-1} \alpha_j^{-1}),\ \text{если}\ \nu < 0.$$

***Замечание* 2.3.** Так как

$$\eta(\alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1}) \sim \alpha_j^{-1} \underbrace{a_j^{-1}\alpha_j^{-1} \ldots a_j^{-1}\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1} \sim$$

$$\sim (\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-\nu-1} \alpha_j)^{-1},$$

где символом ~ обозначено отношение эквивалентности Поста, то элемент b_j в (2.3) является обратным в n-арной группе $< A, \eta >$ для последовательности

$$\underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{-\nu-1} \alpha_j.$$

Так как $\mathrm{a}^{[-1]} = \overline{\mathrm{a}}$, то из теоремы 2.1 при ν = – 1 вытекает следующий результат из [10] о косых элементах.

***Следствие* 2.1** [10]. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *элемент* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где* b_j – *обратный элемент в* $< A, \eta >$ *для последовательности*

$$a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}, j = 1, \ldots, k,$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть* $\overline{\mathrm{a}} = (b_1, \ldots, b_k)$.

Если в теореме 2.1 $n \geq 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в n-арной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять последовательность

$$a_j^{-1} = \overline{a_j}\ \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}.$$

Кроме того, в силу леммы 2.1, обратный элемент в $< A, \eta >$ для последовательности α_j имеет вид

$$\alpha_j^{-1} = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}}\ \ldots$$

$$\ldots\ \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}\ ).$$

В этом случае формулировка теоремы 2.1 для $\nu < -1$ принимает следующий вид.

***Теорема* 2.2.** *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* $(n \geq 3)$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$, $\nu < -1$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$u_j = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}}\ \ldots$$

$$\ldots\ \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}\ ),\ j = 1, \ldots, k.$$

Тогда элемент $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\underbrace{u_j\, \overline{a}_j\, \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}\, u_j \ldots \overline{a}_j\, \underbrace{a_j \ldots a_j}_{n-3}\, u_j}_{-\nu-1}\ ),$$

является ν-*ой l-адической степенью элемента* $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\underbrace{u_1\, \overline{a}_1\, \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}\, u_1 \ldots \overline{a}_1\, \underbrace{a_1 \ldots a_1}_{n-3}\, u_1}_{-\nu-1}\ ),$$

$$\ldots,$$

$$\eta(\underbrace{u_k\, \overline{a}_k\, \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}\, u_k \ldots \overline{a}_k\, \underbrace{a_k \ldots a_k}_{n-3}\, u_k}_{-\nu-1}\ )).$$

Если в теореме 2.1 $n \geq 3$, $\nu = -1$, то элемент b_j в (2.4) совпадает с элементом u_j из теоремы 2.2. Поэтому ввиду равенства $\mathrm{a}^{[-1]} = \overline{\mathrm{a}}$, из теоремы 2.1 вытекает следующий результат из [10] о косых элементах.

***Следствие* 2.2** [10]. *Пусть* $< A, \eta >$ – *n-арная группа* $(n \geq 3)$, *подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^l = \sigma$. *Тогда для любого элемента* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ *l-арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ *элемент* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(j)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(j)}}\ \ldots$$

$$\ldots\ \underbrace{a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma(j)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(j)}}\ ),\ j = 1, \ldots, k,$$

является косым для $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\overline{\mathrm{a}} = (\eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(1)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(1)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(1)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(1)} \ldots a_{\sigma(1)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(1)}}\ ),$$

$$\ldots,$$

$$\eta(\underbrace{a_{\sigma^{l-2}(k)} \ldots a_{\sigma^{l-2}(k)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma^{l-2}(k)}}\ \ldots\ \underbrace{a_{\sigma(k)} \ldots a_{\sigma(k)}}_{n-3}\ \overline{a_{\sigma(k)}}\ )).$$

***Замечание* 2.4.** В [10] отмечено, что формулы в следствии 2.2 корректны, так как

$$(l-2)(n-2) = (s(n-2)-1)(n-1)+1.$$

***Замечание* 2.5.** В теоремах 2.1 и 2.2 и в следствиях 2.1 и 2.2 в качестве подстановки σ можно взять подстановку порядка $l - 1$.

Тернарный случай. Если в теореме 2.1 положить $n = 3$, то в качестве обратной последовательности a_j^{-1} в тернарной группе $< A, \eta >$ для её элемента a_j можно взять его косой элемент $\overline{a_j}$. В результате получим следствие для $\nu < 0$, которое вытекает также и из теоремы 2.2.

***Следствие* 2.3**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$, $\nu < -1$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s+1)$-*арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{2s-1}(j)},\ j = 1, \ldots, k,$$

α_j^{-1} – *обратный элемент в* $< A, \eta >$ *для последовательности* α_j. *Тогда элемент* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = \eta(\alpha_j^{-1}\ \underbrace{\overline{a}_j\alpha_j^{-1} \ldots \overline{a}_j\alpha_j^{-1}}_{-\nu-1}),$$

является ν-*ой* $(2s+1)$-*адической степенью элемента* $\mathbf{a}$, *то есть*

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\alpha_1^{-1}\ \underbrace{\overline{a}_1\alpha_1^{-1} \ldots \overline{a}_1\alpha_1^{-1}}_{-\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\alpha_k^{-1}\ \underbrace{\overline{a}_k\alpha_k^{-1} \ldots \overline{a}_k\alpha_k^{-1}}_{-\nu-1})).$$

***Замечание* 2.6.** Если $s \geq 2$, то в тернарной группе $< A, \eta >$ последовательность α_j в следствии 2.3 эквивалентна в смысле Поста элементу $\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{2s-1}(j)})$. Поэтому можно считать

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{2s-1}(j)}),$$

соответственно

$$\alpha_j^{-1} = \overline{\alpha_j} = \overline{\eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{2s-1}(j)})}.$$

Поэтому следствие 2.3 можно переформулировать следующим образом, включив в неё случаи $\nu \geq 0$ и $\nu = -1$.

***Следствие* 2.4**. *Пусть* $< A, \eta >$ – *тернарная группа, подстановка* $\sigma \in \mathbf{S}_k$ *удовлетворяет условию* $\sigma^{2s+1} = \sigma$, $s \geq 2$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_k)$ – *произвольный элемент* $(2s+1)$-*арной группы* $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$,

$$\alpha_j = \eta(a_{\sigma(j)} \ldots a_{\sigma^{2s-1}(j)}),\ j = 1, \ldots, k.$$

Тогда ν*-ая* $(2s+1)$*-адическая степень* $\mathbf{a}^{[\nu]}$ *элемента* $\mathbf{a}$ *имеет вид* $(b_1, \ldots, b_k)$, *где*

$$b_j = a_j, \text{ если } \nu = 0;$$

$$b_j = \eta(a_j \underbrace{\alpha_j a_j \ldots \alpha_j a_j}_{\nu}), \text{ если } \nu > 0;$$

$$b_j = \eta(\overline{\alpha_j}\ \underbrace{\overline{a_j\alpha_j} \ldots \overline{a_j\alpha_j}}_{-\nu-1}), \text{ если } \nu < -1;$$

$$b_j = \overline{\alpha_j}, \text{ если } \nu = -1,$$

то есть

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = \mathbf{a}, \text{ если } \nu = 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(a_1 \underbrace{\alpha_1 a_1 \ldots \alpha_1 a_1}_{\nu}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(a_k \underbrace{\alpha_k a_k \ldots \alpha_k a_k}_{\nu})), \text{ если } \nu > 0;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\eta(\overline{\alpha_1}\ \underbrace{\overline{a_1\alpha_1} \ldots \overline{a_1\alpha_1}}_{-\nu-1}), \ldots$$

$$\ldots, \eta(\overline{\alpha_k}\ \underbrace{\overline{a_k\alpha_k} \ldots \overline{a_k\alpha_k}}_{-\nu-1})). \text{ если } \nu < -1;$$

$$\mathbf{a}^{[\nu]} = (\overline{\alpha_1}, \ldots, \overline{\alpha_k}). \text{ если } \nu = -1.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гальмак*, *А.М.* О полиадических операциях на декартовых степенях / А.М. Гальмак, А.Д. Русаков / Известия Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины. – 2014. – № 3 (84). – С. 35–40.

2. *Гальмак*, *А.М.* Многоместные операции на декартовых степенях / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2009. – 265 с.

3. *Post*, *E.L.* Polyadic groups / E.L. Post // Trans. Amer. Math. Soc. – 1940. – Vol. 48, №2. – P. 208–350.

4. *Гальмак*, *А.М.* О разрешимости уравнений в $< A^k, \eta_{s,\sigma,k} >$ / А.М. Гальмак // Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2018. – № 1 (51). – С. 4–10.

5. *Русаков*, *С.А.* Алгебраические n-арные системы / С.А. Русаков. – Мінск: Навука і тэхніка, 1992. – 245 с.

6. *Гальмак*, *А.М.* n-Арные группы. Часть 1 / А.М. Гальмак. – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2003. – 202 с.

7. *Гальмак*, *А.М.* n-Арные группы. Часть 2 / А.М. Гальмак. – Минск: Изд. центр БГУ, 2007. – 324 с.

8. *Щучкин*, *Н.А.* Введение в теорию n-групп / Н.А. Щучкин. – Волгоград: Принт, 2019. – 236 с.

9. *Dörnte*, *W.* Untersuchungen über einen verallgemeinerten Gruppenbegrieff / W. Dörnte // Math. Z. – 1928. – Bd. 29. – S. 1–19.

10. *Гальмак*, *А.М.* Косые элементы в полиадических группах специального вида / А.М. Гальмак, Ю.И. Кулаженко, М.В. Селькин / Веснік МДУ ім. А.А. Куляшова. – 2020. – № 2 (56). – С. 13–20.

Поступила в редакцию 16.05.2023.

Информация об авторах
Гальмак Александр Михайлович – д.ф.-м.н., профессор