Обсуждения

УДК 514.112 (076,2) (075,3)

Решение геометрической задачи «квадратура круга» построением с помощью циркуля и линейки без шкалы с делениями

Г.В. Говор

История развития геометрии знает ряд задач на построение, которые не имеют общепризнанных решений до наших дней. Одна из них – задача о квадратуре круга. Условием решения задачи является построение с помощью двух простых приспособлений – циркуля и линейки без шкалы с делениями. В данной статье вышеназванная задача решена в пределах точности, достигаемой с помощью обычного циркуля из готовальни, школьной линейки и остро заточенного карандаша.
Ключевые слова: квадратура круга, квадрат, число π, линейка, циркуль.

The history of the development of geometry knows a number of tasks about construction that do not have generally recognized solutions till this day. One of them, is the task of squaring a circle. The condition for solving the task is the construction using two simple devices – a compass and a ruler without a scale with divisions. In this article, the mentioned task is solved within the accuracy, achieved with the help of an ordinary compass from a case of drawing instruments, a school ruler and a sharp pencil.
Keywords: squaring a circle, regular tetragon, π, ruler, compass.

Квадратура круга – задача, заключающаяся в нахождении способа построения с помощью циркуля и линейки без шкалы с делениями квадрата, равновеликого площадью данному кругу [1]. Фактически, решение этой задачи связано с точностью определения числа π.

За тысячелетия накопилось множество значений числа π – результатов решений геометров и математиков разных стран: в древнем Египте принимали значение **πЕ** равным ≈ 3,1604, в Греции **πГ** ≈ 3,1428, в Китае **πК** ≈ 3,1415, в Индии **πИ** ≈ 3,162 и т. д.

Характерно, что многие математики не пытались строить геометрически равновеликий по площади кругу квадрат. Одни делили окружность на правильные многоугольники, другие искали решения в сакральной геометрии и т. д. Простейший механический способ предложил Леонардо да Винчи: изготовим круговой цилиндр с радиусом основания R и высотой R/2, намажем чернилами боковую поверхность этого цилиндра и прокатим его по плоскости. За один полный оборот цилиндр отпечатает на плоскости прямоугольник площадью πR^2. Располагая таким прямоугольником уже несложно построить равновеликий ему квадрат.

Из теоремы Линдемана [2] также следует, что решить задачу о квадратуре круга нельзя не только циркулем и линейкой, то есть с помощью прямых и окружностей, но и с помощью любых других алгебраических кривых и поверхностей (например, эллипсов, гипербол, кубических парабол и т. п.). Следовательно, по нашему мнению, геометрическое решение может быть только приближённым.

Важным этапом в исследовании проблемы стало сочинение Архимеда «Измерение круга», в котором впервые строго доказана теорема: площадь круга равна площади прямоугольного треугольника, у которого один катет равен радиусу круга, а другой – длине окружности. Это означало, что если удастся осуществить спрямление окружности, то есть построить отрезок такой же длины, то задача о квадратуре круга будет решена [3].

Учитывая опыт предшествующих поколений геометров, мы решали задачу двумя способами:

1) Геометрическим построением квадрата, равновеликого площадью данному кругу, при помощи циркуля и линейки без шкалы с делениями. Исходные предпосылки для решения задачи таким построением нами основаны на поиске точки на общей диагонали, проведённой через вершины вписанного и описывающего данный круг квадратов. Вписанный квадрат заведомо меньше, а описанный – заведомо больше площади искомого круга. Следовательно,

эта точка, которая является одной из вершин искомого квадрата, должна лежать на общей диагонали между вершинами вписанного и описанного квадратов. Забегая вперёд, точка **К** находится где-то между точками **G** и **A** (рисунок 1). Задача будет решена, если положение точки **К** будет корректно определено.

2) Спрямлением окружности при помощи циркуля и линейки без шкалы с делениями как сформулировали решаемую задачу известные математики из глубин тысячелетий. Спрямление окружности произведём делением её на дуги и секторы уменьшением дуг в 2 раза до равенства длин хорд и дуг одного сектора в пределах заданной точности их определения. Полагаем, что точность определения длин дуг и хорд до пятого знака после запятой будет вполне достаточной для доказательства корректности решения поставленной задачи по нами проведённому алгоритму.

Итогом наших решений задачи о квадратуре круга считаем нахождение нового в геометрии числа, умножив на которое значение радиуса любого круга можно с достаточной для практики точностью определить длину одной из сторон квадрата равновеликого площадью выбранному кругу. Это число мы предложим обозначить как **Ў** (*«ў» короткое* в белорусской грамматике).

1) Алгоритм определения длины стороны искомого квадрата методом геометрического построения.

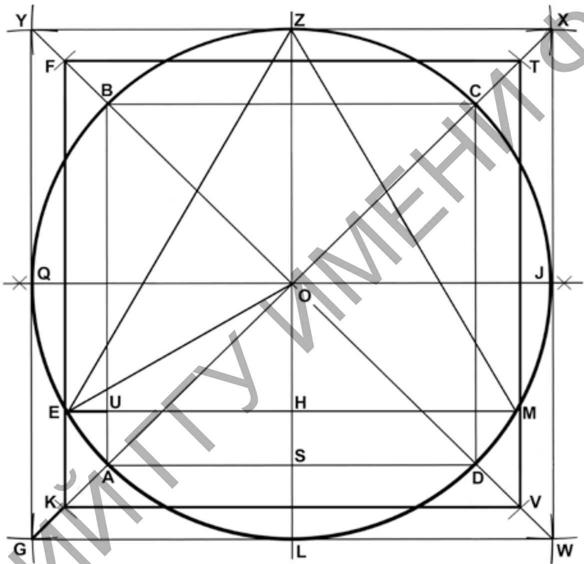

Рисунок 1 – Метод геометрического построения

1) При помощи линейки проводим вертикальную прямую – будущую вертикальную ось симметрии.

2) На этой линии произвольно отмечаем точку **O**, центр будущей окружности.

3) Ставим ножку циркуля в точку **O** и произвольным радиусом **R** строим окружность. На пересечениях её с вертикальной осью симметрии обозначаем точки **Z** и **L**.

4) Ставим ножку циркуля поочерёдно в точки **Z** и **L** и произвольным радиусом делаем в обе стороны за пределами окружности **O** по 2 засечки до пересечения друг с другом.

5) При помощи линейки соединяем точки пересечения засечек прямой, которая пересекая центр окружности образовывает горизонтальную ось симметрии с точками пересечения её с окружностью – **Q** и **J**.

6) Ставим ножку циркуля поочерёдно в точки **Z** и **L**, **Q** и **J** и делаем по 2 засечки радиусом **R** за её пределами до пересечения друг с другом, – получаем точки **G**, **Y**, **X** и **W** – вершины описанного около окружности **O** квадрата.

7) При помощи линейки последовательно соединяем точки **G**, **Y**, **X** и **W** четырьмя прямыми – получаем описанный квадрат **GYXW**.

8) При помощи линейки соединяем прямыми точки **G** и **X**, **Y** и **W** – получаем диагонали **GX** и **YW** описанного квадрата **GYXW**.

9) На пересечениях диагонали **GX** и **YW** описанного квадрата **GYXW** с окружностью **O** получаем точки **A**, **B**, **C**, **D** и, соединив их последовательно прямыми **A** с **B**, **B** с **C**, **C** с **D** и **D** с **A**, получаем вписанный квадрат **ABCD** в данную окружность **O**.

10) Ставим ножку циркуля в точку **L** и делаем две засечки радиусом **OL** на окружности **O**, получая точки **E** и **M**.

11) Соединив прямыми при помощи линейки точки **E** с **M**, **M** с **Z**, и **Z** с **E**, получаем вписанный в данную окружность **O** равносторонний треугольник **EZM**.

12) На пересечении вертикальной оси **ZL** со стороной **EM** вписанного треугольника **EZM** находим точку **H**.

Далее проводим расчёты в предположении, что радиус **R** равен **58** неких условных единиц значений, это могут быть сантиметры, метры, километры и т. п.

<u>Если R = 58; 1/2R = 29; 2R = 116; R² = 3364,</u> тогда:

13) **EO = R = 58**, **OH = 1/2R = 29**, **EH** = 1/2 стороны **EM** вписанного треугольника **EZM** будет равна: $EH^2 = EO^2 – OH^2 = 3364 – 841 = 2523$; **EH** = $\sqrt{2523}$ = **50,22947**.

14) Сторона **AD** вписанного квадрата **ABCD** будет равна:

$AD^2 = AO^2 + OD^2 = 3364 + 3364 = 6728$; **AD** = $\sqrt{6728}$ = **82,02438**; 1/2**AD** = **AS** = **41,01219**.

15) На пересечении стороны **EM** вписанного треугольника **EZM** и стороны **AB** вписанного квадрата **ABCD** находим точку **U**.

16) Длина отрезка **EU** равна разнице между отрезками **EH** и **AS**:

EU = EH – AS = 50,22947 – 41,01219 = **9,21728**.

17) Ставим ножку циркуля в точку **G** описанного квадрата **GYXW** и радиусом равным отрезку **EU** делаем засечку на диагонали **GX**, получив точку **К** и отрезок **GК**, равный отрезку **EU**.

18) Ставим ножку циркуля в точку **O** и радиусом, равным отрезку **OК**, делаем засечки на отрезках **OY**, **OX** и **OW**, получив точки **F**, **T**, и **V**, которые вместе с точкой **К** образуют вершины искомого квадрата.

19) При помощи линейки поочерёдно соединяем точки **К**, **F**, **T**, и **V** прямыми, получив искомый квадрат **КFTV**, с определённой точностью равный своей площадью площади данного круга **O**.

Чтобы доказать это сделаем некоторые расчёты:

Отрезок **КT** равен разнице диагонали **GX** описанного квадрата **GYXW** и суммы отрезков **GК** и **TX**. $GX^2 = GY^2 + YX^2 = 2R^2 + 2R^2 =$ **26912**; **GX** = $\sqrt{26912}$ = **164,04877**; **КT** = GX – – (GК + TX) = 164,04877 – 18,43456 = **145,61421**.

Если известна длина гипотенузы **КT** равностороннего прямоугольного треугольника **КFT**, то длины катетов этого треугольника находим по формуле Пифагора:

КF = $\sqrt{1/2\ КT^2} = \sqrt{10601{,}74907}$ = **102,96479**.

Площадь **SКFTV** квадрата **КFTV** равна **КF² = 10601,74797**; площадь данного круга **O** равна π**R² = 3,14159 × 3364 = 10568,30876**; отношение **SКFTV** к **SO** равно **SКFTV / SO = 1,00316 ≈ 1**.

Приемлемое для расчётов в практике архитектуры и строительства значение числа **π**Ў равно **π**Ў = **SКFTV / R² = 3,15153**.

Отношение πЎ к π равно πЎ / π = **3,15153 / 3,14159 = 1,00316 ≈ 1**.

Примечание: *число π греческое, число π****Ў*** *мы обозначили буквой* ***Ў****, как белорусское.*

Отметим, что все вышеприведённые соотношения до пятого знака после запятой справедливы при любых численных значениях радиуса **R**, что подтверждено выполненными нами расчётами.

Следовательно, задача о квадратуре круга, в соответствии с её условиями, построением квадрата, равновеликого площадью площади данного круга, геометрически решена в пределах точности, которую можно достичь с помощью обычного циркуля из готовальни, линейки без делений и остро заточенного карандаша.

Понятно, что с решением задачи о квадратуре круга и определением **π**Ў мы задержались на две тысячи лет. Однако нами показано, что геометрически с помощью линейки без шкалы с делениями и циркуля из готовальни задача решаема и значение числа **π** грубо можно определить по вышепроведенному нами алгоритму. Естественно, в практике расчётов сегодня следует использовать более точное значение числа **π**, равное **3,1415926...**

2) Алгоритм определения длины окружности данного круга методом спрямления окружности.

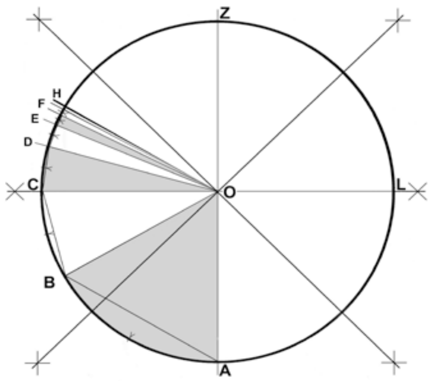

Рисунок 2 – Метод спрямления окружности

Исходные данные: R = 58, 2R = 116, R² = 3364, длина окружности **Po = 2πR = = 728,84949),** начинаем спрямление окружности данного круга с деления её на дуги и секторы пошаговым уменьшением дуг в 2 раза:

1) Ставим ножку циркуля в точку **A** и радиусом **R**, делаем засечку на окружности **O**, получив точку **B**, дугу **AB** = 1/6 **Po**, сектор **AOB** = **60º** и хорду **AB** = **R**.

2) Делим при помощи циркуля известным способом дугу **AB** на 2 равные части и делаем засечку из точки **B** радиусом равным 1/2 дуги **AB** на окружности **O**, получив точку, совпавшую с точкой **C** пересечения горизонтальной оси с окружностью **O**, дугу **BC** = 1/12 **Po**, сектор **BOC** = **30º** и хорду **BC**.

3) Делим при помощи циркуля дугу **BC** на 2 равные части и делаем засечку из точки **C** радиусом равным 1/2 дуги **BC** на окружности **O**, получив точку **D**, дугу **CD** = 1/24 **Po**, сектор **COD** = **15º** и хорду **CD**.

4) Делим при помощи циркуля дугу **CD** на 2 равные части и делаем засечку из точки **D** радиусом равным 1/2 дуги **CD** на окружности **O**, получив точку **E**, дугу **DE** = 1/48 **Po**, сектор **DOE** = **7,5º** и хорду **DE**.

5) Делим при помощи циркуля дугу **DE** на 2 равные части и делаем засечку из точки **E** радиусом равным 1/2 дуги **DE** на окружности **O**, получив точку **F**, дугу **EF** = 1/96 **Po**, сектор **EOF** = **3,75º** и хорду **EF**.

6) Ищем длины хорд **AB**, **BC**, **CD**, **DE**, **EF**:

хорда **AB = 2R**•sin **60º / 2 = 116**•sin**30º = 116•0,5 = 58**;
хорда **BC = 2R**•sin **30º / 2 = 116**•sin**15º = 116•0,258 = 30,023**;
хорда **CD = 2R**•sin **15º / 2 = 116**•sin**7,5º = 116•0,1305 = 15,141**;
хорда **DE = 2R**•sin **7,5º / 2 = 116**•sin**3,75º = 116•0,065 = 7,586**;
хорда **EF = 2R**•sin **3,75º / 2 = 116**•sin**1,875º = 116•0,032 = 3,795**;

7) Ищем длины дуг **AB**, **BC**, **CD**, **DE**, **EF** при длине окружности **O** = 2πR = **364,424** и пропорциях (**AB** = 1/6 **Po**, **BC** = 1/12 Po, **CD** = 1/24 Po, **DE** = 1/48 Po, **EF** = 1/96 Po):

дуга **AB** = **364,424** / 6 = **60,737**,
дуга **BC** = **364,424** / 12 = **30,368**,
дуга **CD** = **364,424** / 24 = **15,184**,
дуга **DE** = **364,424** / 48 = **7,592**,
дуга **EF** = **364,424** / 96 = **3,796**.

8) Ищем частное между длинами одноимённых дуг **AB**, **BC**, **CD**, **DE**, **EF** и хорд **AB**, **BC**, **CD**, **DE**, **EF**:

дугу **AB** / на хорду **AB = 60,737 / 58 = 1,04718**;
дугу **BC** / на хорду **BC = 30,368 / 30,023 = 1,01149**;
дугу **CD** / на хорду **CD = 15,184 / 15,141 = 1,00283**;
дугу **DE** / на хорду **DE = 7,592 / 7,586 = 1,00079**;
дугу **EF** / на хорду **EF = 3,796 / 3,795 = 1,00026**.

Здесь очевидна закономерность уменьшения значения частных и приближение равенства одноимённых дуги и хорды одного сектора. В связи с этой закономерностью нами созданы нижеприведённые шкалы длин дуг и хорд секторов и таблица спрямления дуг путём последовательного выравнивания длин дуг и хорд до практически полного их равенства (до пятого знака после запятой).

Шкала пропорций дуг к длине окружности О с последовательным уменьшением их в 2 раза в секторе АОН данного круга О: **1)** = 1/6 Ро, **2)** = 1/12 Ро, **3)** = 1/24 Ро, **4)** = 1/48 Ро, **5)** = 1/96 Ро, **6)** = 1/192 Ро; **7)** = 1/384 Ро, **8)** = 1/768 Ро.

Таблица – Спрямление дуг методом последовательного уменьшения их длин вдвое до полного равенства с длиной хорды общего сектора (точностью до 5-го знака после запятой при радиусе окружности R = 58)

№ сектора	Часть Ро	Угол сектора	Длина дуги сектора	Длина хорды сектора	Примечания
1	6	360º / 6 = **60º**	60,74	58 = R	
2	12	360º / 12 = **30º**	**30**,36	**30**,02	
3	24	360º / 24 = **15º**	**15,1**8	**15,1**4	
4	48	360º / 48 = **7,5º**	**7,5**9	**7,5**8	
5	96	360º / 96 = **3,75º**	**3,79**6	**3,79**5	
6	192	360º / 192 = **1,875**º	**1,89**8	**1,89**7	
7	384	360º / 384 = **0,9375**º	**0,9490**2	**0,9490**1	
8	768	360º / 768 = **0,46875**º	**0,47**451	**0,47**451	

R = 58, 1/2**R = 29. Сектор 8):** угол = 360º/768 = **0,46875º** дуга = **0,47451** хорда = **0,47451**; **Ро** = 2πR = **364,42474**; **Ро** = 8-я хорда **0, 47451** × 768 = **364,42**368; разница = **0,00**106.

Предполагаемая площадь искомого квадрата **SKFTV**, при равенстве с **So** = πR² = **10568,31768.**

По теореме Архимеда площадь **S** прямоугольного треугольника, у которого один катет равен **R**, а второй – спрямленной длине окружности **Ро** данного круга **О**, равна: **S = Ро** × 1/2**R** = = **364,42**368 × 1/2**R** = **10568**,28672; **So = 10568,31768**; **S = 10568,28672**; разница = **0,0**3096.

Следовательно, при радиусе окружности **R = 58** длина стороны **KV** искомого квадрата **KFTV** равна: **LKV** = √**SO** = √ **10568,31768 = 102,80232**.

Примечание: Отношение **R** к стороне **KV** искомого квадрата **KFTV** равно новому в геометрии найденному нами числу, которое мы предлагаем обозначить как **Ў**.

Ў = KV/R = 102,80232 / 58 = **1,77245.**

Это отношение **R** к длине стороны искомого квадрата, равновеликого площадью данному кругу, является единым для любого значения **R** данного круга.

Например: **R = 93**. Следовательно, при радиусе окружности **R = 93** длина стороны **KV** искомого квадрата **KFTV** равна: **LKV** = √**SO** = √**27171,63486** = **164,83820**; **Ў = KV/R** = = 164,83820 / 93 = **1,77245.**

Отсюда следует, что умножив радиус любого данного круга на число **Ў**, мы легко можем вычислить длину стороны искомого квадрата, равного своей площадью площади данного круга, и соответственно саму площадь искомого квадрата:

KV = R · Ў; **SKFTV = KV²**; **SKFTV = SO**.

Заключение. Задача о квадратуре круга в соответствии с её условиями решена двумя способами: путём построения квадрата, равновеликого площадью данному кругу, а также путём спрямления окружности и вычисления длины стороны искомого квадрата. Впервые найдено и введено в практику геометрических построений число **Ў**, умножив на которое значение радиуса данного круга, получаем с достаточной для практики архитектуры и строительства точностью значение площади квадрата, равновеликого площадью данному кругу.

Литература

1. Рудио, Ф. О квадратуре круга (Архимед, Гюйгенс, Ламберт, Лежандр) / Ф. Рудио. – Изд. 3-е. – М.–Л. : ОГИЗ, 1936. – 237 с.

2. Адамар, Ж. Элементарная геометрия / Ж. Адамар. – М. : ОГИЗ, 1948. – Ч. 1. – 608 с.

3. Белозеров, С. Е. Пять знаменитых задач древности (История и современная теория) / С. Е. Белозеров. – Ростов : Изд-во Ростовского ун-та, 1975. – 320 с.

Белорусский союз художников,
Союз писателей Беларуси

Поступила в редакцию 07.10.2022