

УДК 535.39 : 532.783

НАКЛОННОЕ ПАДЕНИЕ СВЕТА НА СЛОИ ХОЛЕСТЕРИЧЕСКОГО ЖИДКОГО КРИСТАЛЛА

Муравский А. А., Хапалюк А. П., Рачкевич В. С., Комяк А. И.

Теоретически получены формулы, описывающие отражение света и спектральную зависимость оптического вращения в случае π - и σ -поляризаций для произвольных углов падения света на слой холестерического жидкого кристалла. Проведенное сравнение теории с данными эксперимента хорошо подтверждает правильность теоретических выводов.

Наиболее естественный способ описания оптических свойств холестерических жидких кристаллов (ХЖК) заключается в решении уравнений Максвелла (с соответствующими задаче граничными условиями), в которых оптические свойства ХЖК в декартовых координатах описываются тензором диэлектрической проницаемости [1]

$$\epsilon = \bar{\epsilon} \begin{pmatrix} 1 + \delta \cos 2\tau z & \delta \sin 2\tau z & 0 \\ \delta \sin 2\tau z & 1 - \delta \cos 2\tau z & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \delta \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $\delta = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$, $\epsilon = (\epsilon_1 + \epsilon_2)/2$, $\tau = 2\pi/p$, а ϵ_1 и ϵ_2 — главные значения тензора диэлектрической проницаемости, p — шаг спирали. Имеющиеся теоретические работы [2, 3], рассматривающие прохождение света при нормальном падении, хорошо согласуются с множеством экспериментальных данных. Случай наклонного падения более сложен для анализа, так как точное решение уравнений Максвелла здесь неизвестно [4]. Он рассматривался либо численно [5], либо аналитически в различных приближениях [6, 7]. При этом следует отметить, что громоздкость получаемых результатов затрудняет анализ малочисленных экспериментальных данных. В то же время для разработки устройств отображения информации, работающих в режиме перехода холестерик—нематик и использующих ХЖК, настоятельно требуется детальное изучение случая произвольных углов падения.

Целью данной работы является теоретический анализ отражения и гиротропии ХЖК при наклонном падении света. Полученные теоретические результаты подтверждаются известными экспериментальными данными [5, 8].

Запишем получаемое из уравнений Максвелла волновое уравнение

$$\Delta E - \nabla(\nabla \cdot E) + \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon E = 0. \quad (2)$$

Задавая распространение света ХЖК в плоскости XOZ , уравнение (2) для компонент E_x и E_y (после исключения E_z) переходит к системе уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 E_x}{dz^2} + k_z'^2 E_x + \frac{\delta k_z^2}{2} [(e^{2i\tau z} + e^{-2i\tau z}) E_x - i(e^{2i\tau z} - e^{-2i\tau z}) E_y] &= 0, \\ \frac{d^2 E_y}{dz^2} + k_z^2 E_y + \frac{\delta k_0^2}{2} [-i(e^{2i\tau z} - e^{-2i\tau z}) E_x - (e^{2i\tau z} + e^{-2i\tau z}) E_y] &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

где $k_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon}$, ω — частота распространяющегося в среде света, $k_z'^2 = k_z^2 \times \left(1 + \frac{\delta k_k^2}{k_z^2 - \delta k_0^2}\right)^{-1}$. Как было показано в ряде экспериментальных работ [1, 5],

параметр δ для холестерических жидких кристаллов мал ($0.01 \div 0.2$). Это позволяет для таких кристаллов применить теорию возмущений. Так как $\delta \ll 1$, то решение ищется в виде

$$E_x = E_{x0} + \delta E_{x1} + \delta^2 E_{x2} + \dots, \quad E_y = E_{y0} + \delta E_{y1} + \delta^2 E_{y2} + \dots \quad (4)$$

В нулевом приближении решениями являются плоские волны $E_{x0} = A_1 e^{ik'_z z} + A_2 e^{-ik'_z z}$, $E_{y0} = B_1 e^{ik_z z} + B_2 e^{-ik_z z}$, где A_1 , A_2 , B_1 , B_2 — произвольные постоянные (амплитуды).

Рассмотрим первый порядок теории возмущений. В этом случае система (3) имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2 E_{x1}}{dz^2} + k_z'^2 E_{x1} + \frac{k_z'^2}{2} [(e^{2i\tau z} + e^{-2i\tau z}) E_{x0} - i(e^{2i\tau z} - e^{-2i\tau z}) E_{y0}] &= 0, \\ \frac{d^2 E_{y1}}{dz^2} + k_z^2 E_{y1} + \frac{k_0^2}{2} [-i(e^{2i\tau z} - e^{-2i\tau z}) E_{x0} - (e^{2i\tau z} + e^{-2i\tau z}) E_{y0}] &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Из системы (5) получаем решение задачи в первом приближении теории возмущений

$$\begin{aligned} E_x &= A_1 \left[e^{ik'_z z} + \frac{\delta k_z'^2}{2} \left(\frac{e^{i(k'_z + 2\tau)z}}{k_z'^2 - (k'_z + 2\tau)^2} + \frac{e^{i(k'_z - 2\tau)z}}{k_z'^2 - (k'_z - 2\tau)^2} \right) \right] + \\ &+ B_1 \frac{i\delta k_z'^2}{2} \left[\frac{-e^{i(k_z + 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z + 2\tau)^2} + \frac{e^{i(k_z - 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z - 2\tau)^2} \right] + A_2 \left[e^{-ik'_z z} + \frac{\delta k_z'^2}{2} \left(\frac{e^{-i(k'_z - 2\tau)z}}{k_z'^2 - (k'_z - 2\tau)^2} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{e^{-i(k'_z + 2\tau)z}}{k_z'^2 - (k'_z + 2\tau)^2} \right) \right] + B_2 \frac{i\delta k_z'^2}{2} \left[\frac{-e^{-i(k_z - 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z - 2\tau)^2} + \frac{e^{-i(k_z + 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z + 2\tau)^2} \right], \\ E_y &= B_1 \left[e^{ik_z z} - \frac{\delta k_0^2}{2} \left(\frac{e^{i(k_z + 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z + 2\tau)^2} + \frac{e^{i(k_z - 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z - 2\tau)^2} \right) \right] + A_1 \frac{i\delta k_0^2}{2} \left[\frac{-e^{i(k'_z + 2\tau)z}}{k_z^2 - (k'_z + 2\tau)^2} + \right. \\ &\left. + \frac{e^{i(k'_z - 2\tau)z}}{k_z^2 - (k'_z - 2\tau)^2} \right] + B_2 \left[e^{-ik_z z} - \frac{\delta k_0^2}{2} \left(\frac{e^{-i(k_z - 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z - 2\tau)^2} + \frac{e^{-i(k_z + 2\tau)z}}{k_z^2 - (k_z + 2\tau)^2} \right) \right] + \\ &+ A_2 \frac{i\delta k_0^2}{2} \left[\frac{-e^{-i(k'_z - 2\tau)z}}{k_z^2 - (k'_z - 2\tau)^2} + \frac{-e^{-i(k'_z + 2\tau)z}}{k_z^2 - (k'_z + 2\tau)^2} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

которое используется для решения граничной задачи. Граничная задача решается аналогично [6], поэтому приведем окончательные выражения для амплитуд отраженной волны

$$\begin{aligned} E_{от1} &= \frac{a_+ a_- (e^{-2ik_z h} - 1)}{a_+^2 - a_-^2 e^{-2ik_z h}} A_1 + \frac{\delta}{2} \frac{\tau k_z}{k_0^2} \left\{ A_1 [a'_1 (1 - e^{-2i(k'_z + 2\tau)h}) + a'_2 (1 - e^{-2i(k'_z - 2\tau)h})] + \right. \\ &\quad \left. + \frac{iA_2}{\cos \theta} [a_1 (1 - e^{-2i(k_z + \tau)h}) - a_2 (1 - e^{-2i(k_z - \tau)h})] \right\}, \\ E_{от2} &= \frac{b_+ b_- (e^{-2ik_z h} - 1)}{b_+^2 - b_-^2 e^{-2ik_z h}} A_2 + \frac{\delta}{2} \frac{\tau}{k_z} \left\{ iA_1 \cos \theta [a'_1 (1 - e^{-2i(k'_z + \tau)h}) - \right. \\ &\quad \left. - a'_2 (1 - e^{-2i(k'_z - \tau)h})] - A_2 [a_1 (1 - e^{-2i(k_z + \tau)h}) + a_2 (1 - e^{-2i(k_z - \tau)h})] \right\}, \end{aligned} \quad (7)$$

h — толщина слоя. При условии $k_z^2 = (k_z^2 + 2\tau)^2$ ($k_z'^2 = (k_z' + 2\tau)^2$) для $\tau < 0$ или $k_z^2 = (k_z - 2\tau)^2$ ($k_z'^2 = (k_z' - 2\tau)^2$) для $\tau > 0$ выражения (7) имеют максимум, и при этом амплитуда отраженной волны оказывается пропорциональной толщине слоя h .

Поэтому выражения (7) справедливы для малых значений толщины слоя h ХЖК. Однако можно расширить область применимости полученных выражений на слой произвольной толщины. По аналогии с теорией дифракции на периодических структурах учтем тот известный факт, что суммирование вкладов отражений от периодических неоднородностей структуры приводит к изменению интенсивности отраженного света по экспоненциальному закону в зависимости от толщины. В связи с этим заменим линейную зависимость от тол-

щины в условии Брэгга на экспоненциальную. Анализ выражений (7) приводит к следующей замене:

$$\alpha \rightarrow \frac{\alpha}{2|\alpha|} (1 - e^{-2|\alpha|}),$$

где α — выражения первого порядка малости, стоящие в выражениях (7) для амплитуд при постоянных A_1 и A_2 и относящиеся к решению внутри слоя. После такой замены выражения (7) не теряют смысл при любых h , и мы вправе ожидать, что они будут правильно описывать отражение света при больших толщинах ХЖК слоя. При анализе модифицированных выражений (7) приходим к выводу: падающая на ХЖК циркулярно-поляризованная волна испытывает отражение при совпадении ее направления вращения со знаком спирали и, наоборот, проходит при несовпадении знаков. С увеличением угла наклона максимум селективного отражения сдвигается в коротковолновую область спектра. При этом можно отметить, что в случае падения волны с электрическим вектором, лежащим в плоскости падения (π -поляризация), коротковолновой сдвиг больше, чем для σ -поляризации (электрический вектор перпендикулярен плоскости падения). Согласно полученным формулам, в случае σ -поляризации максимум селективного отражения сдвигается в соответствии с условием Брэгга ($\lambda = p \cos \Theta$).

Для π -поляризации изменение максимума описывается следующей зависимостью:

$$\lambda = p \cos \Theta \left(1 - \frac{\delta}{2} \operatorname{tg}^2 \Theta\right).$$

На основании полученных модифицированных выражений (7) и экспериментальных данных, приведенных в работе [5], нами были рассчитаны спектры отражения при наклонном падении света (рис. 1). Как видно из рисунка, наблюдается хорошее согласие между рассчитанными и экспериментально полученными спектрами. Небольшое различие в величине коэффициентов отражения может быть объяснено неучетом в наших расчетах поглощения и неточностью используемого приближения.

Теперь перейдем к рассмотрению следующего порядка теории возмущений, для которого система уравнений (3) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 E_{x2}}{dz^2} + k_z'^2 E_{x2} + \frac{k_z'^2}{2} [(e^{2i\tau z} + e^{-2i\tau z}) E_{x1} - i(e^{2i\tau z} - e^{-2i\tau z}) E_{y1}] &= 0, \\ \frac{d^2 E_{y2}}{dz^2} + k_z'^2 E_{y2} + \frac{k_0^2}{2} [-i(e^{2i\tau z} - e^{-2i\tau z}) E_{x1} - (e^{2i\tau z} + e^{-2i\tau z}) E_{y1}] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Эта система уравнений решается аналогично (5). Запишем полученные выражения для E_{x2} и E_{y2}

$$\begin{aligned} E_{x2} = \frac{k_z'^2}{4} \left\{ A_1 \left[(c_1^+ + d_1^+) \frac{z}{2ik_z} e^{ik_z z} + c_1^- \frac{e^{i(k_z' + 4\tau)z}}{k_z'^2 - (k_z' + 4\tau)^2} + d_1^- \frac{e^{i(k_z' - 4\tau)z}}{k_z'^2 - (k_z' - 4\tau)^2} \right] + \right. \\ \left. + B_1 \left[(d_2^+ - c_2^+) \frac{z}{2k_z} e^{ik_z z} - ic_2^- \frac{e^{i(k_z + 4\tau)z}}{k_z^2 - (k_z + 4\tau)^2} + d_2^- \frac{e^{i(k_z - 4\tau)z}}{k_z^2 - (k_z - 4\tau)^2} \right] \right\}, \\ E_{y2} = \frac{k_0^2}{4} \left\{ A_1 \left[(d_1^+ - c_1^+) \frac{z}{2k_z} e^{ik_z z} - ic_1^- \frac{e^{i(k_z' + 4\tau)z}}{k_z'^2 - (k_z' + 4\tau)^2} + d_1^- \frac{e^{i(k_z' - 4\tau)z}}{k_z'^2 - (k_z' - 4\tau)^2} \right] + \right. \\ \left. + B_1 \left[(c_2^+ + d_2^+) \frac{z}{2ik_z} e^{ik_z z} + c_2^- \frac{e^{i(k_z + 4\tau)z}}{k_z^2 - (k_z + 4\tau)^2} + d_2^- \frac{e^{i(k_z - 4\tau)z}}{k_z^2 - (k_z - 4\tau)^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (9)$$

где использованы обозначения

$$\begin{aligned} c_1^\pm &= \frac{k_z'^2}{k_z'^2 - (k_z' \pm 2\tau)^2} \pm \frac{k_0^2}{k_z'^2 - (k_z' \pm 2\tau)^2}, \quad d_1^\pm = \frac{k_z'^2}{k_z'^2 - (k_z' \mp 2\tau)^2} \pm \frac{k_0^2}{k_z'^2 - (k_z' \mp 2\tau)^2}, \\ c_2^\pm &= \frac{k_z'^2}{k_z'^2 - (k_z \pm 2\tau)^2} \pm \frac{k_0^2}{k_z'^2 - (k_z \pm 2\tau)^2}, \quad d_2^\pm = \frac{k_z'^2}{k_z'^2 - (k_z \mp 2\tau)^2} \pm \frac{k_0^2}{k_z'^2 - (k_z \mp 2\tau)^2}. \end{aligned}$$

Выражения, стоящие при A_2 и B_2 , получаются из (9), если заменить в них $k_z \rightarrow -k_z$. Из данных формул следует, что волны E_x и E_y испытывают измене-

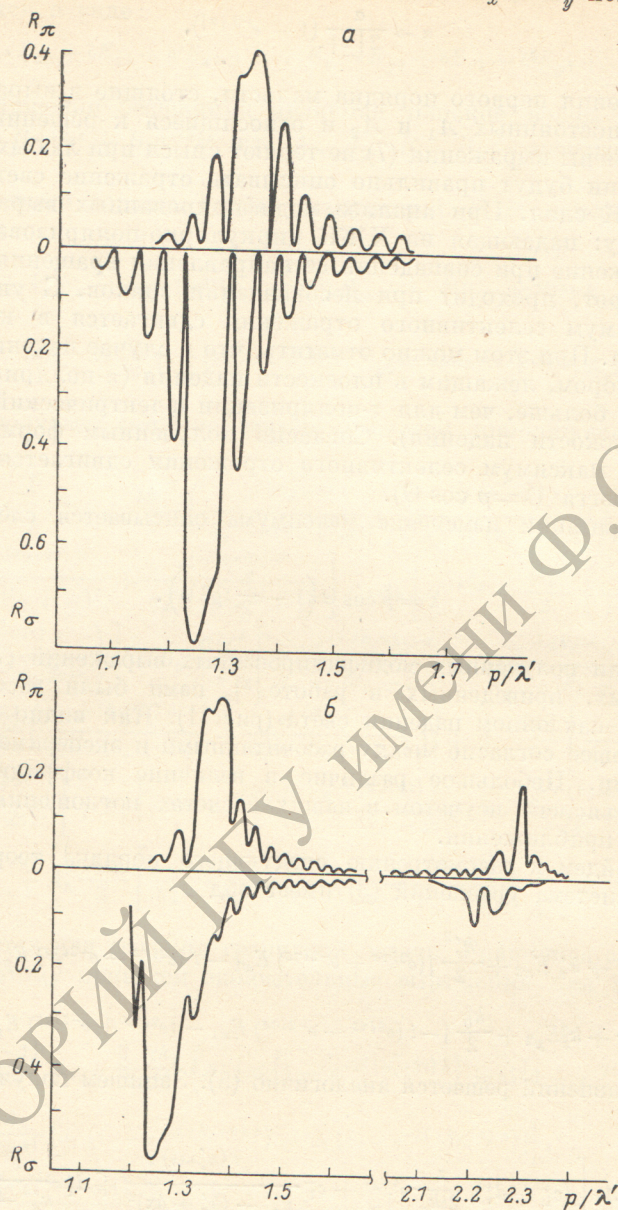


Рис. 1. Спектры отражения от пленки ХЖК толщиной 15 μ .

$n=1.65$, $\delta=0.2$, $\theta=45^\circ$, λ' — длина волны в ХЖК. а — рассчитанные спектры, б — экспериментально полученные спектры [6].

ние поляризации при распространении в направлении OZ на величины φ_1 и φ_2 соответственно. Для описания этого изменения введем параметр $\rho = \varphi/z$. Для волн E_x и E_y он имеет вид

$$\rho_1 = \frac{\delta^2 \tau}{4\lambda^2 \cos^2 \theta} \left[\frac{f^2 \cos^2 \theta}{4 \left(f^2 - \frac{\lambda^2}{\cos^2 \theta} \right)} - \frac{1}{\left(\frac{\delta \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta}{2\lambda} - \frac{2\lambda}{\cos \theta} \right)^2 - 4f^2} \right], \quad (10)$$

$$\rho_2 = -\frac{\delta^2 \tau}{4\lambda^2} \left[\frac{f^2 \cos^2 \theta}{\left(\frac{\delta \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta}{2\lambda} + \frac{2\lambda}{\cos \theta} \right)^2 - 4} + \frac{1}{4 \left(\frac{\lambda^2}{\cos^2 \theta} - 1 \right)} \right], \quad (11)$$

где $f^2 = 1 - \delta \operatorname{tg}^2 \Theta$, $\lambda = \lambda'/p$, λ' — длина волны в среде. При $\Theta = 0$ (случай нормального падения) формулы (10) и (11) переходят к виду

$$\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\delta^2 \tau}{8\lambda^2} \frac{1}{(\lambda^2 - 1)}. \quad (12)$$

Из литературы известно, что такой вид имеет выражение для удельного вращения при нормальном падении света на ХЖК [1]. Поэтому параметры ρ_1 и ρ_2 для не очень толстых слоев ($\delta^2 h \ll p$) можно связать с приведенным вращением ХЖК. Рассчитанный спектр дисперсии оптического вращения (ДОВ) приведен на рис. 2 (кривая 1).

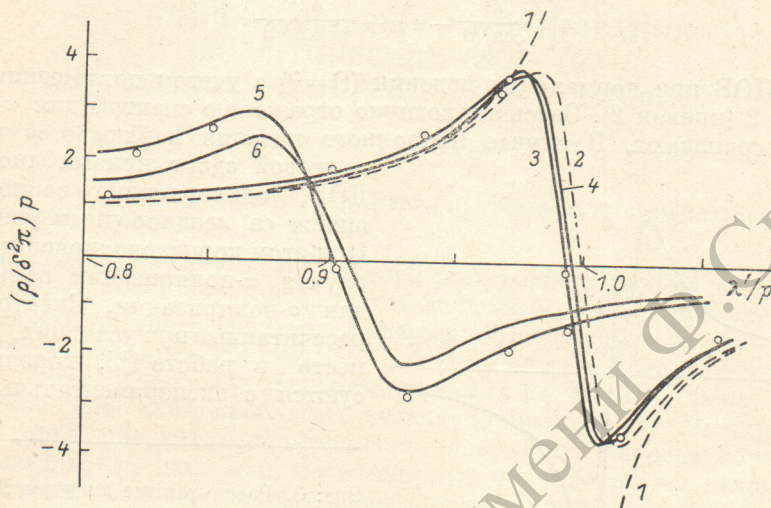


Рис. 2. Рассчитанные спектры ДОВ ХЖК.

Случай нормального падения — кривые 1 ($\chi = 0$), 2 ($\chi = 0.025$). Случай наклонного падения $\Theta' = 10^\circ$ кривые 3, 4 ($\chi = 0.025$). $\Theta' = 40^\circ$ — 5, 6 ($\chi = 0.037$). Θ' — угол падения света на ячейку. Кривые 3, 5 — π -поляризация, 4, 6 — σ -поляризация. Точки на графиках соответствуют экспериментальным значениям.

Выражения (10) и (11) получены нами при условии, что в ХЖК поглощение отсутствует. Это приводит к расхождению ветвей аномальной дисперсии вблизи длины волны, соответствующей условию Брэгга. Следует отметить, что выражения (10), (11) хорошо описывают вращение практически при любых длинах волн, и лишь вблизи условия Брэгга поглощение начинает заметно сказываться на вид ДОВ. Поэтому вдали от условий Брэгга можно применять эти выражения без изменений, а для расчета ДОВ при длинах волн, сравнимых с шагом спирали, необходимо учесть то незначительное поглощение, которое имеется в реальных кристаллах вдали от электронных полос поглощения.

Рассмотрим возможность учета слабого поглощения. Для этого возьмем тензор диэлектрической проницаемости ϵ в комплексном виде, т. е. сделаем следующие замены $\epsilon_1 \rightarrow \epsilon_1 + i\chi_1$, $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_2 + i\chi_2$. Анализ решения уравнений Максвелла с учетом нового вида тензора ϵ приводит к выводу, что для расчета ДОВ можно использовать выражения (10), (11), но в них следует сделать следующие замены:

$$\delta \rightarrow \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \rightarrow \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2 + i(\chi_1 - \chi_2)}{\epsilon_1 + \epsilon_2 + i(\chi_1 + \chi_2)}, \quad \bar{\epsilon} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2}{2} \rightarrow \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + i(\chi_1 + \chi_2)}{2},$$

$$k_0^2 \rightarrow k_0^2 \left(1 + i \frac{\chi_1 + \chi_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}\right), \quad k_z^2 \rightarrow k_z^2 \left(1 + i \frac{\chi_1 + \chi_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \frac{1}{\cos^4 \Theta}\right). \quad (13)$$

Приближенно считая $\chi_1 = \chi_2 = \chi$ (случай изотропного поглощения) и считая χ малым, получим следующие формулы для приведенного вращения

$$\rho_1 = \frac{\delta^2 \tau}{4\lambda^2 \cos \Theta} \left[\frac{f^2 \cos^2 \Theta \left(f^2 - \frac{\lambda^2}{\cos^2 \Theta}\right)}{\left[\left(f^2 - \frac{\lambda^2}{\cos^2 \Theta}\right)^2 + \frac{4\chi^2}{\bar{\epsilon}^2 \cos^4 \Theta}\right]^{1/4}} - \right.$$

$$-\left[\frac{\left(\frac{\delta \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta}{2\lambda} - \frac{2\lambda}{\cos \theta} \right)^2 - 4f^2}{\left[\left(\frac{\delta \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta}{2\lambda} - \frac{\lambda 2}{\cos \theta} \right)^2 - 4f^2 \right]^2 + \frac{16\lambda^2}{\varepsilon^2 \cos^4 \theta}} \right], \quad (14)$$

$$r_2 = -\frac{\delta^2 \pi}{4\lambda^2} \left[\frac{f^2 \cos^2 \theta \left(\left(\frac{\delta \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta}{2\lambda} - \frac{2\lambda}{\cos \theta} \right)^2 - 4 \right)}{\left[\left(\frac{\delta \operatorname{tg}^2 \theta \cos \theta}{2\lambda} + \frac{2\lambda}{\cos \theta} \right)^2 - 4 \right]^2 + \frac{16\lambda^2}{\varepsilon^2 \cos^4 \theta}} + \frac{\frac{\lambda^2}{\cos^2 \theta} - 1}{4 \left[\left(\frac{\lambda^2}{\cos^2 \theta} - 1 \right)^2 + \frac{4\lambda^2}{\varepsilon^2 \cos^4 \theta} \right]} \right]. \quad (15)$$

Спектр ДОВ при нормальном падении ($\Theta=0$) с учетом поглощения приведен на рис. 2 (кривая 2). Здесь аналогично отражению спектры для π - и σ -поляризаций совпадают. В случае наклонного падения наблюдается коротковолновой сдвиг кривых аномальной ДОВ, одновременно сопровождающийся ее неоднородным уширением. При этом коротковолновой сдвиг для случая π -поляризации больше, чем для σ -поляризации. Спектры ДОВ, рассчитанные при условиях, имевших место в работе [8], хорошо согласуются с экспериментальными дан-

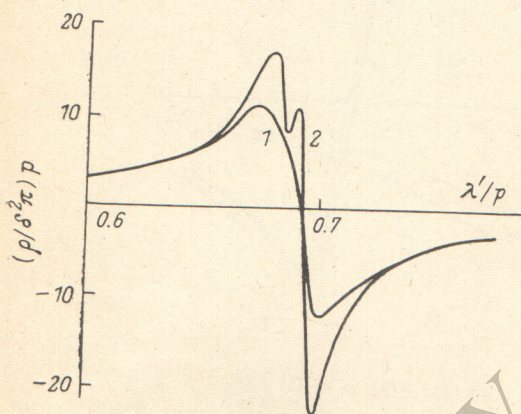


Рис. 3. Рассчитанные спектры ДОВ ХЖК при $\Theta=45^\circ$.

$\delta=0.1$ для $\chi=0.01$ — кривая 1, $\chi=0.005$ — кривая 2.

ными (рис. 2). Здесь следует отметить следующую особенность: теоретические формулы (14), (15) хорошо описывают каждый отдельный спектр ДОВ. При этом для расчета каждого спектра необходимо брать свое значение χ , т. е. учитывать дисперсию. При расчете χ выбиралось таким, чтобы величины максимумов ДОВ были возможно более близки к экспериментальным.

В заключение остановимся на одном выводе, ранее не обсуждавшемся в литературе. Для случая наклонного падения, а именно при условии $\delta \operatorname{tg}^2 \theta / 4 > 2\chi / \cos \theta$, может наблюдаться спектральная зависимость оптического вращения, изображенная на рис. 3. Следует отметить, что наблюдение этого эффекта наряду с большой чувствительностью спектрополяриметра выдвигает большие требования к самому веществу. Оно должно обладать малым поглощением при большой оптической анизотропии. Такое сочетание свойства не присуще большинству известных и изученных ХЖК.

Литература

- [1] Жень П. Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977.
- [2] Uries H. Acta cryst., 1951, v. 4, p. 219.
- [3] Кац Е. И. ЖЭТФ, 1970, т. 59, с. 1854.
- [4] Беляков В. А., Дмитриенко В. Е., Орлов В. П. УФН, 1979, т. 127, с. 221.
- [5] Vergehan D. W., Scheffer T. J. Phys. Rev. Lett., 1970, v. 25, p. 577.
- [6] Беляков В. А., Дмитриенко В. Е. ФТТ, 1973, т. 15, с. 2724.
- [7] Dreher R., Meier G. Phys. Rev. A, 1973, v. 8, p. 1616.
- [8] Володько Л. В., Ракуш В. В., Рачкевич В. С. Изв. АН БССР, сер. физ.-мат. наук, 1980, № 1, с. 62.

Поступило в Редакцию 14-января 1982 г.