УДК 621.373 : 535

К ЛУЧЕВОМУ МЕТОДУ В ТЕОРИИ ГАУССОВЫХ ПУЧКОВ

Бойцов В. Ф.

С помощью комплексной лучевой матрицы $ABCD$ для оптического резонатора с гауссовыми диафрагмами на зеркалах построена вещественная матрица, описывающая движение амплитудного центра внеосевого гауссова пучка с произвольными начальными данными. Эта матрица зависит от параметров резонатора и диафрагмы, а также от начальных данных пучка. Получен критерий устойчивости амплитудных центров пучков, распространяющихся в резонаторе. Показано, что не при всех начальных данных амплитудный центр устойчив в резонаторе. Если начальные данные соответствуют резонаторной гауссовой моде, то система амплитудных центров всегда устойчива. Для резонатора без диафрагм полученный критерий устойчивости лучей переходит в хорошо известный из теории пустых резонаторов.

Эволюцию гауссовых пучков можно описывать с помощью дифференциальных или интегральных уравнений, а также с помощью лучевых матриц. Тесная связь между этими подходами в теории резонаторов, волноводов и в вопросах распространения гауссовых пучков хорошо известна [1-3].

Закон $ABCD$ и его применение

Рассмотрим луч, проходящий через оптическую систему в сечении, определяемом перпендикулярными ортами $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$. Он характеризуется расстоянием x от идущей вдоль орта $\mathbf{z}$ оптической оси и тангенсом угла наклона α к ней. Выходные параметры луча x_2, α_2 в параксиальном приближении линейно зависят от входных параметров x_1, α_1 и могут быть выражены через лучевую матрицу передачи $ABCD$

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \alpha_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Приведем пример такой матрицы [3]

$$\begin{pmatrix} 1 & L \\ 2(g-1)L^{-1} & (2g-1) \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Если в ней положить $g = g_0$, где

$$g_0 = 1 - LR^{-1}, \tag{3}$$

то она описывает прохождение луча через свободное пространство на расстояние L и затем отражение луча от зеркала с радиусом кривизны R.

Рассмотрим гауссов пучок в сечении $(\mathbf{x}, \mathbf{z})$

$$\varphi(x, z) = \exp\left\{-ik_0\left[P(z) + \frac{1}{2}Q(z)x^2 + S(z)x\right]\right\},$$

k_0 — волновое число. Функция $\varphi(x, z)$ удовлетворяет параболическому уравнению, а комплексные функции $P(z)$, $Q(z)$ и $S(z)$ — обыкновенным дифференциальным уравнениям. Из их решений следует закон $ABCD$ — правило расчета функций $Q(z)$ и $S(z)$ через элементы матрицы $ABCD$ и начальные параметры Q и S-пучка в сечении $z=0$ [4, 5]

$$Q(z) = \frac{C + DQ}{A + BQ}, \quad S(z) = \frac{S}{A + BQ}, \tag{4}$$

при этом матрица $ABCD$ может иметь комплексные элементы. Пример такой матрицы получается из матрицы (2), если в ней положить

$$g = g_0 - iN, \tag{5}$$

где g_0 определено формулой (3), и N — вещественное неотрицательное число. В этом случае с помощью правил (4) матрица (2) описывает распространение гауссова пучка в свободном пространстве на расстояние L и затем отражение его от зеркала с радиусом кривизны R, которое обладает переменным коэффициентом отражения [6]

$$T(x) = \exp\{-k_0 L^{-1} N x^2\}. \tag{6}$$

Устойчивость амплитудного центра пучка в резонаторе

Рассмотрим линейный двухзеркальный резонатор. Если лучи, пущенные около оптической оси резонатора, многократно отражаясь от зеркал, не уходят далеко от нее, то система лучей устойчива. Такая система лучей связана с устойчивым резонатором, в котором собственные функции имеют каустики, и низшая мода представляет собой гауссов пучок.

Известно, как с помощью лучевой матрицы получить критерий устойчивости лучей в резонаторе, который совпадает с критерием устойчивости резонатора [3, 7]. В симметричном резонаторе длиной L и зеркалами с радиусами кривизны R параметры лучей преобразуются по формуле (1), где матрица $ABCD$ совпадает с матрицей (2), если в ней положить $g = g_0$ (g_0 определено формулой (3)). После n-кратного отражения луча матрице $ABCD$ соответствует n-я степень матрицы (2) с параметром $g = g_0$. Требование ограниченности ее при $n \to \infty$ приводит к критерию устойчивости системы лучей в виде широко известного в теории резонаторов неравенства: $-1 < \cos\vartheta < 1$, где $\cos\vartheta$ есть полусумма диагональных элементов матрицы (2) с параметром $g = g_0$, равная, как легко видеть, величине g_0. Указанный критерий обеспечивает также устойчивость амплитудного центра гауссова пучка при его произвольных начальных данных, поскольку он ведет себя как луч [8].

Рассмотрим теперь комплексную матрицу $ABCD$ (2), когда в ней параметр g определяется формулой (5). С помощью этой матрицы описывается симметричный резонатор с гауссовым коэффициентом отражения зеркал. Низшая мода такого резонатора имеет вид гауссовой функции, и сам резонатор устойчив [9, 10]. Получим критерий устойчивости амплитудного центра гауссова пучка в рассматриваемом резонаторе.

Пусть начальные параметры гауссова пучка, уходящего от первого зеркала, Q и S. С помощью матрицы (2) найдем $Q(L)$ и $S(L)$ — параметры пучка, уходящего от второго зеркала после отражения

$$Q(L) = \frac{Q}{1 + LQ} + \frac{2}{L}(g_0 - iN - 1), \quad S(L) = \frac{S}{1 + LQ}. \tag{7}$$

Линия амплитудного центра пучка определяется уравнением $x = d_a(z)$, где $d_a(z) = -\mathrm{Im}\, S(z)/\mathrm{Im}\, Q(z)$ [4, 5]. Для пучка, движущегося от первого зеркала ко второму,

$$d_a(z) = d_a + \alpha z, \quad d_a = -\mathrm{Im}\, S/\mathrm{Im}\, Q, \quad \alpha = \mathrm{Re}\, S + d_a \mathrm{Re}\, Q, \tag{8}$$

а от второго к первому

$$d_a(z) = d_a(L) + \alpha(L)(2L - z), \quad \alpha(L) = \mathrm{Re}\, S(L) + d_a(L)\, \mathrm{Re}\, Q(L). \tag{9}$$

Раскрывая функции $d_a(L)$ и $\alpha(L)$ через начальные значения d_a и α, находим

$$d_a(L) = K^{-1}[d_a + \alpha L], \quad \alpha(L) = K^{-1}\{d_a L^{-1}[2(g_0 - 1) + (2P - K + 1)] + \alpha[(2g_0 - 1) + 2P]\},$$

$$K = 1 - \frac{2NL}{\mathrm{Im}\, Q}[(L^{-1} + \mathrm{Re}\, Q)^2 + (\mathrm{Im}\, Q)^2], \quad K \geqslant 1, \quad P = -\frac{N}{\mathrm{Im}\, Q}(L^{-1} + \mathrm{Re}\, Q). \tag{10}$$

Таким образом, матричное преобразование, аналогичное (1), для параметров амплитудного центра пучка имеет вид

$$\begin{pmatrix} d_a(L) \\ \alpha(L) \end{pmatrix} = \frac{1}{K} \begin{pmatrix} 1, & L \\ [2(g_0-1)+(2P-K+1)]\,L^{-1}, & (2g_0-1)+2P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_a \\ \alpha \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Важно обратить внимание на то, что матрица $ABCD$ этого преобразования зависит не только от параметров резонатора и диафрагмы, но также от начальных данных пучка $\mathrm{Re}Q$ и $\mathrm{Im}Q$, которые характеризуют соответственно радиус кривизны волнового фронта и эффективную ширину пучка в сечении $z=0$.

Требование ограниченности матрицы преобразования (11) при числе отражений, стремящемся к бесконечности, приводит к критерию устойчивости амплитудного центра гауссова пучка в резонаторе в виде

$$-K < g_0 + P < K. \tag{12}$$

В этих неравенствах содержатся начальные параметры пучка. Из физического смысла имеем $N \geqslant 0$, $L\mathrm{Im}Q < 0$, а величина $L\mathrm{Re}Q$ может принимать любые значения от минус до плюс бесконечности. Видно, что неравенства (12) при фиксированных g_0 и $N > 0$ не выполняются для любых начальных параметров $\mathrm{Re}Q$ и $\mathrm{Im}Q$. Это означает, что амплитудные центры не всех гауссовых пучков устойчивы в данном резонаторе. Так, амплитудный центр пучка с $\mathrm{Re}Q=-L$ и $\mathrm{Im}Q=-(2NL)^{-1}$ неустойчив в резонаторе с $|g_0|>2$ при всех N. (Однако устойчив в резонаторе с $|g_0|<2$).

Исследуем на устойчивость амплитудный центр нулевой резонаторной моды в диафрагмированном резонаторе из плоских зеркал и в околоконфокальном резонаторе с параметром $|g_0|<1$. В приближении «слабой» дифракции в низшем порядке по малому параметру N имеем [11] для разонатора из плоских зеркал $\mathrm{Re}Q=-\mathrm{Im}Q=\sqrt{N/L}$ и для околоконфокального резонатора

$$\mathrm{Re}\,Q = \left[-(1-g_0)+\frac{g_0 N}{\sqrt{1-g_0^2}}\right]L^{-1}, \quad \mathrm{Im}\,Q = -\left(\sqrt{1-g_0^2}+N\right)L^{-1}.$$

Подставляя эти величины в неравенства (12) и отбрасывая малые члены порядка $N^{3/2}$, N^2 и др., получим для резонатора из плоских зеркал

$$-[1+2\sqrt{N}(1+2\sqrt{N})] < 1+\sqrt{N}(1+\sqrt{N}) < [1+2\sqrt{N}(1+2\sqrt{N})]$$

и для околоконфокального резонатора

$$-\left[1+\frac{2N}{\sqrt{1-g_0^2}}\right] < g_0\left[1+\frac{N}{\sqrt{1-g_0^2}}\right] < \left[1+\frac{2N}{\sqrt{1-g_0^2}}\right].$$

Обе системы неравенств бесспорны. Таким образом, амплитудные центры резонаторных гауссовых пучков в устойчивых резонаторах обладают свойством устойчивости, хотя система лучей в них может быть неустойчива.

Получим в другом виде критерий устойчивости амплитудного центра пучка, распространяющегося в резонаторе. Для параметров $Q(nL)$ и $S(nL)$ на зеркалах резонатора после n-кратного отражения пучка с помощью формул (2), (4) и правила расчета n-й степени матрицы $ABCD$ [3] находим

$$LQ(nL) = T(n)\{-2(1-g)\sin n\vartheta + [-(1-g)\sin n\vartheta + \sin\vartheta\cos n\vartheta]\,LQ\},$$

$$S(nL) = ST(n)\sin n\vartheta, \quad T(n) = [(1-g)\sin n\vartheta + \sin\vartheta\cos n\vartheta + LQ\sin n\vartheta]^{-1}, \quad \vartheta = \arccos g. \tag{13}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} d_a(nL) = {} & -[(\gamma_2\,\mathrm{Im}\,S - \gamma_1\,\mathrm{Re}\,S)(N + L\,\mathrm{Im}\,Q + \beta_2) + (\gamma_1\,\mathrm{Im}\,S + \gamma_2\,\mathrm{Re}\,S)(1 - g_0 + \\ & + L\,\mathrm{Re}\,Q + \beta_1)]\,[L((\mathrm{Re}\,Q)^2 + (\mathrm{Im}\,Q)^2)(\beta_2 - N) + (1 - g_0^2 - N^2 + \beta_1^2 + \beta_2^2)\,\mathrm{Im}\,Q + \\ & + 2((1-g_0)\beta_2 - N(1+\beta_1))\,\mathrm{Re}\,Q + 2((1-g_0)\beta_2 - N\beta_1)]^{-1}, \end{aligned} \tag{14}$$

здесь β_j и γ_j $(j=1,\ 2)$ — вещественные величины, определяемые из соотношений

$$\beta_1 + i\beta_2 = \frac{\sin\vartheta}{\sin n\vartheta}\cos n\vartheta, \quad \gamma_1 + i\gamma_2 = \frac{\sin\vartheta}{\sin n\vartheta}. \tag{15}$$

Если величина $d_a(nL)$ (14) при $n \to \infty$ не превышает некоторого значения, то амплитудный центр пучка устойчив.

Пусть $N=0$ и $|g_0|<1$, тогда формула (14) существенно упрощается

$$d_a(nL) = d_a\left[(1-g_0)\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta} + \cos n\vartheta\right] + \alpha L\frac{\sin n\vartheta}{\sin\vartheta}, \tag{16}$$

где $\vartheta = \arccos g_0$, а α определено в формулах (8).

В литературе неоднократно отмечалось своеобразие конфокального резонатора ($g_0=0$), заключающееся в том, что луч, распространяющийся под углом к проходящей через центры зеркал оптической оси, после четырех отражений переходит сам в себя [12]. Вокруг таких лучей возникают резонансные моды — внеосевые гауссовы пучки, и в резонаторе образуются «многопучковые» типы колебаний. Возникновение внеосевых пучков в конфокальном резонаторе хорошо видно из равенств (14). Полагая $\vartheta=\pi/2$, находим $Q=Q(4L)$, $S=S(4L)$. Таким образом, после четырех отражений параметры гауссова пучка самовоспроизводятся при любых начальных данных.

Автор глубоко благодарен Н. И. Калитеевскому за поддержку при выполнении работы и Ю. А. Ананьеву за критические замечания.

Литература

[1] Ананьев Ю. А. — Опт. и спектр., 1983, т. 54, в. 4, с. 765.
[2] Ананьев Ю. А. Оптические резонаторы и проблема расходимости лазерного излучения. М., 1979.
[3] Kogelnik H., Li T. — Proc. IEEE, 1966, v. 54, p. 1312.
[4] Casperson L. W. — Appl. Opt., 1973, v. 12, p. 2434.
[5] Casperson L. W. — JOSA, 1976, v. 66, p. 1373.
[6] Бойцов В. Ф. — Опт. и спектр., 1971, т. 31, в. 5, с. 961.
[7] Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах коротких волн. М., 1972.
[8] Маркузе Д. Оптические волноводы. М., 1974.
[9] Вахитов Н. Г. — Радиотехн. и электрон., 1965, т. 10, с. 1676.
[10] Бойцов В. Ф., Мурина Т. А. — Опт. и спектр., 1973, т. 34, в. 3, с. 572.
[11] Бойцов В. Ф., Слюсарев С. Г. — Вестн. ЛГУ, 1979, № 10, с. 35.
[12] Власов С. Н., Таланов В. И. — Изв. вузов СССР, Радиофизика, 1965, № 8, с. 195.

Поступило в Редакцию 13 апреля 1982 г.