Известия Гомельского государственного университета
имени Ф. Скорины, № 3 (138), 2023

Краткие сообщения

УДК 512.542

О пересечении ненильпотентных максимальных подгрупп в группах с операторами

Р.В. Бородич, М.В. Селькин, Е.Н. Бородич, А.В. Бузланов, И.В. Близнец

В работе исследовано строение подгруппы, равной пересечению ядер не p-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп группы G без одного класса сопряжённых подгрупп. Установлены свойства соответствующей обобщенной подгруппы Фраттини.
Ключевые слова: конечная группа, p-нильпотентная подгруппа, абнормальная подгруппа, группа операторов.

The structure of the subgroup, equal to the intervention of the nucleus of non-p-nilpotent abnormal maximal subgroups of the group G without one class of conjugate subgroups is studied. The properties of the general Frattini subgroup are established.
Keywords: finite group, p-nilpotent subgroup, abnormal subgroup, group of operators.

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются конечными. Одно из классических направлений в исследовании конечных групп связано с задачей о свойствах пересечений заданных максимальных подгрупп и исследовании влияния этих свойств на подгрупповое и нормальное строение группы. Важную роль в теории конечных групп занимает подгруппа Фраттини, введенная впервые в работе [1]. Теорема Фраттини получила развитие во многих направлениях (см. монографии [2] и [3]). Одно из направлений теории пересечений связано с исследованием пересечений максимальных подгрупп, не принадлежащих заданному классу групп. Эта задача рассматривалась в работах М.В. Селькина [3], Л.И. Шидова [4], В.В. Шлыка [5], А. Гилотти и У. Тиберио [6]. К данному направлению относится и настоящая работа.

В работе будет использоваться понятие максимальной A-допустимой подгруппы. С необходимыми определениями и обозначениями можно ознакомиться в работе [7].

Следует отметить, что не каждая максимальная подгруппа обязана быть одновременно максимальной A-допустимой подгруппой. С другой стороны, не всякая максимальная из A-допустимых подгрупп группы будет одновременно максимальной подгруппой в обычном смысле [8].

Обозначим через $\overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G,A)$ пересечение ядер всех не p-нильпотентных абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, не сопряженных с некоторой A-допустимой максимальной подгруппой. А через $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\Theta_1}(G,A)$ пересечение ядер всех ненильпотентных абнормальных максимальных A-допустимых подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной A-допустимой подгруппой. Всегда будем полагать, что пересечение пустого множества подгрупп из G совпадает с самой группой G.

Лемма 1 [9]. *Пусть p – простое нечётное число. Группа G является p-нильпотентной тогда и только тогда, когда для любой подгруппы P, характеристической в некоторой силовской p-подгруппе группы G, $N_G(P)/C_G(P)$ – p-подгруппа.*

Теорема 1. *Пусть $p > 2$, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|,|A|) = 1$ и Θ_1 – подгрупповой функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых подгрупп и саму группу. Тогда для любой не p-разрешимой группы G справедливо $\overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G,A)/P \subseteq \Delta(G/P,A)$, где P – нормальная A-допустимая p-подгруппа группы G.*

Доказательство. Обозначим $D = \overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G, A)$ Пусть P – A-допустимая силовская p-подгруппа из D, не содержащаяся в максимальной A-допустимой Θ_1-подгруппе M. По лемме Фраттини $G = DN_G(P)$.

Предположим, что $N_G(P) \neq G$. Пусть R – максимальная A-допустимая подгруппа группы G такая, что $N_G(P) \subseteq R$. Из абнормальности $N_G(P)$ следует, что R является абнормальной. Так как $G = DR$, то либо R p-нильпотентна либо не p-нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной A-допустимой подгруппой M. Если предположить, что R – не p-нильпотентная подгруппа, сопряженная с максимальной A-допустимой подгруппой M, то в силу того, что $|G: M| \neq |G: K|$, получаем противоречие. Остается заключить, что R – p-нильпотентная подгруппа группы G. Следовательно, $N_G(P)$ – p-нильпотентная подгруппа.

Если D p-нильпотентна, то нетрудно видеть, что группа G p-разрешима. Противоречие.

Будем считать, что D не p-нильпотентна. Тогда по лемме 1 найдётся характеристическая подгруппа P^* из P такая, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ – не p-группа. Так как $N_G(P) \subseteq N_G(P^*)$, то $G = DN_G(P^*)$.

Возможны случаи $N_G(P^*) = G$, либо $N_G(P^*)$ p-нильпотентна. Так как $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ не p-группа, то второй случай невозможен. Остаётся принять, что $N_D(P^*)/C_D(P^*)$ – не p-группа и $P^* \lhd G$.

Пусть P^* – максимальная A-допустимая подгруппа среди характеристических подгрупп группы P, обладающая отмеченными выше свойствами. Так как $N_G(P)$ p-нильпотентна, то $P^* \subset P$. Пусть P_0/P^* – характеристическая подгруппа группы P/P^*. Тогда P_0 характеристична в P и $P^* \subset P_0$. Ввиду выбора подгруппы P^* получаем, что $N_D(P_0)/C_D(P_0)$ – p-группа.

Заметим, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*) = N_D(P_0)/P^*$ и $C_D(P_0)P^*/P^* \subseteq C_{D/P^*}(P_0/P^*)$. Отсюда получаем, что $N_{D/P^*}(P_0/P^*)/C_{D/P^*}(P_0/P^*)$ – p-группа. Следовательно, по лемме 1 группа D/P^* является p-нильпотентной. Но тогда D является p-разрешимой группой. Отсюда и из p-разрешимости G/D следует p-разрешимость и самой группы G. Противоречие. Остаётся заключить, что P – нормальная p-подгруппа группы G.

Так как $M\hat{\cup}P$, то несложно заметить, что $\overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G, A)/P \subseteq \Delta(G/P, A)$. Теорема доказана.

Следствие 1.1. *Пусть $p > 2$, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и Θ_1 – $\mathfrak{m}$-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых подгрупп и саму группу. Тогда в любой не p-разрешимой группе G существует нормальная A-допустимая p-подгруппа P такая, что $\overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G, A)/P \in \mathfrak{N}$.*

Следствие 1.2. *Пусть $p > 2$, группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и Θ_1 – $\mathfrak{m}$-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых подгрупп и саму группу. Тогда в любой не p-разрешимой группе G подгруппа $\overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G, A) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$.*

Следствие 1.3. *В любой не p-разрешимой группе G, $p > 2$ подгруппа, равная пересечению не p-нильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

Теорема 2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и Θ_1 – $\mathfrak{m}$-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых подгрупп и саму группу. Тогда для любой неразрешимой группы G справедливо $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\Theta_1}(G, A)/P \subseteq \Delta(G/P, A)$, где P – нормальная p-подгруппа группы G.*

Доказательство. Несложно заметить, что

$$\overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G, A) \supseteq \overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\Theta_1}(G, A) \supseteq \Delta(G, A).$$

Если G не разрешима, то G не p-разрешима для некоторого $p \in \pi(G)$. Если $p > 2$, то по теореме 1 $\overline{\Delta}^{p}_{\Theta_1}(G, A)/P \subseteq \Delta(G/P, A)$, а следовательно, $\overline{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\Theta_1}(G, A)/P \subseteq \Delta(G/P, A)$. Пусть G p-разрешима для любого нечётного $p \in \pi(G)$. Нетрудно видеть, что в этом случае G является разрешимой.

Следствие 2.1. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и Θ_1 – $\mathfrak{m}$-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе G существует нормальная A-допустимая p-подгруппа P такая, что $\bar{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\Theta_1}(G, A)/P \in \mathfrak{N}$.*

Следствие 2.2. *Пусть группа G имеет группу операторов A такую, что $(|G|, |A|) = 1$ и Θ_1 – $\mathfrak{m}$-функтор, выделяющий в каждой группе один класс сопряжённых подгрупп и саму группу. Тогда в любой неразрешимой группе подгруппа $\bar{\Delta}^{\mathfrak{N}}_{\Theta_1}(G, A) \in \mathfrak{N}_p\mathfrak{N}$.*

Следствие 2.4. *В любой неразрешимой группе G подгруппа, равная пересечению ненильпотентных абнормальных максимальных подгрупп, не сопряженных с некоторой максимальной подгруппой, метанильпотентна.*

Литература

1. Frattini, G. Intorno alla generasione dei gruppi di operazioni / G. Frattini // Atti Acad. Dei Lincei. – 1885. – Vol. 1. – P. 281–285.

2. Шеметков, Л. А. Формации конечных групп / Л. А. Шеметков. – М. : Наука, 1978. – 272 с.

3. Селькин, М. В. Максимальные подгруппы в теории классов конечных групп / М. В. Селькин. – Мн. : Беларуская навука, 1997. – 144 с.

4. Шидов, Л. И. О максимальных подгруппах конечных групп / Л. И. Шидов // Сиб. матем. журн. – 1971. – Т. 12, № 3. – С. 682–683.

5. Шлык, В. В. О пересечении максимальных подгрупп в конечных группах / В. В. Шлык // Матем. заметки. – 1973. – Т. 14, № 3. – С. 429–439.

6. Gilotti, A. On the intersection of maximal non-supersoluble subgroups in a finite group / A. Gilotti, U. Tiberio // Bollettino U.M.I. – 2000. – V. 8, № 3-B. – P. 691–698.

7. Бородич, Р. В. О пересечении максимальных подгрупп конечных групп / Р. В. Бородич // Укр. мат. журн. – 2019. – Т. 71, № 11. – С. 1455–1465.

8. Borodich, R. V. A generalized Frattini subgroup / R. V. Borodich // Asian-European Journal of Mathematics. – 2019. – № 14 (02). – DOI: 10.1142 / S1793557121500261

9. Thompson, J. G. Normal *p*-complements for finite groups / J. G. Thompson // J. Algebra. – 1964. – № 1. – P. 43–46.

Гомельский государственный
университет имени Франциска Скорины

Поступила в редакцию 16.03.2023