Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (138), 2023

УДК 512.54

Конечные группы с пермутируемыми и c-достижимыми подгруппами

В.С. Монахов, И.Л. Сохор

Исследуются группы с пермутируемыми и c-достижимыми подгруппами. В частности, получены новые признаки сверхразрешимости, w-сверхразрешимости и v-сверхразрешимости для групп с достижимыми примарными подгруппами. Описано строение групп с c-достижимыми системами подгруппами (силовскими подгруппами или их нормализаторами). Классический результат Бэра о сверхразрешимости факторизуемой группы с нормальными сверхразрешимыми подгруппами распространен на случай, когда сомножители c-достижимы.
Ключевые слова: конечная группа, пермутизатор, достижимая подгруппа.

The groups with permuteral and c-reachable subgroups are investigated. In particular, the new criteria of supersolubility, w-supersolubility and v-supersolubility for groups with reachable primary subgroups are obtained. The structure of groups with c-reachable systems of subgroups (Sylow subgroups or their normalizers) is described. The classical Baer result on the supersolubility of a factorised group with normal supersoluble subgroups is extended to the case when the factors are c-reachable.
Keywords: finite group, permutizer, reachable subgroup.

К 80-летию Виктора Даниловича Мазурова!

Введение. Все рассматриваемые группы предполагаются конечными. Естественным расширением понятия нормализатора является понятие пермутизатора. Напомним [1, с. 26], пермутизатором $P_G(H)$ подгруппы H в группе G называется подгруппа, порожденная всеми циклическими подгруппами группы G, перестановочными с H, т. е.

$$P_G(H) = \langle x \in G \mid \langle x \rangle H = H \langle x \rangle \rangle.$$

Бейдлеман и Робинсон [2] описали группы, в которых каждая собственная подгруппа отлична от своего пермутизатора, т. е. для каждой собственной подгруппы H существует элемент $g \in G \setminus H$ такой, что $H\langle g \rangle = \langle g \rangle H$. Баллестер-Болинше, Косси и Цяо [3] заметили, что самостоятельный интерес представляют группы, в которых только максимальные подгруппы отличны от своих пермутизаторов, т. е. когда в группе G для каждой максимальной подгруппы M существует элемент $g \in G$ такой, что $G = M\langle g \rangle$. А.Ф. Васильев, В.А. Васильев, Т.И. Васильева [4] исследовали группы, в которых пермутизаторы холловых (в частности, силовских) подгрупп совпадают со всей группой. Следуя [4], подгруппу H группы G будем называть *пермутируемой* в G, если $P_G(H) = G$, и *сильно пемутируемой* в G, если $P_K(H) = K$ для каждой подгруппы K группы G такой, что $H \le K \le G$.

Пусть $\mathbb{P}$ – множество всех простых чисел и H – подгруппа группы G. Напомним [5], подгруппу H группы G называют $\mathbb{P}$-субнормальной в G, если $H = G$ или существует цепочка подгрупп

$$H = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_i \le H_{i+1} \ldots \le H_{n-1} \le H_n = G \qquad (1)$$

такая, что $|H_{i+1} : H_i| \in \mathbb{P}$ для каждого i. Группу, в которой каждая примарная (примарная циклическая) подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, называют w-сверхразрешимой (v-сверхразрешимой соответственно). Свойства таких групп известны [5]–[8].

В [4] доказано, что каждая $\mathbb{P}$-субнормальная холлова подгруппа разрешимой группы сильно пермутируема. Мы доказываем, что верно и обратное утверждение. Таким образом, в разрешимых группах для холловых подгрупп условия $\mathbb{P}$-субнормальности и сильной пермутируемости эквивалентны, см. предложение 1.1. Кроме того, получены новые признаки сверхразрешимости, w-сверхразрешимости и v-сверхразрешимости для групп с $\mathbb{P}$-субнормальными или пермутируемыми примарными подгруппами.

Подгруппу H группы G будем называть c-*достижимой* в G, если существует цепочка подгрупп (1) и элементы $g_i \in H_{i+1} \setminus H_i$ такие, что $H_{i+1} = H_i\langle g_i \rangle$ для каждого i.

В контексте введенного понятия группы, рассмотренные Бейдлеманом и Робинсоном, являются группами, в которых каждая подгруппа с-достижима. Понятно, что $\mathbb{P}$-субнормальная подгруппа с-достижима. Для разрешимых групп определены случаи, когда верно и обратное, см. следствие 2.1.1. Установлено строение разрешимых групп, в которых каждая силовская подгруппа с-достижима (теореме 2.1), а также групп с с-достижимыми нормализаторами силовских подгрупп (теорема 2.2). Кроме того, получено обобщение классического результата Бэра [9, с. 186] о группах, факторизуемых сверхразрешимыми нормальными подгруппами, см. теорему 2.3.

1. Группы с пермутируемыми подгруппами. В силу [4, лемма 3.2] и определений справедлива

Лемма 1.1. *Пусть G – группа, $A \le B \le G$ и N – нормальная подгруппа группы G.*

(1) *Если A (сильно) пермутируема в B, то AN (сильно) пермутируема в BN и AN/N (сильно) пермутируема в BN/N.*

(2) *Если $N \le A$, то A (сильно) пермутируема в B тогда и только тогда, когда A/N (сильно) пермутируема в B/N.*

(3) *Если A сильно пермутируема в B и $A \le H$, то A сильно пермутируема в H.*

Лемма 1.2. *Пусть $r = \max \pi(G)$ и R – силовская r-подгруппа группы G. Тогда $N_G(R) = P_G(R)$. В частности, если R пермутируема в G, то R нормальна в G.*

Доказательство. Пусть $x \in G$ и $R\langle x \rangle = \langle x \rangle R$. Понятно, что $\langle x \rangle = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle$, где $\langle x_1 \rangle$ – силовская r-подгруппа и $\langle x_2 \rangle$ – r'-холлова подгруппа в $\langle x \rangle$. В силу [10, VI.4.7], $R = R\langle x_1 \rangle$, поэтому $R\langle x \rangle = R\langle x_2 \rangle$. Таким образом, все силовские r'-подгруппы в $R\langle x \rangle$ циклические. Поскольку $r = \max \pi(R\langle x \rangle)$, подгруппа R нормальна в $R\langle x \rangle$ в силу [10, IV.2.7] и $\langle x \rangle \le N_G(R)$. Поскольку $P_G(R)$ порождается элементами x такими, что $R\langle x \rangle = \langle x \rangle R$, то $P_G(R) = N_G(R)$.

Лемма 1.3. *Пусть H – p-группа экспоненты p и $x \notin Z(H)$. Тогда $N_H(\langle x \rangle) = P_H(\langle x \rangle)$ и $\langle x \rangle$ не пермутируема в H.*

Доказательство. Понятно, что $N_H(\langle x \rangle) \le P_H(\langle x \rangle)$. Выберем $y \in H \setminus \langle x \rangle$ такой, что $\langle x \rangle \langle y \rangle = \langle y \rangle \langle x \rangle$. Так как H является p-группой экспоненты p, то $|\langle x \rangle \langle y \rangle| = p^2$. Следовательно, H абелева и $\langle x \rangle \langle y \rangle = \langle x \rangle \times \langle y \rangle$, поэтому $y \in N_H(\langle x \rangle)$ и $N_H(\langle x \rangle) = P_H(\langle x \rangle)$. Поскольку $x \notin Z(H)$, то $H \ne N_H(\langle x \rangle) = P_H(\langle x \rangle)$ и $\langle x \rangle$ не пермутируема в H.

Предложение 1.1. *В разрешимой группе холлова подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна тогда и только тогда, когда она сильно пермутируема.*

Доказательство. Если в разрешимой группе G холлова подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна, в силу [4, 3.8] подгруппа H сильно пермутируема в G.

Обратно, пусть подгруппа H – сильно пермутируемая холлова подгруппа разрешимой группы G. Используя индукцию по порядку группы, докажем, что H $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Пусть H содержится в максимальной подгруппе M группы G. По лемме 1.1 (3) подгруппа H сильно пермутируема в M и по индукции подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в M. Если $|G:M| \in \mathbb{P}$, то H $\mathbb{P}$-субнормальна в G ввиду [8, лемма 3(3)]. Поэтому далее будем считать, что $|G:M| \notin \mathbb{P}$, в частности, подгруппа M не нормальна в G. В силу леммы 1.1 (1) фактор-группа G/M_G содержит сильно пермутируемую холлову подгруппу HM_G/M_G. Так как $HM_G \le M$, подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в HM_G по индукции. Если $M_G \ne 1$, то HM_G/M_G $\mathbb{P}$-субнормальна в G/M_G по индукции. В силу [8, лемма 3 (2)] подгруппа HM_G $\mathbb{P}$-субнормальна в G и H $\mathbb{P}$-субнормальна в G ввиду [8, лемма 3 (3)]. Поэтому будем считать, что $M_G = 1$. Так как группа G разрешима, то $G = N \rtimes M$, N – единственная минимальная нормальная подгруппа в G и $N = F(G) = C_G(N) = O_p(G)$. Пусть $HN < G$. По индукции,

HN/N $\mathbb{P}$-субнормальна в G/N и H $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Пусть теперь $H = M$ – холлова подгруппа. По условию существует элемент $x \in G \setminus H$ такой, что $\langle x\rangle H = H\langle x\rangle = G$. Пусть $\langle x\rangle = \langle x_1\rangle \times \langle x_2\rangle$, где $\langle x_1\rangle$ – p-подгруппа $\langle x_2\rangle$ – p'-подгруппа. Так как N – нормальная силовская p-подгруппа группы G, то $\langle x_1\rangle \le N$ и $|x_1| = p$. В силу [10, VI.4.6] подгруппа $H = \langle x_2\rangle H$. Таким образом, $G = \langle x\rangle H = \langle x_1\rangle H$ и $|G:H| = p$.

Следствие 1.1.1. *Пусть G – группа. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(1) *Группа G сверхразрешима.*

(2) *В группе G каждая холлова подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна или сильно пермутируема.*

(3) *В группе G каждая холлова подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна или пермутируема.*

Следствие 1.1.2. *Если в группе G каждая силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна или сильно пермутируема, то группа G* w-*сверхразрешима. Обратно, если группа G* w-*сверхразрешима, то каждая силовская подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна и сильно пермутируема в G.*

Если в разрешимых группах условие $\mathbb{P}$-субнормальности и сильной пермутируемости эквивалентны для холловых подгрупп, то в неразрешимых группах это вообще говоря не верно.

Пример 1.1. В группе $L_2(8)$ $\{2,7\}$-холлова подгруппа сильно пермутируема, но не $\mathbb{P}$-субнормальна. В группе $L_2(5)$ силовская 2-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна, но не пермутируема.

В [11] доказана r-разрешимость группы, в которой силовская r-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна для нечетного r. Опираясь на этот результат, можно показать, что *в простой неабелевой группе силовская r-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна и сильно пемутируема тогда и только тогда, когда $r = 2$ и $G \cong L_2(7)$.*

Пусть $\mathfrak{F}$ – класс групп. Группа G называется минимальной не $\mathfrak{F}$-группой, если $G \notin \mathfrak{F}$, но каждая ее собственная подгруппа принадлежит $\mathfrak{F}$, [12, глава VI]. Минимальные не $\mathfrak{N}$-группы также называют группами Шмидта, их свойства хорошо известны [13], см. также [12, VI.26.2]. Здесь и далее $\mathfrak{N}$ – формация всех нильпотентных групп.

Перечислим известные свойства групп Шмидта с точки зрения пермутируемости.

Лемма 1.4.

(1) *В сверхразрешимой группе Шмидта каждая подгруппа сильно пермутируема.*

(2) *Пусть $G = P \rtimes Q$ – несверхразрешимая группа Шмидта. Тогда*

(2.1) *Q не пермутируема;*

(2.2) *Если $H \le P$ and $P_G(H) = G$, то либо $H = P$, либо $H \le \Phi(G)$;*

(2.3) *Каждая пермутируемая примарная подгруппа нормальна в группе G, а значит, сильно пермутируема в G.*

(3) *В группе Шмидта G каждая подгруппа простого порядка и каждая циклическая подгруппа порядка 4 сильно пермутируема тогда и только тогда, когда G сверхразрешима.*

Теорема 1.1. *Если в группе каждая примарная циклическая подгруппа сильно пермутируема, то группа сверхразрешима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Ввиду леммы 1.1 (3) и индукции все собственные подгруппы группы G сверхразрешимы. Поэтому $G = P \rtimes S$ – минимальная несверхразрешимая группа, $P = G^{\mathfrak{U}}$. Здесь и далее $\mathfrak{U}$ – формация всех сверхразрешимых групп. По лемме 1.4 (3) группа G не является группой Шмидта, поэтому G имеет силовскую башню сверхразрешимого типа и P – силовская p-подгруппа группы G для $p = \max \pi(G)$. В частности, $p > 2$ и все неединичные элементы в P имеют порядок p в силу [6, лемма 2.1]. Из леммы 1.3 получаем, что P – элементарная абелева p-подгруппа, а в силу [6, лемма 2.1] подгруппа P – минимальная нормальная в G подгруппа.

Пусть N – неединичная нормальная подгруппа группы G. Несложно проверить, что G/N удовлетворяет условиям теоремы, поэтому по индукции G/N сверхразрешима и $\Phi(G) = 1$, $O_{p'}(G) = K_G = 1$.

Пусть $A \le P$, $|A| = p$, и $g \in G \setminus N_G(A)$ такой, что $\langle g \rangle A = A\langle g \rangle$ и $|g| = p^{\alpha} t$, где p не делит t. Тогда $g^t = b \in P, g^{p^{\alpha}} = x \in K^h = S, h \in P, \langle g \rangle = \langle b \rangle \times \langle x \rangle$. Если $x = 1$, то $g = b \in P \le N_G(A)$, противоречие. Если $b = 1$, то $g = x$ и $\langle g \rangle A = A \rtimes \langle g \rangle$, так как G p-замкнута. Значит, $g \in N_G(A)$, противоречие. Таким образом, $b \ne 1$, $x \ne 1$, $S^b \ne S$, так как $b \in P$, $x^b = x \in S \cap S^b = D \ne 1$.

В силу свойств минимальных несверхразрешимых подгрупп [12, теорема 26.5] либо S неабелева порядка q^3 и экспоненты q, либо S – циклическая q-группа, либо S – q-группа с циклической подгруппой индекса q, либо S – сверхразрешимая группа Шмидта. Рассматривая каждый из этих случаев в отдельности, приходим к заключению теоремы, что группа G сверхразрешима.

Следствие 1.1.1. *Если в группе G каждая примарная циклическая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна или сильно пермутируема, то группа G v-сверхразрешима. Обратно, если группа G v-сверхразрешима, то каждая примарная циклическая подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна и сильно пермутируема в G.*

2. Группы с c-достижимыми подгруппами. Используя определение, несложно проверить, что справедлива

Лемма 2.1. *Пусть H – c-достижимая подгруппа группы G и $N \lhd G$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

(1) *подгруппа H^g c-достижима в G для каждого $g \in G$;*

(2) *подгруппа HN c-достижима в G;*

(3) *подгруппа HN/N c-достижима в G/N;*

(4) *пусть $A \le B \le G$; если A c-достижима в B, а B c-достижима в G, то A c-достижима в G.*

Предложение 2.1. *В разрешимой группе G подгруппа H c-достижима тогда и только тогда, когда существует цепочка подгрупп*

$$H = M_0 \le M_1 \le \ldots \le M_i \le M_{i+1} \le \ldots \le M_{n-1} \le M_n = G \qquad (2)$$

такая, что либо $|M_{i+1} : M_i| = 4$ и $M_{i+1}/(M_i)_{M_{i+1}} \cong S_4$, либо $|M_{i+1} : M_i| \in \mathbb{P}$ для каждого i.

Доказательство. Пусть G – разрешимая группа и H – c-достижимая в G подгруппа. Тогда существует цепочка подгрупп (1) и элементы $g_i \in H_{i+1} \setminus H_i$ такие, что $H_{i+1} = H_i\langle g_i \rangle$ для каждого i. Выберем в H_{i+1} максимальную подгруппу U_i, содержащую H_i. Тогда $U_i = H_i(U_i \cap \langle g_i \rangle)$ и $H_{i+1} = U_i\langle g_i \rangle$. Так как группа G разрешима, то $|H_{i+1} : U_i| = p_i^{\alpha_i}$ для некоторого $p_i \in \pi(H_{i+1})$. Если P_i – силовская p_i-подгруппа из $\langle g_i \rangle$, то $H_{i+1} = U_i P_i$. Поскольку все силовские подгруппы в $U_i \cap \langle g_i \rangle$ циклические, то подгруппа H_i c-достижима в U_i. Повторяя такое уплотнение, получим цепочку (2), в которой для каждого i подгруппа M_i максимальна в M_{i+1} и $M_{i+1} = M_i P_i$, где P_i – циклическая p_i-подгруппа. В силу [14, лемма 2.1] для каждого i либо $M_{i+1}/(M_i)_{M_{i+1}} \cong S_4$ и $|M_{i+1} : M_i| = 4$, либо $|M_{i+1} : M_i| \in \mathbb{P}$.

Обратно, пусть существует цепочка (2) такая, что для каждого i либо $M_{i+1}/A_i \cong S_4$ и $|M_{i+1} : M_i| = 4$, либо $|M_{i+1} : M_i| \in \mathbb{P}$. Несложно проверить, что в первом случае M_i c-достижима в M_{i+1}. Пусть $|M_{i+1} : M_i| = p_i \in \mathbb{P}$, P_i – силовская p_i-подгруппа из M_{i+1} и $x_i \in P_i \setminus M_i$. Тогда

$$|M_i\langle x_i \rangle| = |M_i||\langle x_i \rangle : M_i \cap \langle x_i \rangle| \ge |M_i| p_i = |M_{i+1}|.$$

Поэтому $M_{i+1} = M_i\langle x_i \rangle$. Так как это верно для любого i, то подгруппа H c-достижима в G.

Если G – группа, $A \le B \le G$ и $A \lhd B$, то фактор-группа B/A называется секцией группы

G. Если в группе G нет секций, изоморфных S_4, то группа G называется S_4-свободной.

Следствие 2.1.1. *В разрешимой группе G c-достижимая подгруппа H $\mathbb{P}$-субнормальна в каждом из следующих случаев:*

(1) *группа G S_4-свободна;*

(2) *4 не делит $|G:H|$;*

(3) $(|H|,6)=1$.

Следствие 2.1.2. *Группа G сверхразрешима тогда и только тогда, когда A c-достижима в B для любой пары подгрупп A и B таких, что $A\le B$.*

Лемма 2.2. *Пусть $r=\max\pi(G)$ и R – силовская r-подгруппа разрешимой группы G. Если R c-достижима в G и $r>3$, то R нормальна в G.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. В силу предложения 2.1 существует цепочка подгрупп (2) такая, что либо $|M_{i+1}:M_i|=4$ и $M_{i+1}/(M_i)_{M_{i+1}}\cong S_4$, либо $|M_{i+1}:M_i|\in\mathbb{P}$ для каждого i. Поскольку R c-достижима в M_{n-1}, то по индукции R нормальна в M_{n-1}. Если R не нормальна в G, то $M_{n-1}=N_G(R)$. По теореме Силова $|G:M_{n-1}|\equiv 1(\mathrm{mod}\, r)$. Так как $r=\max\pi(G)$, то $|G:M_{n-1}|\notin\mathbb{P}$. Если $|G:M_{n-1}|=4$, то $r=3$, противоречие. Поэтому предположение неверно и R нормальна в G.

Теорема 2.1. *Пусть в разрешимой группе G каждая силовская подгруппа c-достижима. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(1) *В группе G каждая силовская $3'$-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна.*

(2) *$\{2,3\}'$-холлова подгруппа $G_{\{2,3\}'}$ группы G нормальна в G.*

(3) *Холловы подгруппы $G_{2'}$, $G_{3'}$, $G_{\{2,3\}'}$ w-сверхразрешимы.*

(4) *Если группа G S_4-свободна, то группа G w-сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть в разрешимой группе G каждая силовская подгруппа c-достижима.

(1) Согласно следствию 2.1.1 каждая силовская r-подгруппа $\mathbb{P}$-субнормальна в G для $r\ne 3$, а значит, $G\in \mathrm{w}_{3'}\mathfrak{U}$.

(2) Пусть R – силовская r-подгруппа в $H=G_{\{2,3\}'}$ для $r=\max\pi(G)$. Понятно, что если $r\le 3$, то $H=1$ и утверждение верно. Пусть $r>3$. По условию R c-достижима в G, а значит, подгруппа R нормальна в G по лемме 2.2. В силу леммы 2.1 (3) каждая силовская подгруппа c-достижима в G/R. По индукции H/R нормальна в G/R. Отсюда H нормальна в G.

(3) Все силовские подгруппы из $G_{3'}$ и $G_{\{2,3\}'}$ $\mathbb{P}$-субнормальны в G в силу утверждения (1) и $\mathbb{P}$-субнормальны в $G_{3'}$ и $G_{\{2,3\}'}$ соответственно в силу [5, лемма 1.4(3)]. Поэтому $G_{3'}$ и $G_{\{2,3\}'}$ w-сверхразрешимы.

Так как $R=G_3$ c-достижима в G, то ввиду предложения 2.1 можно показать, что R $\mathbb{P}$-субнормальна в некоторой $2'$-холловой подгруппе $G_{2'}$. В силу [5, лемма 1.4(3)] все силовские в $G_{2'}$ подгруппы $\mathbb{P}$-субнормальны в $G_{2'}$. Таким образом, $G_{2'}$ w-сверхразрешима.

(4) Если группа G S_4-свободна, то *группа G w-сверхразрешима* в силу следствия 2.1.1 (1).

Теорема 2.2. *Если в разрешимой группе G нормализатор каждой силовской подгруппы c-достижим, то либо G сверхразрешима, либо G содержит нормальную подгруппу N такую, что $G/N\cong S_4$.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по порядку группы. Пусть N – неединичная нормальная в G подгруппа. Несложно показать, что G/N удовлетворяет условиям теоремы, поэтому по индукции либо G/N сверхразрешима, либо G/N содержит нормальную подгруппу K/N такую, что $(G/N)/(K/N)\cong S_4$. В последнем случае теорема справедлива, поскольку $G/K\cong(G/N)/(K/N)\cong S_4$. Поэтому далее будем считать, что G/N сверхразрешима для каждой неединичной нормальной в G подгруппы N. Следовательно, группа G примитивна, а значит, $F = F(G)$ – единственная минимальная нормальная подгруппа, $G = F \rtimes H$, H – максимальная подгруппа группы G, $H_G = 1$ и H сверхразрешима. Пусть $q = \max \pi(H)$ и Q – силовская q-подгруппа в H. Поскольку H сверхразрешима, то Q нормальна в H и $N_H(Q) = H$. Поэтому Q является силовской q-подгруппой группы G и по условию H c-достижима в G. В силу предложения 2.1 либо $|G:H| = |F| \in \mathbb{P}$ и группа G сверхразрешима, либо $|G:H| = |F| = 4$ и $G \cong G / H_G \cong S_4$.

Пример 2.1. В группе $G = C_2^4 \rtimes (S_3 \times S_3)$ [15, SmallGroup(576,8654)] каждая силовская подгруппа c-достижима, но группа G не сверхразрешима и не содержит нормальной подгруппы, фактор-группа по которой изоморфна S_4. Следовательно, для групп с c-достижимыми силовскими подгруппами аналог теоремы 2.2 в общем случае не верен.

Теорема 2.3. *Пусть A и B – сверхразрешимые c-достижимые подгруппы группы G такие, что $G = AB$. Тогда $G^{\mathfrak{U}} = (G')^{\mathfrak{N}} \le [A,B]$. В частности, если коммутант группы G нильпотентен, то группа G сверхразрешима.*

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{U} \subseteq \mathfrak{N}\mathfrak{A}$, то $(G')^{\mathfrak{N}} \le G^{\mathfrak{U}}$. В силу [16, лемма 11] $(G')^{\mathfrak{N}} \le G^{\mathfrak{U}} \le [A,B]$. Здесь $[A,B] = \langle [a,b] \mid a \in A, b \in B \rangle$ – взаимный коммутант подгрупп A и B.

Пусть $(G')^{\mathfrak{N}} = 1$. Тогда группа G разрешима и в силу предложения 2.1 для подгруппы A существует цепочка подгрупп (2) такая, что для каждого i либо $|M_{i+1} : M_i| = 4$ и $M_{i+1} / (M_i)_{M_{i+1}} \cong S_4$, либо $|M_{i+1} : M_i| \in \mathbb{P}$. Поскольку коммутант группы S_4 не нильпотентен, то случай $M_{i+1} / (M_i)_{M_{i+1}} \cong S_4$ не возможен. Поэтому $|M_{i+1} : M_i| \in \mathbb{P}$ для каждого i и подгруппа A $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Аналогично можно показать, что B $\mathbb{P}$-субнормальна в G. Таким образом, в силу [16, теорема 3] $G^{\mathfrak{U}} = 1$ и $1 = (G')^{\mathfrak{N}} = G^{\mathfrak{U}}$.

Пусть теперь $(G')^{\mathfrak{N}} \ne 1$. Рассмотрим группу $G / (G')^{\mathfrak{N}} = A(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}} \cdot B(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}}$. По лемме 2.1 (3) подгруппы $A(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}}$ и $B(G')^{\mathfrak{N}} / (G')^{\mathfrak{N}}$ сверхразрешимы и c-достижимы в $G / (G')^{\mathfrak{N}}$ и $\left((G / (G')^{\mathfrak{N}})'\right)^{\mathfrak{N}} = 1$, следовательно, по доказанному $G / (G')^{\mathfrak{N}} \in \mathfrak{U}$ и $G^{\mathfrak{U}} \le (G')^{\mathfrak{N}}$.

Следствие 2.3.1. *Пусть A и B – абелевы подгруппы группы G и $G = AB$. Если подгруппы A и B c-достижимы в G, то группа G сверхразрешима.*

Пример 2.2. В симметрической группе S_4 каждая подгруппа c-достижима. Кроме того, $S_4 = AB$, $A \cong C_3$, $B \cong D_8$, $(S_4)' = [A,B] \cong A_4$, $((S_4)')^{\mathfrak{N}} = (S_4)^{\mathfrak{U}} \cong C_2^2 < A_4$. Поэтому в теореме 2.3 включение $(G')^{\mathfrak{N}} \le [A,B]$ нельзя заменить равенством.

Литература

1. Weinstein, M. Between Nilpotent and Solvable / M. Weinstein. – Passaic : Polygonal, 1982. – 231 p.

2. Beidleman, J. C. On finite groups satisfying the permutizer condition / J. C. Beidleman, D. J. S. Robinson / J. Algebra. – 1997. – Vol. 191. – P. 686–703.

3. Ballester-Bolinches, A. A note on finite groups with the maximal permutiser condition / A. Ballester-Bolinches, J. Cossey, S. Qiao // RACSAM. – 2016. – Vol. 110. – P. 247–250.

4. Васильев, А. Ф. О пермутируемых подгруппах конечных групп / А. Ф. Васильев, В. А. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55, № 2. – С. 286–295.

5. Васильев, А. Ф. О конечных группах сверхразрешимого типа / А. Ф. Васильев, Т. И. Васильева, В. Н. Тютянов // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 51, № 6. – С. 1270–1281.

6. Монахов, В. С. Конечные группы с абнормальными и $\mathfrak{U}$-субнормальными подгруппами / В. С. Монахов // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57, № 2. – С. 447–462.

7. Монахов, В. С. О трех формациях над $\mathfrak{U}$ / В. С. Монахов // Матем. заметки. – 2021. – Т. 110, № 3. – С. 358–367.

8. Monakhov, V. S. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal subgroups / V. S. Monakhov, V. N. Kniahina // Ricerche Mat. – 2013. – Vol. 62. – P. 307–322.

9. Baer, R. Classes of finite groups and their properties / R. Baer // Illinois J. Math. – 1957. – Vol. 1. – P. 115–187.

10. Huppert, B. Endliche Gruppen I / B. Huppert. – Berlin ; Heidelberg ; New York : Springer, 1967. – 793 p.

11. Kniahina, V. N. Finite groups with $\mathbb{P}$-subnormal Sylow subgroup / V. N. Kniahina, V. S. Monakhov // Ukr. Mat. Zh. – 2010. – Vol. 72, № 10. – P. 1365–1371.

12. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 271 с.

13. Монахов, В. С. Конечные группы со сверхразрешимыми подгруппами непримарного индекса / В. С. Монахов // Бесконечные группы и примыкающие алгебраические структуры : сб. науч. ст. – Киев : Ин-т матем. АН Украины, 1993. – С. 195–209.

14. Qiao, S. Finite groups with the maximal permutizer condition / S. Qiao, G. Qian, Y. Wang // J. Algebra Appl. – 2013. – Vol. 12, № 5. – 1250217-1–1250217-5.

15. A system for computational discrete algebra GAP 4.11.1 [Electronic resource]. – Mode of access : https://www.gap-system.org. – Date of access : 25.12.2022.

16. Монахов, В. С. О сверхразрешимом корадикале произведения субнормальных сверхразрешимых подгрупп / В. С. Монахов, И. К. Чирик // Сиб. матем. журн. – 2017. – Т. 58, № 2. – С. 353–364.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 10.02.2023