Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (138), 2023

УДК 519.17

Q-полиномиальные графы Шилла с массивами пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$ и $\{105,72,24;1,12,70\}$ не существуют

Юань Юань[1], А.А. Махнев[1,2], И.Н. Белоусов[2,3]

Графы Шилла были введены Дж. Куленом и Ч. Паком. Дистанционно регулярные графы диаметра 3 с собственным значением $\theta_1 = a_3$ называются графами Шилла. Дж. Кулен и Ч. Пак нашли все допустимые массивы пересечений графов Шилла для $b \in \{2,3\}$. Q-полиномиальный граф Шилла с $b = 3$ имеет массив пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$ или $\{105,72,24;1,12,70\}$. В работе доказано, что дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$ не существует.

Ключевые слова: граф Шилла, дистанционно регулярный граф, Q-полиномиальный граф.

Distance-regular graphs with eigenvalue $\theta_1 = a_3$ is called Shilla graph. J. Koolen and J. Park found intersection arrays of Shilla graphs with $b = 3$. The Q-polynomial Shilla graph with $b = 3$ has an intersection array $\{42,30,12;1,6,28\}$ or $\{105,72,24;1,12,70\}$. It is proved in the paper that distance-regular graphs with intersection arrays $\{42,30,12;1,6,28\}$ and $\{105,72,24;1,12,70\}$ do not exist.

Keywords: Shilla graph, distance-regular graphs, Q-polynomial graph.

Введение. Графы Шилла были введены Дж. Куленом и Ч. Паком [1] как, в некотором смысле, экстремальные дистанционно регулярные графы диаметра 3. А именно, наибольшее неглавное собственное значение графа θ_1 не меньше $\min\left\{\frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}, a_3\right\}$, где k – степень графа, и $\theta_1 = a_3$ тогда и только тогда, когда $\theta_1 = \frac{a_1+\sqrt{a_1^2+4k}}{2}$ [1, теорема 7]. Графы с $\theta_1 = a_3$ называются графами Шилла. В графах Шилла параметр a_3 обозначают через a и k делится на a. Полагают $b = b(\Gamma) = k/a$ и графы Шилла имеют массивы пересечений $\{ab,(a+1)(b-1),b_2;1,c_2,a(b-1)\}$. Обратно, дистанционно регулярный граф диаметра 3 с $k = ab$ и $b_1 = (a+1)(b-1)$ является графом Шилла.

Дж. Кулен и Ч. Пак в [1] нашли все допустимые массивы пересечений графов Шилла для $b \in \{2,3\}$, а в работе И. Белоусова [2] найдены допустимые массивы для $b \in \{4,5\}$. Отметим, что в случае $b = 2$ получилось 5 допустимых массивов, которым отвечают известные графы, при $b = 3$ таких массивов оказалось 12, среди которых только для двух доказано существование графа – унитарный неизотропный граф и граф Доро. При $b = 4$ известно 25 допустимых массивов пересечений [3], а при $b = 5$ – 60 [4].

Для определения допустимых массивов пересечений графов Шилла с фиксированным параметром b важную роль играют Q-полиномиальные графы относительно θ_1. Для таких графов наименьшее собственное значение равно $-b(bb_2+c_2)/(b_2+c_2)$, что является минимально возможным для третьего неглавного собственного значения [1, предложение 15 и следствие 15]. По [1, предложение 18] Q-полиномиальный граф с $b = 3$ имеет массив пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$ или $\{105,72,24;1,12,70\}$. Ранее в [5], [6] было доказано, что графы с массивами пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$ и $\{105,72,24;1,12,70\}$ не существуют. Однако в обеих статьях имеются ошибки. В данной работе приведены корректные доказательства.

Теорема 1. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{42,30,12;1,6,28\}$ *не существует.*

Теорема 2. *Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений* $\{105,72,24;1,12,70\}$ *не существует.*

Тройные числа пересечений. В доказательстве теорем используются тройные числа пересечений [7].

Пусть Γ – дистанционно регулярный граф диаметра d, u_1,u_2,u_3 – вершины графа Γ, r_1,r_2,r_3 – неотрицательные целые числа, не большие d. Через $\begin{Bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{Bmatrix}$ обозначим множество вершин $w\in\Gamma$ таких, что $d(w,u_i)=r_i$, а через $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ – число вершин в $\begin{Bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{Bmatrix}$. Числа $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ называются тройными числами пересечений. Для фиксированной тройки вершин u_1,u_2,u_3 вместо $\begin{bmatrix} u_1u_2u_3 \\ r_1r_2r_3 \end{bmatrix}$ будем писать $[r_1r_2r_3]$. К сожалению, для чисел $[r_1r_2r_3]$ нет общих формул. Однако в [7] предложен метод вычисления некоторых чисел $[r_1r_2r_3]$.

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $W=d(u,v), U=d(v,w), V=d(u,w)$. Так как имеется точно одна вершина $x=u$ такая, что $d(x,u)=0$, то число $[0jh]$ равно 0 или 1. Отсюда $[0jh]=\delta_{jW}\delta_{hV}$. Аналогично, $[i0h]=\delta_{iW}\delta_{hU}$ и $[ij0]=\delta_{iU}\delta_{jV}$.

Другое множество уравнений можно получить, фиксируя расстояние между двумя вершинами из $\{u,v,w\}$ и сосчитав число вершин, находящихся на всех возможных расстояниях от третьей:

$$\begin{cases} \sum_{l}^{d}[ljh]=p_{jh}^{U}-[0jh] \\ \sum_{l}^{d}[ilh]=p_{ih}^{V}-[i0h] \\ \sum_{l}^{d}[ijl]=p_{ij}^{W}-[ij0] \end{cases} \quad (+).$$

При этом некоторые тройки исчезают. При $|i-j|>W$ или $i+j<W$ имеем $p_{ij}^{W}=0$, поэтому $[ijh]=0$ для всех $h\in\{0,...,d\}$.

Положим

$$S_{ijh}(u,v,w)=\sum_{r,s,t=0}^{d}Q_{ri}Q_{sj}Q_{th}\begin{bmatrix} uvw \\ rst \end{bmatrix},$$

где Q_{ij} – элементы дуальной матрицы собственных значений Q.

Если параметр Крейна $q_{ij}^{h}=0$, то $S_{ijh}(u,v,w)=0$.

Зафиксируем вершины u,v,w дистанционно регулярного графа Γ диаметра 3 и положим $\{ijh\}=\begin{Bmatrix} uvw \\ ijh \end{Bmatrix}$, $[ijh]=\begin{bmatrix} uvw \\ ijh \end{bmatrix}$, $[ijh]'=\begin{bmatrix} uvw \\ ihj \end{bmatrix}$, $[ijh]^{*}=\begin{bmatrix} uvw \\ jih \end{bmatrix}$ и $[ijh]^{\sim}=\begin{bmatrix} uvw \\ hji \end{bmatrix}$. Вычисление $[ijh]'$, $[ijh]^{*}$ и $[ijh]^{\sim}$ (симметризация массива тройных чисел пересечений) может дать новые соотношения, позволяющие доказать несуществование графа.

Граф с массивом пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$ является формально самодуальным (см. [8]), имеет спектр $42^1,14^{42},0^{210},-7^{90}$, $1+42+210+90=343$ вершин и матрицы собственных значений

$$P = Q = \begin{pmatrix} 1 & 42 & 210 & 90 \\ 1 & 14 & 0 & -15 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \\ 1 & -7 & 14 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ввиду границы Дельсарта порядок клики в Γ не больше 7. И.Н. Белоусов и А.А. Махнев доказали, что граф Шилла с $\theta_2 = 0$ имеет массив пересечений $\{(bl+1)bn, (bln+n+1)(b-1), bln; 1, bn, (bl+1)(b-1)n\}$, где $b = 3, l = n = 2$ для нашего графа.

Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{42,30,12;1,6,28\}$ является Q-полиномиальным и имеет многочлен Тервиллигера: $-6(x+3)(x+1)(x-4)(x-5)$ [9]. Поэтому собственные значения локального подграфа $\Gamma(u)$ содержатся в $\{-3,-2,-1,4,11\}$.

Лемма 1. *Пусть* a,b,c,d *– кратности собственных значений* $-3,-2,-1,4$. *Тогда* $a=15$, $b=0$, $c=14$, $d=12$ *и* $\Gamma(u)$ *имеет спектр* $-3^{15},-1^{14},4^{12},11^{1}$.

Доказательство. Имеем равенства

$a+b+c+d+1=42$,

$-3a-2b-c+4d+11=0$,

$9a+4b+c+16d+121=462$.

Отсюда $a=-15d+195$, $b=35d-420$, $c=-21d+266$. Теперь из неравенств $a,b,c\ge 0$ следует, что $d=12$ и $\Gamma(u)$ имеет спектр $-3^{15},-1^{14},4^{12},11^{1}$. Лемма доказана.

Лемма 2. Γ *имеет числа пересечений*

$p^1_{11}=11$, $p^1_{12}=30$, $p^1_{22}=120$, $p^1_{23}=60$, $p^1_{33}=30$;

$p^2_{11}=6$, $p^2_{12}=24$, $p^2_{13}=12$, $p^2_{22}=131$, $p^2_{23}=54$, $p^2_{33}=24$;

$p^3_{12}=28$, $p^3_{13}=14$, $p^3_{22}=126$, $p^3_{23}=56$, $p^3_{33}=19$.

Доказательство. Прямые вычисления.

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $[ihl]=[uvw$, $\Omega=\Gamma_3(u)$ и $\Sigma=\Gamma_2(\Omega)$. Тогда Σ – регулярный граф степени $p^3_{23}=56$ на $k_3=90$ вершинах. Заметим, что для нашего графа $\Sigma=\Omega_2$.

Лемма 3. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=3, d(v,w)=1$. *Тогда верны равенства:*

$[122]=2r_6+14$, $[123]=-2r_6+14$, $[133]=2r_6$;

$[211]=r_6+5$, $[212]=[221]=-r_6+23$, $[222]=-2r_6+76$, $[223]=[232]=3r_6+27$, $[233]=-3r_6+29$;

$[311]=-r_6+6$, $[312]=[321]=r_6+7$, $[322]=30$, $[323]=[332]=-r_6+19$, $[333]=r_6$,

где $r_6\in\{0,1,...,6\}$.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+) с учетом равенств $S_{113}(u,v,w)=S_{131}(u,v,w)=S_{311}(u,v,w)=0$, и вводя независимую переменную $r_6=[333]$, получим равенства из заключения леммы.

По лемме 3 имеем $[322]=30$.

Лемма 4. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=3$. *Тогда верны равенства:*

$[122]=-r_{17}+28$, $[123]=[132]=r_{17}$, $[133]=-r_{17}+14$;

$[212]=[221]=-r_{17}+28$, $[213]=[231]=r_{17}$, $[222]=11r_{17}/2+14$, $[223]=[232]=-9r_{17}/2+84$, $[233]=7r_{17}/2-28$;

$[312]=[321]=r_{17}$, $[313]=[331]=-r_{17}+14$, $[322]=-9r_{17}/2+84$, $[323]=[332]=7r_{17}/2-28$, $[333]=-5r_{17}/2+32$,

где $r_{17}\in\{8,10,12\}$.

Доказательство. Упрощение формул $(+)$ как в доказательстве леммы 3.

По лемме 4 имеем $30 \le [322] = -9r_{17}/2 + 84 \le 48$.

Напомним, что $p^3_{13} = 14$, $p^3_{33} = 19$, $p^3_{23} = 56$. Для числа ребер e между $\Sigma(v)$ и $\Sigma_2(v)$ в графе Σ выполняются неравенства $990 = 14 \cdot 30 + 19 \cdot 30 \le e \le 14 \cdot 30 + 19 \cdot 48 = 1332$.

С другой стороны, имеем $e = 56(55 - \lambda)$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Sigma)$, следовательно, $17.678 \le 55 - \lambda \le 23.786$ и $31.214 \le \lambda \le 37.322$.

Лемма 5. *Пусть* $d(u,v) = 3, d(u,w) = d(v,w) = 2$. *Тогда верны равенства:*

$[121] = -r_{13} + 6$, $[122] = 6r_{12} + 9r_{13} - 2r_{14} - 24$, $[123] = -6r_{12} - 8r_{13} + 2r_{14} + 46$, $[131] = r_{13}$, $[132] = -6r_{12} - 9r_{13} + 2r_{14} + 48$, $[133] = 6r_{12} + 8r_{13} - 2r_{14} - 34$; $[211] = (7r_{12} + 9r_{13})/2 - r_{14} - 20$, $[212] = (9r_{12} - 15r_{13})/2 + r_{14} + 54$, $[213] = r_{12} + 3r_{13} - 6$, $[221] = (-9r_{12} - 9r_{13})/2 + r_{14} + 44$, $[222] = (-3r_{12} - 3r_{13})/2 + 2r_{14} + 72$, $[223] = 6r_{12} + 6r_{13} - 3r_{14} + 9$, $[231] = r_{12}$, $[232] = 6r_{12} + 9r_{13} - 3r_{14} + 5$, $[233] = -7r_{12} - 9r_{13} + 3r_{14} + 51$;

$[311] = (-7r_{12} - 9r_{13})/2 + r_{14} + 26$, $[312] = (9r_{12} + 15r_{13})/2 - r_{14} - 30$, $[313] = -r_{12} - 3r_{13} + 18$, $[321] = (9r_{12} + 11r_{13})/2 - r_{14} - 26$, $[322] = (-9r_{12} - 15r_{13})/2 + 83$, $[323] = 2r_{13} + r_{14} - 1$, $[331] = -r_{12} - r_{13} + 12$, $[332] = r_{14}$, $[333] = r_{12} + r_{13} - r_{14} + 7$,

где $r_{12} \in \{0,1,...,12\}$, $r_{13} \in \{0,1,...,6\}$, $r_{14} \in \{0,1,...,19\}$, $r_{12} + r_{13}$ *четно.*

Доказательство. Упрощение формул $(+)$ как в доказательстве леммы 3.

По лемме 5 имеем $0 \le [322] = (-9r_{12} - 15r_{13})/2 + 83 \le 83$. Так как $\Sigma(v) \cup \Sigma(w)$ содержит 112 вершин, то $22 \le [322] \le 83$ и $(9r_{12} + 15r_{13})/2 \le 61$.

Пусть $d(u,v) = 3$.

Найдем число d_2 пар вершин (y,z) на расстоянии 1, где $y \in \begin{Bmatrix} uv \\ 31 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 32 \end{Bmatrix}$. По лемме 2 имеем $[332] = -r_6 + 19$, где $r_6 \in \{0,1,...,6\}$, поэтому $182 = 14 \cdot 13 \le d_2 \le 14 \cdot 19 = 266$. С другой стороны, по лемме 3 имеем $[312] = r_{17}$, поэтому $182 \le d_2 = \sum_i r^i_{17} \le 266$ и $9.57 \le \sum_i r^i_{17}/19 \le 14$.

Найдем число f_1 пар вершин (y,z) на расстоянии 2, где $y \in \begin{Bmatrix} uv \\ 31 \end{Bmatrix}$ и $z \in \begin{Bmatrix} uv \\ 32 \end{Bmatrix}$. По лемме 3 имеем $[321] = r_6 + 7$, где $r_6 \in \{0,1,...,6\}$, поэтому $98 = 14 \cdot 7 \le d_3 \le 14 \cdot 13 = 182$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[311] = (-7r_{12} - 9r_{13})/2 + r_{14} + 26$, поэтому $98 \le f_1 = -\sum_i (7r^i_{12}/2 + 9r^i_{13}/2 - r^i_{14}) + 1456 \le 182$, $1274 \le \sum_i (7r^i_{12}/2 + 9r^i_{13}/2 - r^i_{14}) \le 1358$ и $67.05 \le \sum_i (7r^i_{12}/2 + 9r^i_{13}/2 - r^i_{14})/56 \le 71.47$. Отсюда $67.05 \le \sum_i (7r^i_{12}/2 + 9r^i_{13}/2 - r^i_{14})/56 \le 69$.

Найдем число f_2 пар вершин (y,z) на расстоянии 2, где $y \in \{uv$ и $z \in \{uv$. По лемме 3 имеем $[322] = 30$, поэтому $f_2 = 14 \cdot 30 = 420$. С другой стороны, по лемме 5 имеем $[312] = (9r_{12} + 15r_{13})/2 - r_{14} - 30$, поэтому $f_2 = \sum_i (9r^i_{12}/2 + 15r^i_{13}/2 - r^i_{14}) - 1680 = 420$, $\sum_i (9r^i_{12}/2 + 15r^i_{13}/2 - r^i_{14}) = 2100$ и $\sum_i (9r^i_{12}/2 + 15r^i_{13}/2 - r^i_{14})/56 = 37.5$. Противоречие с тем, что

$$67.05 \le \sum_i (7r^i_{12}/2 + 9r^i_{13}/2 - r^i_{14})/56 \le 69.$$

Теорема 1 доказана.

Граф с массивом пересечений $\{105,72,24;1,12,70\}$. Дистанционно регулярный граф Γ с массивом пересечений $\{105,72,24;1,12,70\}$ имеет спектр $105^1, 35^{51}, 3^{441}, -7^{459}$, $1 + 105 + 630 + 216 = 952$ вершин и матрицу собственных значений

$$Q=\begin{pmatrix} 1 & 51 & 441 & 459 \\ 1 & 17 & \frac{63}{5} & -\frac{153}{5} \\ 1 & 0 & -\frac{56}{5} & \frac{51}{5} \\ 1 & -\frac{17}{2} & \frac{49}{2} & -17 \end{pmatrix}.$$

Порядок клики Дельсарта K равен 16, а любая вершина вне K смежна с 0 или $16+b_1/(\theta_3+1)=4$ вершинами из K. Многочлен Тервиллигера графа Γ равен $-6(x+3)(x+1)(x-11)(x-17)$, и спектр локального подграфа $\Gamma(u)$ определяется однозначно: $\{32^1, 11^{15}, -1^{35}, -3^{54}$. Порядок коклики Хофмана C из $\Gamma(u)$ равен $105\cdot 3/35=9$, причем любая вершина из $\Gamma(u)-C$ смежна с 3 вершинами из C. Если u принадлежит клике Дельсарта K из Γ, то либо $\{w\}=K\cap C$ и число ребер между K и C равно $6\cdot 3=14\cdot 2$, либо K не пересекает C и число ребер между K и C равно $7\cdot 3=15\cdot 3$. В любом случае имеем противоречие. Значит, либо u не принадлежит кликам Дельсарта из Γ, либо $\Gamma(u)$ не содержит коклик Хофмана.

Лемма 6. Γ *имеет числа пересечений*

$p^1_{11}=32$, $p^1_{12}=72$, $p^1_{22}=414$, $p^1_{23}=144$, $p^1_{33}=72$;

$p^2_{11}=12$, $p^2_{12}=69$, $p^2_{13}=24$, $p^2_{22}=416$, $p^2_{23}=144$, $p^2_{33}=48$;

$p^3_{12}=70$, , $p^3_{22}=420$, $p^3_{23}=140$, $p^3_{33}=40$.

Доказательство. Прямые вычисления.

Пусть u,v,w – вершины графа Γ, $[ihl]=[uvw$, $\Omega=\Gamma_2(u)$ и $\Lambda=\Gamma_2(\Omega)$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p^2_{22}=416$ на $k_3=630$ вершинах. Заметим, что для нашего графа $\Lambda=\Omega_2$.

Пусть u,v,w – вершины графа $p^3_{13}=35$ Γ, $[ihl]=[uvw$, $\Delta=\Gamma_2(u)$ и $\Lambda=\Gamma_2(\Delta)$. Тогда Λ – регулярный граф степени $p^2_{22}=416$ на $k_3=630$ вершинах. Заметим, что для нашего графа $\Lambda=\Delta_2$.

Лемма 7. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=1$. *Тогда верны равенства:*

$[111]=r_3/12-r_4/6+6$, $[112]=[121]=-r_3/12+r_4/6+6$, $[122]=13r_3/12-r_4/6+39$, $[123]=[132]=-r_3+24$, $[133]=r_3$;

$[211]=5r_3/12+r_4/6+14$, $[212]=[221]=-5r_3/12-r_4/6+54$, $[222]=-7r_3/12-5r_4/6+290$, $[223]=[232]=r_3+r_4+72$, $[233]=-r_3-r_4+72$;

$[311]=-r_3/2+12$, $[312]=[321]=r_3/2+12$, $[322]=-r_3/2+r_4+84$, $[323]=[332]=-r_4+48$, $[333]=r_4$,

где $r_3\in\{0,2,...,24\}$, $r_4\in\{0,1,...,48\}$, $r_3/2-r_4$ *делится на* 6.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+), с учетом равенств $S_{113}(u,v,w)=S_{131}(u,v,w)=S_{311}(u,v,w)=0$, и вводя независимые переменные $r_3=[133]$, $r_4=[333]$, получим равенства из заключения леммы.

Если $r_4=48$, то $[111]=r_3/12-2$, $[112]=[121]=-r_3/12+14$, поэтому $r_3=24$ и $[112]=[121]=12$.

По лемме 7 имеем $236\le[222]=-7r_3/12-5r_4/6+290\le 290$.

Лемма 8. *Пусть* $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=3$. *Тогда верны равенства:*

$[112]=-r_{14}+12$, $[113]=r_{14}$, $[121]=-r_{12}/9+r_{13}/2-r_{14}/3+140/9$, $[122]=r_{12}/3-r_{13}/2+$ $+2r_{14}+31/3$, $[123]=-2r_{12}/9-5r_{14}/3+388/9$, $[131]=r_{12}/9-r_{13}/2+r_{14}/3-32/9$, $[132]=r_{12}/3+$ $+r_{13}/2-r_{14}+140/3$, $[133]=2r_{12}/9+2r_{14}/3-172/9$;

$[212]=r_{13}+r_{14}+34$, $[213]=-r_{13}-r_{14}+35$, $[221]=r_{12}/3-r_{13}/2-r_{14}+70/3$, $[222]=-r_{12}-r_{13}-r_{14}+382$, $[223]=2r_{12}/3+3r_{13}/2+2r_{14}+32/3$, $[231]=-r_{12}/3+r_{13}/2+r_{14}+137/3$, $[232]=r_{12}$, $[233]=-2r_{12}/3-r_{13}/2-r_{14}+292/3$;

$[312]=-r_{13}+24$, $[313]=r_{13}$, $[321]=-2r_{12}/9+4r_{14}/3+280/9$, $[322]=2r_{12}/3+3r_{13}/2-r_{14}+80/3$, $[323]=-4r_{12}/9-3r_{13}/2-r_{14}/3+776/9$, $[331]=2r_{12}/9-4r_{14}/3-64/9$, $[332]=-2r_{12}/3-r_{13}/2+r_{14}+280/3$, $[333]=4r_{12}/9+r_{13}/2+r_{14}/3-344/9$,

где $r_{12}\in\{68,77,...,140\}$, $r_{13}\in\{0,2,...,22\}$, $r_{14}\in\{0,1,...,12\}$, *либо* r_{12} *сравнимо с* 5 *по модулю* 9 *и* r_{14} *делится на* 3, *либо* r_{12} *сравнимо с* 2 *по модулю* 9 *и* r_{14} *сравнимо с* 1 *по модулю* 3, *либо* r_{12} *сравнимо с* 8 *по модулю* 9 *и* r_{14} *сравнимо с* -1 *по модулю* 3.

Доказательство. Решая систему линейных уравнений, заданных формулами (+), как в доказательстве леммы 7, получим равенства из заключения леммы.

Равенство $[333]=4r_{12}/9+r_{13}/2+r_{14}/3-344/9$ влечет

$$4r_{12}/9+r_{13}/2+r_{14}/3=4r_{12}'/9+r_{13}'/2+r_{14}'/3.$$

Лемма 9. Пусть $d(u,v)=d(u,w)=2, d(v,w)=3$. Тогда $77\le r_{12}\le 131$.

Доказательство. Если $r_{12}=140$, то $[232]'=r_{12}'=[223]=3r_{13}/2+2r_{14}+104$. Далее, $[233]=-r_{13}/2-r_{14}+4$, поэтому $r_{13}/2+r_{14}\le 4$. Из равенства $[132]=r_{13}/2-r_{14}$ следует, что $r_{14}\le r_{13}/2$ и $r_{14}\le 2$. Теперь равенство $[123]=-5r_{14}/3+12$ влечет $r_{14}=0, r_{13}\le 8$ и $[113]'=r_{14}'=[131]=12-r_{13}/2\ge 8$. Имеем $[332]=-r_{13}/2$, $r_{13}=0$, $[231]=r_{13}/2-1$, противоречие.

Если $r_{13}=r_{14}=0$, то равенство $[121]=-r_{12}/9+r_{13}/2-r_{14}/3+140/9$ влечет $r_{12}=140$, противоречие.

Если $r_{12}=68$, то $[133]=2r_{14}/3-4$, поэтому $r_{14}\ge 6$, $[331]=8-4r_{14}/3$ и $r_{14}\le 6$. Отсюда $r_{14}=6$, следовательно, $[133]=[331]=0$. Далее, $[333]=r_{13}/2-6$, поэтому $r_{13}\ge 12$, $[131]=6-r_{13}/2$ и $r_{13}\le 12$. Отсюда $r_{13}=12$ и $[333]=[131]=0$. Теперь $[313]'=r_{13}'=[331]=0$, $[113]'=r_{14}'=[131]=0$, противоречие. Итак, $r_{12}\in\{77,86,...,131\}$.

По леммам 8 и 9 имеем $-131-22-12+382=217\le[222]=-r_{12}-r_{13}-r_{14}+382\le 305$.

Напомним, что $p^2_{12}=69$, $p^2_{22}=416$, $p^2_{23}=144$. Для числа ребер e между $\Lambda(v)$ и $\Lambda_2(v)$ в графе Λ выполняются неравенства $47532=69\cdot 236+144\cdot 217\le e\le 69\cdot 290+144\cdot 305=63930$.

С другой стороны, имеем $e=416(415-\lambda)$, где λ – среднее значение параметра $\lambda(\Lambda)$, следовательно, $114.259\le 415-\lambda\le 153.878$ и $261.122\le\lambda\le 300.741$.

Лемма 10. Пусть $d(u,v)=d(u,w)=d(v,w)=2$. Тогда верны равенства:

$[111]=-r_{10}/6-r_{11}/6+r_7/12+r_8/2+r_9/3$, $[112]=r_{10}/6+r_{11}/6-r_7/12-3r_8/2-r_9/3+12$, $[113]=r_8$, $[121]=r_{10}/6+r_{11}/6+5r_7/12-3r_8/2-5r_9/6+12$, $[122]=-r_{10}/6-13r_{11}/6-5r_7/12+9r_8/2+11r_9/6+33$, $[123]=2r_{11}-3r_8-r_9+24$, $[131]=-r_7/2+r_8+r_9/2$, $[132]=2r_{11}+r_7/2-3r_8-3r_9/2+24$, $[133]=-2r_{11}+2r_8+r_9$;

$[211]=r_{10}/6-5r_{11}/6-r_7/12-r_8/2-r_9/3+12$, $[212]=-r_{10}/6+5r_{11}/6+13r_7/12+3r_8/2+r_9/3+33$, $[213]=-r_7-r_8+24$, $[221]=-r_{10}/6+5r_{11}/6-5r_7/12+3r_8/2+11r_9/6+33$, $[222]=-5r_{10}/6+7r_{11}/6-7r_7/12-9r_8/2-17r_9/6+310$, $[223]=r_{10}-2r_{11}+r_7+3r_8+r_9+72$, $[231]=r_7/2-r_8-3r_9/2+24$, $[232]=r_{10}-2r_{11}-r_7/2+3r_8+5r_9/2+72$, $[233]=-r_{10}+2r_{11}-2r_8-r_9+48$;

$[311]=r_{11}$, $[312]=-r_{11}-r_7+24$, $[313]=r_7$, $[321]=-r_{11}-r_9+24$, $[322]=r_{10}+r_{11}+r_7+r_9+72$, $[323]=-r_{10}-r_7+48$, $[331]=r_9$, $[332]=-r_{10}-r_9+48$, $[333]=r_{10}$,

где $r_7,r_9\le\{0,2,...,24\}$, $r_8,r_{11}\in\{0,1,...,12\}$, $r_{10}\in\{0,1,...,40\}$, $r_7+r_8, r_7+r_{11}, r_9+r_{11}\le 24$, r_7,r_9 четны, $r_7+r_9-r_{10}-r_{11}$ делится на 3.

Доказательство. Упрощение формул $(+)$ как в доказательстве леммы 9.

Симметризация $[113]=r_8=r_8^*$, $[311]=r_{11}=r_{11}'$, $[313]=r_7=r_7^{\sim}$, $[331]=r_9=r_9^*$, $[333]=r_{10}=r_{10}'=r_{10}^*=r_{10}^{\sim}$, далее, $[131]=-r_7/2+r_8+r_9/2=[131]^{\sim}=-r_7^{\sim}/2+r_8^{\sim}+r_9^{\sim}/2$, поэтому $r_8+r_9/2=r_8^{\sim}+r_9^{\sim}/2$, $[133]=-2r_{11}+2r_8+r_9=-2r_{11}'+2r_8'+r_9'$ и $2r_8+r_9=2r_8'+r_9'$.

Аналогично, $[113]=r_8=[311]^{\sim}=r_{11}^{\sim}$, $[313]=r_7=[331]'=r_9'$, $[132]=2r_{11}+r_7/2-3r_8-$ $-3r_9/2+24=[312]^*=-r_{11}^*-r_7^*+24$, поэтому $2r_{11}+r_{11}^*+r_7^*+r_7/2=3r_8+3r_9/2$, $[213]=-r_7-r_8+$ $+24=[123]^*=2r_{11}^*-3r_8^*-r_9^*+24$ и $2r_8+r_9=2r_{11}^*+r_7$.

Имеем $[112]=r_{10}/6+r_{11}/6-r_7/12-r_8/2-r_9/3+12=[121]'=r_{10}'/6+r_{11}'/6+5r_7'/12-3r_8'/2-$ $-5r_9'/6+12$, поэтому $r_7-2r_8=r_9-2r_8'$.

По лемме 10 имеем $111=\leq[222]=-5r_{10}/6+7r_{11}/6-7r_7/12-9r_8/2-17r_9/6+310\leq 324$. Так как $\Lambda(v)\cup\Lambda(w)$ содержит 832 из 630 вершин, то $202\leq[222]\leq 324$ и $5r_{10}/6-7r_{11}/6+7r_7/12+9r_8/2+17r_9/6\leq 91$.

Пусть $d(u,v)=2$.

Найдем число f_1 пар вершин (y,z) на расстоянии 1, где $y\in\begin{Bmatrix}uv\\21\end{Bmatrix}$ и $z\in\begin{Bmatrix}uv\\22\end{Bmatrix}$. По лемме 9 имеем $[221]=-5r_3/12-r_4/6+54$, где $r_3\in\{0,2,...,24\}$, $r_4\in\{0,1,...,48\}$, поэтому $2553=69\cdot 37\leq$ $\leq f_3\leq 69\cdot 54=3726$. По лемме 11 имеем $[211]=r_{10}/6-5r_{11}/6-r_7/12-r_8/2-r_9/3+12$, поэтому $2553\leq f_1=-\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+r_7^i/12+r_8^i/2+r_9^i/3)+4992\leq 3726$, $2439\leq\sum(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+$ $+r_7^i/12+r_8^i/2+r_9^i/3)\leq 2553$ и $5.935\leq\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+r_7^i/12+r_8^i/2+r_9^i/3)/416\leq 6.137$.

Найдем число f_2 пар вершин (y,z) на расстоянии 2, где $y\in\begin{Bmatrix}uv\\21\end{Bmatrix}$ и $z\in\begin{Bmatrix}uv\\22\end{Bmatrix}$. По лемме 9 имеем $236\leq[222]\leq 290$, поэтому $16284=69\cdot 236\leq f_3\leq 69\cdot 290=20010$. По лемме 11 имеем $[212]=-r_{10}/6+5r_{11}/6+13r_7/12+3r_8/2+r_9/3+33$, поэтому $16284\leq f_2=\sum_i(-r_{10}^i/6+$ $+5r_{11}^i/6+13r_7^i/12+3r_8^i/2+r_9^i/3)+13728\leq 20010$, $2556\leq\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+13r_7^i/12+3r_8^i/2+$ $+r_9^i/3)\leq 6282$ и $4.953\leq\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+13r_7^i/12+3r_8^i/2+r_9^i/3)/416\leq 15.101$.

Найдем число f_3 пар вершин (y,z) на расстоянии 3, где $z\in\begin{Bmatrix}uv\\22\end{Bmatrix}$ и $z\in\begin{Bmatrix}uv\\22\end{Bmatrix}$. По лемме 9 имеем $[223]=r_3+r_4+72$, где $r_3\in\{0,2,...,24\}$, $r_4\in\{0,1,...,48\}$, поэтому $4968=69\cdot 72\leq f_3\leq 69\cdot 144=9936$. По лемме 11 имеем $[213]=-r_7-r_8+24$, поэтому $4968\leq f_3=-\sum_i(r_7^i+r_8^i)+9984\leq 9936$, $48\leq\sum_i(r_7^i+r_8^i)\leq 5016$ и $0.115\leq\sum_i(r_7^i+r_8^i)/416\leq 12.058$.

Сложив неравенства $5.935\leq\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+r_7^i/12+r_8^i/2+r_9^i/3)/416\leq 6.137$ и $0.115\leq\sum_i(r_7^i+r_8^i)/416\leq 12.058$, получим

$$6.05\leq\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+13r_7^i/12+3r_8^i/2+r_9^i/3)/416\leq 18.195.$$

Таким образом, $6.05\leq\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+13r_7^i/12+3r_8^i/2+r_9^i/3)/416\leq 15.101$. Равенство $[211]=r_{10}/6-5r_{11}/6-r_7/12-r_8/2-r_9/3+12$ влечет

$0\leq\sum_i(-r_{10}^i/6+5r_{11}^i/6+r_7^i/12+r_8^i/2+r_9^/3)/416\leq 12$ и $6.05\leq\sum_i(r_7^i+r_8^i)/416\leq 3.101$, противоречие.

Теорема 2 доказана.

Исследование выполнено при поддержке Естественно научного фонда Китая (проект № 12171126) и гранта Лаборатории инженерного моделирования и статистических вычислений провинции Хайнань.

Литература

1. Koolen, J. H. Shilla distance-regular graphs / J. H. Koolen, J. Park // European Journal of Combinatorics. – 2010. – V. 31, № 8. – P. 2064–2073.

2. Белоусов, И. Н. Дистанционно регулярные графы Шилла с $b_2 = sc_2$ / И. Н. Белоусов // Труды ИММ УрО РАН. – 2018. – Т. 24, № 3. – С. 16–26.

3. Белоусов, И. Н. Некоторые графы Шилла с $b = 4$ не существуют / И. Н. Белоусов, А. А. Махнев, Цэннь-чжуй Цай // Известия Гомельского гос. ун-та им. Ф. Скорины. – 2021. – Т. 129, № 6. – С. 110–114.

4. Белоусов, И. Н. Некоторые графы Шилла с $b = 5$ не существуют / И. Н. Белоусов, А. А. Махнев, Хайян Ли // Вестник Пермского гос. ун-та. – 2021. – Т. 12, № 4. – С. 211–218.

5. Белоусов, И. Н. Дистанционно регулярные графы с массивами пересечений $\{42, 30, 12; 1, 6, 28\}$ и $\{60, 45, 8; 1, 12, 50\}$ не существуют / И. Н. Белоусов, А. А. Махнев // Сиб. электрон. матем. известия. – 2018. – Т. 15. – С. 1506–1512.

6. Белоусов, И. Н. Дистанционно регулярный граф с массивом пересечений $\{105, 72, 24; 1, 12, 70\}$ не существует / И. Н. Белоусов, А. А. Махнев // Сиб. электрон. матем. известия. – 2019. – Т. 16. – С. 206–216.

7. Coolsaet, K. Using equality in the Krein conditions to prove nonexistence of sertain distance-regular graphs / K. Coolsaet, A. Jurišic // J. Comb. Theory. Series A. – 2008. – V. 115. – P. 1086–1095.

8. Distance-Regular Graphs / A. E. Brouwer, A. N. Cohen, A. Neumaier. – Berlin–New-York : Springer-Verlag, 1989. – 156 p.

9. Gavrilyuk, A. A characterization of the graphs of bilinear $d \times d$-forms over F_2 / A. Gavrilyuk, J. Koolen// Combinatorica. – 2019. – V. 39, № 2. – P. 289–321.

[1]Школа науки,
Университет провинции Хайнань

[2]Институт математики и
механики УрО РАН

[3]Уральский федеральный университет

Поступила в редакцию 24.01.2023